Sur la géométrie des variétés sphériques.

Autor(en): **Brion, Michel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **66 (1991)**

PDF erstellt am: **01.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-50400

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 66 (1991) 237–262 0010–2571/91/020237–26$1.50 + 0.20/0
© 1991 Birkhäuser Verlag, Basel

Sur la géométrie des variétés sphériques

MICHEL BRION

Introduction

Une variété algébrique normale X, dans laquelle opère un groupe réductif connexe G, est dite sphérique si un sous-groupe de Borel de G a une orbite ouverte dans X (le corps de base k est algébriquement clos, de caractéristique nulle). Cette notion englobe les variétés toriques, dont beaucoup de propriétés s'étendent aux variétés sphériques. En particulier, G n'a qu'un nombre fini d'orbites dans X, et celles-ci sont des espaces homogènes sphériques (voir [LV], [Kn]). Lorsqu'on choisit un point de l'orbite ouverte, et qu'on note H son groupe d'isotropie, on peut considérer X comme un plongement de l'espace homogène G/H. De tels plongements sont classés par des objets combinatoires, qui généralisent l'éventail associé à une variété torique, et qui font intervenir l'ensemble $\mathscr{V}$ des valuations discrètes, invariantes par G, du corps des fonctions rationnelles sur G/H. Renvoyons à [LV] pour la classification des plongements, et à [BP], [B3], [Kn] pour la structure de $\mathscr{V}$; c'est un cône convexe polyédral.

Dans ce travail, nous étudions les faisceaux cohérents d'idéaux fractionnaires stables par G dans une variété sphérique X; appelons-les idéaux invariants. Nous classons les idéaux invariants intégralement clos, en termes de certaines fonctions (baptisées coques) sur un sous-cône de $\mathscr{V}$. Nous en déduisons une description de l'éclatement normalisé d'un idéal invariant, ainsi qu'un critère de lissité pour une variété sphérique. Dans le cas torique, ces résultats sont dus à B. Saint-Donat et G. Kempf (voir [KKMS, Chapter I]).

Voici un résumé plus détaillé du contenu de cet article. Dans la première partie, nous décrivons les idéaux invariants intégralement clos dans une variété sphérique affine. A la suite de [DEP], de nombreux travaux concernent l'arithmétique des idéaux stables par G dans l'algèbre A des fonctions polynomiales sur un G-module V, dans des exemples où A est sans multiplicité, c'est-à-dire où V est sphérique (voir [R] et ses références). On associe à un tel idéal I, son D-idéal, formé des plus grands poids des sous-G-modules simples de I. Dans chaque exemple, on a constaté que les idéaux invariants intégralement clos sont caractérisés par une propriété de convexité de leur D-idéal. Nous donnons une explication de ce phénomène, en décrivant

l'idéal invariant intégralement clos engendré par une partie de A pour toute G-algèbre A, sans multiplicité. Cette partie nécessite très peu de connaissances sur les variétés sphériques; cela se paye par des répétitions au cours de l'article.

La seconde partie est consacrée aux variétés sphériques simples, c'est-à-dire qui ne contiennent qu'une orbite fermée de G. A tout idéal invariant $\mathscr{I}$ dans une telle variété X, nous associons son ordre (c'est une fonction convexe, linéaire par morceaux, sur un sous-cône de $\mathscr{V}$) et son D-idéal (c'est un idéal d'un monoïde formé de l'intersection d'un cône et d'un réseau). Nous montrons que les données de l'ordre, du D-idéal, et de la clôture intégrale de $\mathscr{I}$ sont équivalentes, et nous caractérisons les ordres des idéaux inversibles. Les démonstrations reposent sur la structure locale des variétés sphériques (voir [B1, 1.1] et [Kn]) et sur la classification des plongements, rappelée en 2.1. L'extension de nos résultats aux variétés sphériques quelconques ne présente aucune difficulté, et est laissée au lecteur.

Dans la troisième partie, nous appliquons ce qui précède aux morphismes birationnels équivariants entre G-variétés sphériques. Après avoir rappelé les liens entre morphismes birationnels et idéaux intégralement clos (voir par exemple [Li]), nous décrivons l'éclatement normalisé d'un idéal invariant, en termes de son ordre, et nous généralisons un théorème d'annulation dû à Kempf (voir [KKMS] et aussi [B2]). Nous introduisons et étudions la décoloration d'une variété sphérique; dans le cas des variétés déterminantielles, nous retrouvons ainsi la construction classique des "collinéations complètes" par éclatements successifs (voir [TK] et ses références).

Enfin, dans la quatrième partie, nous calculons la multiplicité d'un idéal invariant $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_X$, lorsque le support de $\mathcal{O}_X/\mathscr{I}$ est une orbite de G. Cette multiplicité est donnée, comme dans le résultat principal de [B1], par l'intégrale d'une fonction polynomiale sur un polyèdre. Nous en déduisons une caractérisation (assez compliquée) des variétés sphériques lisses. Comme application de notre critère, nous étudions la lissité de certaines compactifications des groupes adjoints, qui ne sont pas des "variétés symétriques complètes" au sens de DeConcini et Procesi (voir [DP1]).

Les résultats de la seconde partie sont certainement valables en caractéristique non nulle, grâce aux méthodes de [Kn]. Par contre, dans la quatrième partie, les représentations des groupes réductifs en caractéristique nulle jouent un rôle essentiel.

L'auteur remercie Peter Littelmann pour des discussions utiles, et le rapporteur pour son travail ingrat.

1. Idéaux invariants dans les variétés sphériques affines

1.1. *Idéaux et D-idéaux*

Dans tout ce qui suit, G désigne un groupe algébrique réductif connexe, B un sous-groupe de Borel de G, et U le radical unipotent de B.

Soit X une G-variété affine irréductible. On note $A := k[X]$ l'algèbre des fonctions régulières sur X, et $K := k(X)$ son corps des fractions, i.e. le corps des fonctions rationnelles sur X. Le groupe G opère dans A (qui est un G-module rationnel), et dans K.

Definition. Un idéal (fractionnaire) invariant est un A-sous-module de type fini de K, stable par G.

LEMME. *Tout idéal invariant est un G-module rationnel.*

Démonstration. Soit I un tel idéal. Choississons $f \in A$ tel que $f \neq 0$ et $fI \subset A$. Pour tout $\varphi \in K$, notons $\langle G \cdot \varphi \rangle$ le G-sous-module de K engendré par φ. Posons $\langle G \cdot f \rangle = M$; alors $MI \subset A$. Soit $\varphi \in I$: alors $f\langle G \cdot \varphi \rangle \subset \langle G \cdot M\varphi \rangle$ et $M\varphi$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de A, donc il en est de même de $\langle G \cdot M\varphi \rangle$. Par suite, la dimension de $\langle G \cdot \varphi \rangle$ est finie.

Nous allons étudier les idéaux invariants lorsque X est sphérique; cela revient à dire que le G-module A est sans multiplicité (voir [Kr; III.3.6]).

Pour tout G-module M, on note $M^{(B)}$ l'ensemble des vecteurs propres de B dans M, et $D(M)$ l'ensemble de leurs poids. Puisque A est une algèbre de type fini, $D(A)$ est un monoïde de type fini [Kr; III.3.1]. Le G-module rationnel A est isomorphe à $\bigoplus_{\lambda \in D(A)} V_\lambda$ où V_λ désigne un G-module simple de plus grand poids λ. On pose $\Lambda := D(K)$; c'est un groupe abélien libre, engendré par $D(A)$. Tout $f \in K^{(B)}$ est déterminé par son poids, à un multiple scalaire près.

PROPOSITION. *Tout idéal invariant I est uniquement déterminé par $D(I)$. Celui-ci est de la forme $\bigcup_{i=1}^{n} \lambda_i + D(A)$ pour une partie $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ de Λ.*

Démonstration. D'après le lemme, le G-module I est engendré par $I^{(B)}$; la première assertion résulte du fait que le poids d'un élément f de $K^{(B)}$ détermine f à un multiple scalaire près. Puisque I est un A-module de type fini, I^U est un A^U-module de type fini [Kr; III.3.2]. On peut donc en choisir des générateurs $f_1, \ldots, f_n$ dans $I^{(B)}$; la deuxième assertion est vérifiée en prenant pour λ_i le poids de f_i.

Définition. Une partie Δ de Λ est un D-idéal si Δ est réunion d'un nombre fini de translatés de $D(A)$ par des éléments de Λ.

Cela revient à dire que Δ est stable par translations par $D(A)$, et est contenu dans un translaté de $D(A)$ par un élément de Λ. Grâce à la proposition, on attache à tout idéal invariant I, un D-idéal $D(I)$. Un problème ouvert est de reconnaître

parmi les D-idéaux, ceux qui proviennent d'idéaux invariants (voir [R] pour des résultats partiels). Dans les sections 1.2 et 1.3, nous allons caractériser les D-idéaux associés aux idéaux invariants *intégralement clos*, par des propriétés de convexité.

1.2. *Clôture intégrale et valuations invariantes*

Rappelons d'abord la notion de clôture intégrale d'un idéal (voir [ZS; Appendix 4]). Soient A un anneau commutatif unitaire et intègre, K son corps des fractions, et I un idéal (fractionnaire) de K. Un élément f de K est *entier sur* I s'il existe une relation $f^n + a_1 f^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ où $a_p \in I^p$ pour $1 \leq p \leq n$. Les éléments entiers sur I forment un idéal, noté $\bar{I}$, et appelé la *clôture intégrale* de I. On dit que I est *intégralement clos* si $I = \bar{I}$.

Pour tout idéal I, on a : $\bar{I} = \cap I\mathcal{O}_v$ où $\mathcal{O}_v$ décrit les anneaux de valuation de K. Lorsque A est noethérien et intégralement clos, on peut se limiter aux anneaux de valuation discrète qui contiennent A [loc. cit, Theorem 3].

Revenons au cas où A est l'algèbre des fonctions régulières sur une G-variété sphérique affine X. Choisissons $x \in X$ tel que l'orbite $B \cdot x$ soit ouverte dans X, et notons $H = G_x$ son groupe d'isotropie dans G. On identifie $G \cdot x$ et G/H, d'où $K = k(G/H)$. On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des valuations discrètes G-invariantes de K, à valeurs dans $\mathbf{Q}$; on note $\mathcal{V}(X)$ l'ensemble des $v \in \mathcal{V}$ telles que $A \subset \mathcal{O}_v$.

LEMME. *Soit I un idéal invariant.*

(i) *La restriction de I à $G \cdot x$ est le faisceau structural de $G \cdot x$.*

(ii) *La clôture intégrale de I est*

$$k[G/H] \cap \bigcap_{v \in \mathcal{V}(X)} I\mathcal{O}_v.$$

Démonstration. (i) Puisque les translatés de $B \cdot x$ forment un recouvrement affine de $G \cdot x$, et que I est stable par G, il suffit de montrer que la restriction I_0 de I à $B \cdot x$ est triviale. Posons $A_0 := k[B \cdot x]$ et $J_0 := \{f \in A_0 \mid fI_0 \subset A_0\}$. Alors J_0 est un idéal B-stable de A_0, et $J_0 \neq 0$ donc $J_0 = A_0$. Par suite, $I_0 \subset A_0$, d'où $I_0 = A_0$.

(ii) Soit t une indéterminée; considérons $\tilde{A} := \oplus_{n=0}^{\infty} \overline{I^n} t^n \subset K(t)$. Puisque $\tilde{A}$ est la normalisation de $\oplus_{n=0}^{\infty} I^n t^n$ dans $K(t)$, c'est une k-algèbre de type fini. Le groupe $\tilde{G} := G \times k^*$ opère dans $\tilde{A}$, et $\tilde{X} := \operatorname{Spec} \tilde{A}$ est une $\tilde{G}$-variété sphérique. Notons $\pi : \tilde{X} \to X$ le morphisme associé à l'inclusion de A dans $\tilde{A}$. Choisissons $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tel que $\tilde{G} \cdot \tilde{x}$ soit ouvert dans $\tilde{X}$, et que $\pi(\tilde{x}) = x$. Soient $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$ les valuations associées

aux composantes iréductibles de codimension 1 de $\tilde{X}\backslash\tilde{G}\cdot\tilde{x}$; elles sont invariantes par $\tilde{G}$. Puisque $\tilde{X}$ est normale, on a:

$$\tilde{A} = k[\tilde{G}\cdot\tilde{x}] \cap \bigcap_{i=1} \mathcal{O}_{\tilde{v}_i}.$$

En outre, puisque la restriction de tout $\overline{I^n}$ à G/H est triviale, on a : $\tilde{G}_{\tilde{x}} = H \times \{1\}$. D'où $k[\tilde{G}\cdot\tilde{x}] = k[G/H][t, t^{-1}]$. On en déduit que

$$\bar{I} = \{f \in k[G/H] \mid \tilde{v}_i(ft) \geq 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n\}.$$

De l'invariance de $\tilde{v}_i$ par $\tilde{G}$, il résulte qu'il existe $v_i \in \mathcal{V}$ et $a_i \in \mathbf{Q}$ tels que $\tilde{v}_i(\varphi t^n) = v_i(\varphi) + a_i n$ pour tout $\varphi \in I^n$. Par suite, on a:

$$\bar{I} = k[G/H] \cap \bigcap_{i=1}^{N} \{f \in K \mid v_i(f) \geq a_i\}$$

d'où

$$k[G/H] \cap \bigcap_{v \in \mathcal{V}(X)} I\mathcal{O}_v \subset \bar{I}.$$

L'inclusion opposée est évidente.

Nous sommes amenés à décrire les ensembles $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}(X)$. Par restriction à $K^{(B)}$, tout élément de $\mathcal{V}$ définit un morphisme ρ_v de Λ vers $\mathbf{Q}$. On pose $\mathcal{Q} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, \mathbf{Q})$. Dans l'espace vectoriel $\Lambda_{\mathbf{Q}} := \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ dual de $\mathcal{Q}$, définissons un cône convexe Σ comme suit: Σ est engendré par les différences $\nu - \lambda - \mu$ où $\lambda, \mu, \nu \in D(A)$ et le produit de V_λ et V_μ dans A contient V_ν. L'énoncé suivant est un cas particulier de résultats de Luna-Vust et Pauer (voir [LV, 7.4], [P, Proposition 2.1] et [Kn, Lemma 5.1]), qu'on reverra en 2.1. Nous en donnons une démonstration pour mémoire.

PROPOSITION

(i) *L'application* $\rho : v \to \rho_v$ *est une injection de* $\mathcal{V}$ *dans* $\mathcal{Q}$.

(ii) *L'image* $\rho(\mathcal{V})$ *est le cône dual de* Σ.

Rappelons que pour toute partie σ de $\Lambda_{\mathbf{Q}}$, le cône dual de σ est

$$\check{\sigma} = \{f \in \mathcal{Q} \mid \forall X \in \sigma \ \langle f, x\rangle \geq 0\}.$$

Démonstration. (i) Soit $v \in \mathscr{V}$. Il suffit de prouver que pour tout G-sous-module simple M de A, la restriction de v à M est constante. Mais cela résulte du fait que $M_n := \{m \in M \mid v(m) \geq n\}$ est un sous-G-module de M, quel que soit $n \in \mathbf{Q}$.

(ii) Soit $v \in \mathscr{V}$; montrons que v est non négative sur Σ. Soient $\lambda, \mu, \nu \in D(A)$ tels que $V_\nu \subset V_\lambda \cdot V_\mu$. Alors $\langle v, \nu \rangle \geq \langle v, \lambda \rangle + \langle v, \mu \rangle$ où on note $\langle v, \lambda \rangle$ la valeur de ρ_v sur V_λ.

Réciproquement, soit $v \in \check{\Sigma}$. Etendons v en une application $\tilde{v} : A \to \mathbf{Q} \cup \{\infty\}$ comme suit: on pose $\tilde{v}(0) = \infty$. Si $f \in A \backslash \{0\}$, on pose $\tilde{v}(f) = \min \langle v, \omega \rangle$, le minimum portant sur les poids ω de $\langle G \cdot f \rangle^{(B)}$. Il est clair que $\tilde{v}$ est invariante par G; montrons que $\tilde{v}$ est la restriction à A d'une valuation de K.

Soient $f_1, f_2 \in A$. Choisissons un poids λ de $\langle G \cdot (f_1 + f_2) \rangle^{(B)}$ tel que $\tilde{v}(f_1 + f_2) = \langle v, \lambda \rangle$. Alors $f_1 + f_2$ a une projection non nulle sur V_λ, donc on peut supposer qu'il en est de même de f_1. Par suite, λ est un poids de $\langle G \cdot f_1 \rangle^{(B)}$, d'où $\tilde{v}(f_1) \leq \langle v, \lambda \rangle$. On conclut que $\tilde{v}(f_1 + f_2) \geq \min(\tilde{v}(f_1), \tilde{v}(f_2))$.

De l'inclusion de $\langle G \cdot f_1 f_2 \rangle$ dans $\langle G \cdot f_1 \rangle \cdot \langle G \cdot f_2 \rangle$, il suit que $\tilde{v}(f_1 f_2) \geq \tilde{v}(f_1) + \tilde{v}(f_2)$ avec égalité si f_1, f_2 sont vecteurs propres de B, et plus généralement, s'ils sont invariants par U. Pour tout entier $n \geq 0$, posons

$$A_n := \bigoplus_{\langle v, \lambda \rangle \geq n} V_\lambda = \{f \in A \mid \tilde{v}(f) \geq n\}.$$

Alors (A_n) est une filtration décroissante de A. Notons $\operatorname{gr} A$ le gradué associé. D'après ce qui précède, l'algèbre $(\operatorname{gr} A)^U$ est isomorphe à A^U. Grâce à [Kr; III.3.3], on en déduit que $\operatorname{gr} A$ est intègre, d'où $\tilde{v}(f_1 f_2) = \tilde{v}(f_1) + \tilde{v}(f_2)$ quels que soient $f_1, f_2 \in A$.

COROLLAIRE. *L'image $\rho(\mathscr{V}(X))$ est le cône dual de $\Sigma + D(A)$.*

Démonstration. D'après la preuve de (i) ci-dessus, on a: $v \in \mathscr{V}(X) \Leftrightarrow v \in \mathscr{V}$ et $v \geq 0$ sur $D(A)$.

1.3. *Structure des idéaux invariants intégralement clos*

THÉORÈME. *Pour tout idéal invariant I, le D-idéal de $\bar{I}$ est l'intersection de $D(k[G/H])$ avec l'enveloppe convexe de $D(I) + \Sigma$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in D(k[G/H])$. Si λ est dans l'enveloppe convexe de $\Sigma + D(I)$, alors on a, pour tout $v \in \mathscr{V}(X)$:

$$\langle v, \lambda \rangle \geq \min_{\mu \in \Sigma + D(I)} \langle v, \mu \rangle = \min_{\mu \in D(I)} \langle v, \mu \rangle = \min_{f \in I} v(f).$$

Cela signifie que $I\mathcal{O}_v$ contient tout élément de $K^{(B)}$ de poids λ. On conclut grâce au lemme 1.2, que $\lambda \in D(\bar{I})$.

Supposons maintenant que λ n'est pas dans l'enveloppe convexe de $\Sigma + D(I)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $\varphi \in \mathcal{Q}$ telle que:

$$\langle \varphi, \lambda \rangle < \min_{\mu \in \Sigma + D(I)} \langle \varphi, \mu \rangle.$$

Soit $v \in \Sigma + D(I)$: montrons que $\langle \varphi, v \rangle \geq 0$. En effet, choisissons $\mu \in D(I)$; alors $\mu + nv \in \Sigma + D(I)$ pour tout entier $n \geq 0$, donc $\langle \varphi, \lambda \rangle < \langle \varphi, \mu + nv \rangle$ et l'assertion. D'après le corollaire ci-dessus, on peut écrire $\varphi = \rho_v$ avec $v \in \mathcal{V}(X)$; alors

$$\langle v, \lambda \rangle < \min_{\mu \in \Sigma + D(I)} \langle v, \mu \rangle = \min_{f \in I} v(f).$$

Comme précédemment, on en déduit que $\lambda \notin D(\bar{I})$.

Pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$, on note $\lambda \leq \mu$ si $\lambda - \mu \in \Sigma$. Cela définit un ordre partiel sur Λ; en effet, $\Sigma \cap (-\Sigma) = \{0\}$ puisque Σ est engendré par des racines négatives.

Lorsque I est inclus dans A, on peut remplacer $D(k[G/H])$ par $D(A)$ dans le théorème ci-dessus. On obtient un énoncé qui unifie plusieurs résultats antérieurs ([DEP, Theorem 8.2], [AD, Theorem 6.2], [R, Proposition 4.7]).

COROLLAIRE. *Quels que soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D(A)$, la clôture intégrale de l'idéal invariant engendré par $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_n}$ a pour D-idéal l'ensemble des $\lambda \in D(A)$ tels qu'il existe μ dans l'enveloppe convexe de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ avec $\lambda \leq \mu$.*

1.4. *Exemples*

(a) *Les variétés déterminantielles*

Soient m, n deux entiers tels que $1 \leq m \leq n$. Considérons l'opération naturelle du groupe $G := \mathrm{GL}_m(k) \times \mathrm{GL}_n(k)$ dans $X := \mathrm{Hom}_k(k^m, k^n)$. Les adhérences des G-orbites dans X sont les "variétés déterminantielles" (voir [Kr, III.3.7]).

Soit B le sous-groupe de Borel de G formé des couples (u, v) où u est triangulaire inférieure, et v triangulaire supérieure. Posons $x := (1_n 0)$ où 1_n est la matrice unité $n \times n$. Le groupe d'isotropie de x dans G est:

$$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a \right) \middle| \, a \in \mathrm{GL}_n(k), b \in \mathrm{Hom}_k(k^{m-n}, k^n), c \in \mathrm{GL}_{m-n}(k) \right\}.$$

Par suite, $B \cap H$ est isomorphe au produit direct d'un tore de dimension n, par un sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_{m-n}(k)$. Un calcul de dimensions montre que $B \cdot x$ est ouvert dans X.

Nous allons rappeler la décomposition de $A = k[X]$ en somme directe de sous-G-modules simples, et décrire le cône Σ introduit en 1.2. Pour $1 \leq i \leq n$, notons φ_i (resp. ψ_i) le poids dominant du G-module simple $\wedge^i k^m$ (resp. $(\wedge^i k^n)^*$). D'après [loc. cit.], le monoïde $D(A)$ est engendré par $\varphi_1 + \psi_1, \ldots, \varphi_n + \psi_n$, qui forment une base du réseau Λ. Soit T le tore maximal de B formé des couples de matrices diagonales. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ (resp. $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$) les racines simples de $\mathrm{GL}_m(k)$, T (resp. de $\mathrm{Gl}_n(k)$, T), ordonnées de façon que $\langle \varphi_i, \check{\alpha}_i \rangle = \langle \psi_j, \check{\beta}_j \rangle = 1$.

PROPOSITION. *Le cône Σ est engendré par $-\alpha_1 - \beta_1, \ldots, -\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}$.*

Démonstration. Remarquons que Σ est contenu dans l'intersection Σ' du cône engendré par les racines négatives, et de l'espace vectoriel engendré par $\varphi_1 + \psi_1, \ldots, \varphi_n + \psi_n$. On vérifie sans peine que le cône Σ' est engendré par $-\alpha_1 - \beta_1, \ldots, -\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}$. Pour conclure, il suffit de prouver que

$$(*) \quad -\alpha_p - \beta_p \in \Sigma \quad \text{pour} \quad 1 \leq p \leq n-1.$$

Pour $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ et $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$, notons $(i_1 \cdots i_p \,|\, j_1 \cdots j_p)$ l'élément de A défini par

$$(i_1 \cdots i_p \,|\, j_1 \cdots j_p)(a_{ij}) = \det (a_{i_\alpha j_\alpha})_{1 \leq \alpha \leq p}.$$

Pour p fixé, les fonctions $(i_1 \cdots i_p \,|\, j_1 \cdots j_p)$ engendrent un sous-G-module simple V_p de A, isomorphe à $\mathrm{Hom}_k(\wedge^p k^m, \wedge^p k^n)^*$. Un vecteur propre de B dans V_p est $(1 \cdots p \mid 1 \cdots p)$, de poids $\varphi_p + \psi_p$. On vérifie aisément que l'élément

$$\begin{aligned}&(1 \cdots p \mid 1 \cdots p)(1 \cdots p-1\, p+1 \mid 1 \cdots p-1\, p+1)\\ &\quad - (1 \cdots p-1\, p+1 \mid 1 \cdots p+1\, p-1)(1 \cdots p+1\, p-1 \mid 1 \cdots p-1\, p+1)\end{aligned}$$

est un vecteur propre non nul de B, de poids $2(\varphi_p + \psi_p) - \alpha_p - \beta_p$. Puisqu'il appartient au carré de V_p dans A, l'assertion $(*)$ en résulte.

D'après la proposition, l'ordre partiel $\leq$ sur Λ est induit par l'ordre usuel sur les poids. En traduisant le langage des poids et racines dans celui des tableaux, on peut déduire du corollaire 1.3 les résultats de [DEP, §8].

(b) *Un exemple isolé*

Soit $m \geq 4$ un entier. Dans $X := \mathrm{Hom}_k(k^m, k^4)$, faisons opérer $G := \mathrm{GL}_m(k) \times \mathrm{Sp}_4(k)$ où $\mathrm{Sp}_4(k)$ désigne le groupe symplectique associé à la forme

$e_1 \wedge (e_2 + e_3 + e_4) + e_2 \wedge e_3$ dans la base canonique de k^4. Définissons B, T, H, x de façon analogue à l'exemple ci-dessus. Alors

$$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a \right) \middle| \, a \in \mathrm{Sp}_4(k), b \in \mathrm{Hom}_k(k^{m-4}, k^4), c \in \mathrm{GL}_{m-4}(k) \right\}.$$

On en déduit que $B \cap H$ est isomorphe au produit direct du centre de $\mathrm{Sp}_4(k)$ par un sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_{m-4}(k)$, et que $B \cdot x$ est ouvert dans X.

Pour $1 \leq i \leq 4$, soit φ_i le plus grand poids du $\mathrm{GL}_m(k)$-module simple $\wedge^i k^m$; soient ψ_1, ψ_2 les poids fondamentaux de $\mathrm{Sp}_4(k)$. On peut vérifier que le monoïde $D(A)$ est engendré librement par $\varphi_1 + \psi_1, \varphi_2, \varphi_3 + \psi_1, \varphi_4, \varphi_1 + \varphi_3 + \psi_2$, et que Σ est engendré par $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, -\beta_1, -\beta_2$ où $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta_1, \beta_2$ sont les racines simples de G. Par suite, l'ordre partiel sur Λ coïncide encore avec l'ordre usuel sur les poids.

2. Idéaux invariants dans les variétés sphériques simples

2.1. *Rappels*

Nous allons étendre les résultats de la première partie aux G-variétés sphériques *simples*, i.e. qui ne contiennent qu'une orbite fermée de G. Voici d'abord quelques rappels sur la classification et la structure de ces variétés; pour les démonstrations et plus de détails, voir [LV, §8], [BP, §2], [B1, 1.1] et [Kn]. Dans tout ce qui suit, et sauf mention expresse du contraire, X désigne une variété sphérique simple, et Y l'orbite fermée de G dans X.

(i) *Classification des plongements simples*

Choisissons $x \in X$ tel que $B \cdot x$ soit ouvert dans X, et posons $H := G_x$; alors (X, x) est un plongement de l'espace homogène G/H. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des diviseurs irréductibles B-stables de G/H, et $\mathscr{V}$ l'ensemble des valuations discrètes G-invariantes de $K := k(G/H)$. Notons $\mathscr{F}(X)$ l'ensemble des $D \in \mathscr{D}$ dont l'adhérence contient Y, et soit $\mathscr{B}(X)$ l'ensemble des valuations associées aux diviseurs irréductibles G-stables de X; alors $\mathscr{B}(X) \subset \mathscr{V}$. D'après [LV, Proposition 8.3] ou [Kn, Theorem 2.3], le plongement (X, x) est uniquement déterminé par le couple $(\mathscr{B}(X), \mathscr{F}(X))$. Les éléments de $\mathscr{F}(X)$ s'appellent les *couleurs* de X.

(ii) *Description des valuations invariantes*

On note Λ l'ensemble des poids de $K^{(B)}$, et $\mathscr{Q} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, \mathbf{Q})$. Tout $v \in \mathscr{V}$ se restreint en un élément ρ_v de $\mathscr{Q}$. D'après [LV, Proposition 7.4] ou [Kn, Corollary

1.8], l'application $\mathscr{V} \to \mathscr{Q} : v \to \rho_v$ est injective, et son image est un cône convexe polyédral dans $\mathscr{Q}$. De même, tout $D \in \mathscr{D}$ définit une valuation v_D de K, d'où $\rho_D \in \mathscr{Q}$; mais l'application $D \to \rho_D$ peut ne pas être injective. On note $\mathscr{C}(X)$ le cône de $\mathscr{Q}$ engendré par $\rho(\mathscr{F}(X) \cup \mathscr{B}(X))$, et on note $\mathscr{V}(X)$ l'intersection de $\mathscr{C}(X)$ et de $\rho(\mathscr{V})$; ce sont deux cônes convexes polyédraux.

(iii) *Une carte affine*

Avec les notations précédentes, on pose

$$X_0 := X \setminus \bigcup_{D \in \mathscr{D} \setminus \mathscr{F}(X)} \bar{D}.$$

C'est un ouvert de X, stable par le sous-groupe parabolique

$$P := \{s \in G \mid s \cdot D = D \ \forall D \in \mathscr{F}(X)\}$$

qui contient B. En fait, X_0 est affine, et recontre Y suivant une unique orbite de P et de B. Plus précisément d'après [B1, 1.1], il existe un sous-groupe de Levi L de P, et une sous-variété Z de X_0, tels que:

(a) Z est affine, stable par L, et contient x.
(b) L'application $P^u \times Z \to X_0 : (s, z) \to s \cdot z$ est un isomorphisme.
(c) Le sous-groupe dérivé (L, L) de L opère trivialement dans $Y \cap Z$, qui est l'orbite fermée de L dans Z.

Posons $A := k[X_0]$, et notons $D(A)$ l'ensemble des poids de $A^{(B)}$. Alors $D(A)$ est l'intersection de Λ et du cône dual de $\mathscr{C}(X)$.

Nous allons décrire les idéaux invariants de X, en termes de Λ, $\mathscr{C}(X)$ et $\mathscr{V}(X)$. Grâce à la structure de la carte X_0, nous nous ramènerons à des problèmes concernant la L-variété sphérique affine Z.

2.2. *Idéaux invariants*

On conserve les notations de la section précédente.

Définition. Un *idéal* (*fractionnaire*) *invariant* $\mathscr{I}$ de X est un sous-faisceau, cohérent et stable par G, du faisceau constant des fonctions rationnelles sur X. Le *D-idéal* de $\mathscr{I}$ est l'ensemble des poids de $\Gamma(X_0, \mathscr{I})^{(B)}$.

En particulier, le D-idéal de $\mathcal{O}_X$ est $D(A) = \Lambda \cap \mathscr{C}(X)^V$.

PROPOSITION. *Soit $\mathscr{I}$ un idéal invariant.*

(i) *La restriction de $\mathscr{I}$ à G/H est égale à $\mathcal{O}_{G/H}$.*

(ii) *Le D-idéal de $\mathscr{I}$ est réunion d'un nombre fini de translatés de $D(\mathcal{O}_X)$; il détermine uniquement $\mathscr{I}$.*

Démonstration. La preuve de (i) est analogue à celle du lemme 1.2(i). Pour (ii), posons $I := \Gamma(X_0, \mathscr{I})$. C'est un idéal P-invariant de A, donc l'isomorphisme de A sur $k[P^u] \otimes k[Z]$ (voir 2.1(iii)) envoie I sur $k[P^u] \otimes J$, où J est un idéal L-invariant de $k[Z]$. Puisque X_0 rencontre toutes les orbites de G dans X, et que $\mathscr{I}$ est G-invariant, il est déterminé par I, donc par J. Comme $D(\mathcal{O}_X) = D(k[Z])$ et que $D(\mathscr{I}) = D(I) = D(J)$, on est ramené au cas où X est affine. L'énoncé résulte alors de la proposition 1.1.

Pour tout $v \in \mathscr{V}$, il existe un plongement simple (X_v, x_v) de G/H tel que $\mathscr{F}(X_v) = \varnothing$ et $\mathscr{B}(X_v) = \{v\}$; on l'appelle le *plongement élémentaire* associé à v (voir [LV, 3.3]). La complémentaire de $G \cdot x_v$ dans X_v est une seule orbite de G, de codimension 1; notons-la Y_v. Le lemme suivant est évident.

LEMME. *Avec les notations précédentes, tout idéal invariant de X_v est de la forme $\mathcal{O}_{X_v}(-nY_v)$ pour un unique entier n.*

D'après [LV, Proposition 4.8], il existe un morphisme de plongements $\pi_v : (X_v, x_v) \to (X, x)$ si et seulement si $v \in \mathscr{V}(X)$ (notations de 2.1(ii)). Sous cette hypothèse, pour tout idéal invariant $\mathscr{I}$ de X, son image inverse $\mathscr{I}\mathcal{O}_{X_v}$ est égale à $\mathcal{O}_{X_v}(-n(v)Y_v)$ avec $n(v) \in \mathbf{Z}$.

Définition. L'ordre de $\mathscr{I}$ est l'application ord $\mathscr{I}$ de $\mathscr{V}(X)$ vers $\mathbf{Q}$ définie par:

$$(\operatorname{ord} \mathscr{I})(v) = n(v)a(v)$$

où $a(v)$ est le générateur positif du groupe des valeurs de v.

L'ordre de $\mathscr{I}$ se lit sur son D-idéal; plus précisément, on a le

THÉORÈME. *Pour tout idéal invariant $\mathscr{I}$, et tout $v \in \mathscr{V}(X)$, on a les égalités:*

$$(\operatorname{ord} \mathscr{I})(v) = \min_{f \in \Gamma(X_0, \mathscr{I})} v(f) = \min_{f \in D(I)} v(f).$$

Démonstration. On peut supposer la valuation v normalisée. Alors $(\operatorname{ord} \mathscr{I})(v)$ est le minimum des $v(f)$ pour $f \in \mathscr{I}_v$ où $\mathscr{I}_v$ est l'idéal de $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{X_v, Y_v}$ associé à $\mathscr{I}$. Puisque $v \in \mathscr{V}(X)$, on a: $k[X_0] \subset \mathcal{O}_v$. Comme X_0 est affine et $\mathscr{I}$ cohérent, le $\mathcal{O}_v$-module $\mathscr{I}_v$ est engendré par $\Gamma(X_0, \mathscr{I})$ d'où la première égalité. Pour la seconde,

on remarque que $\Gamma(X_0, \mathscr{I}) = k[P^u] \otimes J$ où J est un idéal L-invariant de Z. Puisque v est invariante par P, on a: $\min_{f \in \Gamma(X_0, \mathscr{I})} v(f) = \min_{f \in J} v(f)$. De plus, J est un L-module rationnel d'après 1.1, et la restriction de v à $k(Z)$ est constante sur tout sous-L-module rationnel simple de $k(Z)$ (voir la preuve de la proposition 1.2(i)). On en déduit que

$$\min_{f \in J} v(f) = \min_{f \in D(J)} v(f) = \min_{f \in D(\mathscr{I})} v(f).$$

COROLLAIRE. *La fonction* ord $\mathscr{I}$ *est positivement homogène, linéaire par morceaux, continue, convexe sur* $\mathscr{V}(X)$. *Elle prend des valeurs entières sur l'intersection de* $\mathscr{V}(X)$ *et de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, \mathbf{Z})$, *et s'étend en une fonction non négative sur* $\mathscr{F}(X)$.

Définition. Une telle fonction est appelée un *coque.*

Démonstration du corollaire. D'après la proposition ci-dessus, il existe $f_1, \ldots, f_n \in \Lambda$ tels que $D(\mathscr{I}) = \bigcup_{i=1}^n f_i + D(\mathscr{O}_X)$. Puisque tout $v \in \mathscr{V}(X)$ est non négative sur $D(\mathscr{O}_X)$, il résulte du théorème que ord $\mathscr{I}$ est la restriction à $\mathscr{V}(X)$ de la fonction $\min_{1 \le i \le n} f_i$ sur $\mathscr{C}(X)$. Les assertions du corollaire s'en déduisent aussitôt; la non-négativité sur $\mathscr{F}(X)$ suit du fait que $\Gamma(X_0, \mathscr{I})$ est formé de fonctions régulières sur $X_0 \cap G \cdot x$, donc sur $B \cdot x \cup \bigcup_{D \in \mathscr{F}(X)} D$.

2.3. *Ordre et clôture intégrale*

Rappelons d'abord la notion de clôture intégrale d'un idéal $\mathscr{I}$: il s'agit du sous-faisceau $\bar{\mathscr{I}}$ du faisceau constant K, tel que pour tout ouvert affine V de X, et toute $s \in K$, on ait: $s \in \Gamma(V, \bar{\mathscr{I}})$ si et seulement s'il existe un recouvrement ouvert (V_α) de V tel que pour tout α, $s \mid V_\alpha$ est entier sur $\Gamma(V_\alpha, \mathscr{I})$ (voir [Li, §5]). Pour un idéal invariant, il se trouve que les données de l'ordre et de la clôture intégrale sont équivalents; plus précisément, on a le

THÉORÈME. *Soit* $\Phi : \mathscr{V}(X) \to \mathbf{Q}$ *une coque* (*voir* 2.2 *Définition*).

(i) *Il existe un unique idéal invariant* $\mathscr{I}_\Phi$ *de* X, *dont le* D-*idéal est l'ensemble des* $f \in \Lambda$ *telles que* $f \ge 0$ *sur* $\mathscr{F}(X)$ *et que* $f \ge \Phi$ *sur* $\mathscr{V}(X)$. *De plus,* $\mathscr{I}_\Phi$ *est intégralement clos.*

(ii) *On a*: ord $\mathscr{I}_\Phi = \Phi$.

(iii) *Pour tout idéal invariant* $\mathscr{I}$, *on a*: $\mathscr{I}_{\mathrm{ord}\,\mathscr{I}} = \bar{\mathscr{I}}$.

Démonstration. (i) L'unicité de $\mathscr{I}_\Phi$ résulte du fait que tout idéal invariant est uniquement déterminé par son D-idéal (voir 2.2. Proposition). Pour l'existence, considérons l'espace homogène sphérique $\tilde{G}/\tilde{H}$ où $\tilde{G} := G \times k^*$ et $\tilde{H} := H \times \{1\}$.

Avec des notations évidentes, on a: $\tilde{\Lambda} = \Lambda \times \mathbf{Z}$; $\tilde{\mathscr{Q}} = \mathscr{Q} \times \mathbf{Q}$; $\tilde{\mathscr{V}} = \mathscr{V} \times \mathbf{Q}$ et $\tilde{D} = D$. D'après [LV, Proposition 8.10] ou [Kn, Theorem 3.1], il existe un plongement simple $(\tilde{X}, \tilde{x})$ de $\tilde{G}/\tilde{H}$ tel que $\mathscr{F}(\tilde{X}) = \mathscr{F}(X)$ et que

$$\mathscr{V}(\tilde{X}) = \{(v, u) \in \mathscr{V}(X) \times \mathbf{Q} \mid \Phi(v) + u \geq 0\}.$$

De plus, on a un $\tilde{G}$-morphisme $\varphi : (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ qui prolonge la projection $\tilde{G}/\tilde{H} = G/H \times k^* \to G/H$ [loc. cit, Theorem 4.1]. On vérifie sans mal que $\varphi^{-1}(X_0) = \tilde{X}_0$. D'après 2.2(iii), on a avec des notations évidentes, pour $(f, n) \in \tilde{\Lambda} : (f, n) \in D(\tilde{A})$ si et seulement si $v_D(f) \geq 0$ pour tout $D \in \mathscr{F}(X)$ et $v(f) + un \geq 0$ pour tout $(v, u) \in \mathscr{V}(\tilde{X})$, i.e. si: $f \geq 0$ sur $\mathscr{F}(X)$, l'entier n est non négatif, et $f \geq n\Phi$ sur $\mathscr{V}(X)$. Donc l'action de k^* dans $\tilde{X}_0$ induit une graduation de $\tilde{A}$, avec $\tilde{A}_0 = A$; de plus, $D(\tilde{A}_1)$ est formé des $f \in \Lambda$ tels que $f \geq 0$ sur $\mathscr{F}(X)$ et que $f \geq \Phi$ sur $\mathscr{V}(X)$. D'où isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules gradués: $\mathcal{O}_{\tilde{X}} = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{I}_n$ avec $\mathscr{I}_0 = \mathcal{O}_X$. De plus, les $\mathscr{I}_n$ sont des idéaux invariants de X, intégralement clos (car $\tilde{X}$ est normale), et on peut prendre $\mathscr{I}_\Phi = \mathscr{I}_1$.

(ii) D'après la proposition 2.2, on a: $\operatorname{ord} \mathscr{I}_\Phi = \min(f)$ où on prend le minimum sur les $f \in \Lambda$ telles que $f \geq 0$ sur $\mathscr{F}(X)$ et que $f \geq \Phi$ sur $\mathscr{V}(X)$. L'assertion résulte donc du fait que Φ s'étend en une fonction convexe sur $\mathscr{C}(X)$, non négative sur $\mathscr{F}(X)$.

(iii) Considérons la $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée cohérente $\oplus_{n=0}^{\infty} \overline{\mathscr{I}^n}$; notons $\bar{X}$ son spectre. Puisque la restriction de chaque $\overline{\mathscr{I}^n}$ à G/H est triviale, $\bar{X}$ est un plongement de l'espace homogène sphérique $\tilde{G}/\tilde{H}$. On a un morphisme de plongements $\varphi : (\bar{X}, \bar{x}) \to (X, x)$, dual de $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_{\bar{X}}$. Du fait que φ est le quotient par l'action de k^*, résulte que $\bar{X}$ est simple et que $\mathscr{F}(\bar{X}) = \mathscr{F}(X)$. Par suite, on a: $\varphi^{-1}(X_0) = \bar{X}_0$. Soit $(v, u) \in \tilde{\mathscr{Q}}$: alors

$$\begin{aligned}
(v, u) \in \mathscr{V}(X) &\Leftrightarrow v(f) + un \geq 0 \ \ \forall (f, n) \in D(\mathcal{O}_{\bar{X}}) \\
&\Leftrightarrow v(f) + un \geq 0 \ \ \forall f \in D(\overline{\mathscr{I}^N}) \\
&\Leftrightarrow v(f) + u \geq 0 \ \ \forall f \in D(\mathscr{I}) \\
&\Leftrightarrow (\operatorname{ord} \mathscr{I})(v) + u \geq 0.
\end{aligned}$$

Par suite, on a: $\mathscr{V}(\bar{X}) = \mathscr{V}(\tilde{X})$ où $\tilde{X}$ est la variété construite en (i) avec $\Phi = \operatorname{ord} \mathscr{I}$. Donc $\bar{X} = \tilde{X}$ d'après la classification des plongements, et $\bar{\mathscr{I}} = \mathscr{I}_1 = \mathscr{I}_\Phi$.

2.4. *Classification des idéaux invariants intégralement clos*

L'énoncé suivant généralise une partie de [KKMS, Theorem 9].

THÉORÈME

(i) *Les applications* $\mathscr{I} \to \operatorname{ord} \mathscr{I}$ *et* $\Phi \to \mathscr{I}_\Phi$ *définissent des bijections décroissantes réciproques entre idéaux invariants, intégralement clos, et coques.*

(ii) *On a*: $\operatorname{ord}(\mathscr{I}\mathscr{J}) = \operatorname{ord}\mathscr{I} + \operatorname{ord}\mathscr{J}$ *quels que soient les idéaux invariants* $\mathscr{I}$ *et* $\mathscr{J}$.

(iii) *Un idéal invariant intégralement clos* $\mathscr{I}$ *est inversible si et seulement si* $\operatorname{ord}\mathscr{I}$ *est la restriction à* $\mathscr{V}(X)$ *d'une application linéaire, nulle sur* $\mathscr{F}(X)$.

Démonstration. (i) est conséquence immédiate du théorème 2.3, et (ii) résulte du fait que $(\operatorname{ord}\mathscr{I})(v) = \min_{f \in \Gamma(X_0, \mathscr{I})} v(f)$ pout tout $v \in \mathscr{V}(X)$.

(iii) Soit $\mathscr{I}$ un idéal invariant inversible. D'après [B1, Proposition 2.1], la restriction de $\mathscr{I}$ à X_0 est triviale. Par suite, il existe $\Phi \in K^{(B)}$ telle que $\Gamma(X_0, \mathscr{I}) = \Phi A$. Puisque la restriction de $\mathscr{I}$ à $G \cdot x$ est aussi triviale, on a: $v_D(\Phi) \geq 0$ pour tout $D \in \mathscr{F}(X)$. En remplaçant $\mathscr{I}$ par son inverse, on en déduit que Φ est nulle sur $\mathscr{F}(X)$. De plus, $D(\mathscr{I})$ est égal à $\Phi + D(\mathcal{O}_X)$, d'où $\operatorname{ord}\mathscr{I} = \Phi$ d'après la proposition 2.2.

Réciproquement, soit Φ un élément de Λ, nul sur $\mathscr{F}(X)$. Alors $D(\mathscr{I}_\Phi)$ est égal à $\Phi + D(\mathcal{O}_X)$, d'où $\Gamma(X_0, \mathscr{I}_\Phi)^{(B)} = \Phi A^{(B)}$ puis $\Gamma(X_0, \mathscr{I}_\Phi) = \Phi A$. Par suite, la restriction de $\mathscr{I}_\Phi$ à X_0 est inversible, d'où l'assertion.

Remarque. On munit l'ensemble des idéaux intégralement clos, du produit défini par $\mathscr{I} * \mathscr{J} = \overline{\mathscr{I}\mathscr{J}}$. Si de plus $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ sont invariants, alors $\operatorname{ord}(\mathscr{I} * \mathscr{J}) = \operatorname{ord}\mathscr{I} + \operatorname{ord}\mathscr{J}$. Dans cette définition du produit, il est nécessaire de prendre la clôture intégrale; en effet, il arrive que le carré d'un idéal invariant intégralement clos, ne soit pas intégralement clos (voir [DEP, §8, Example 2]).

Question. Soient X une variété sphérique affine, et I l'idéal de l'orbite fermée de G dans X. Est-ce que I^n est intégralement clos pour tout entier $n \geq 1$?

3. Morphismes birationnels entre variétés sphériques

3.1. *Eclatement normalisé*

Il y a des liens étroits entre idéaux intégralement clos, et morphismes birationnels. En effet, soient Z une variété normale, et $\mathscr{I} \subset k(Z)$ un faisceau cohérent d'idéaux. Alors les conditions suivantes sont équivalentes [Li, §§5 et 6]:

(i) $\mathscr{I}$ est intégralement clos.

(ii) Pour toute variété Z', et tout morphisme birationnel propre $\pi : Z' \to Z$, on a: $\mathscr{I} = \pi_*(\mathscr{I}\mathcal{O}_{Z'})$.

(iii) Il existe une variété normale Z', et un morphisme birationnel propre $\pi : Z' \to Z$, tels que $\mathscr{I}\mathcal{O}_{Z'}$ soit inversible, et que $\mathscr{I} = \pi_*(\mathscr{I}\mathcal{O}_{Z'})$.

Sous ces hypothèses, il y a une variété minimale vérifiant (iii): c'est l'*éclatement normalisé* de $\mathscr{I}$ dans Z, défini par $Z' = \mathbf{Proj}\,(\oplus_{n=0}^{\infty} \overline{\mathscr{I}^n})$. Tout morphisme birationnel projectif $\pi : Z' \to Z$, où Z et Z' sont normales, est l'éclatement normalisé d'un faisceau cohérent d'idéaux $\mathscr{I} \subset k(Z)$. Lorsqu'un groupe algébrique affine Γ opère dans Z et Z', et que π est Γ-équivariant, on peut prendre $\mathscr{I}$ stable par Γ.

Revenons au cas d'une variété sphérique simple X; nous allons décrire l'éclatement normalisé $\pi : X' \to X$ d'un idéal invariant $\mathscr{I}$, en termes de $\operatorname{ord} \mathscr{I}$. Posons $x' := \pi^{-1}(x)$; alors (X', x') est un plongement de G/H, donc il est recouvert par la famille (X_α, x_α) de ses sous-plongements simples (voir [Kn, Corollary 2.2]). Pour chaque α, on note $\mathscr{F}(X_\alpha)$, $\mathscr{V}(X_\alpha)$ comme en 2.1(i). Puisque π est propre, la famille des $\mathscr{V}(X_\alpha)$ est une subdivision du cône $\mathscr{V}(X)$, d'après [loc. cit, Theorem 4.2]. De la définition de l'éclatement normalisé, et du théorème 2.4(ii), suit la

PROPOSITION. *Avec les notations précédentes, la famille* $(\mathscr{V}(X_\alpha))$ *est la plus grande subdivision de* $\mathscr{V}(X)$ *telle que* $\operatorname{ord} \mathscr{I}$ *soit linéaire sur chaque* $\mathscr{V}(X_\alpha)$. *Si* f_α *est une application linéaire telle que* $f_\alpha \mid \mathscr{V}(X_\alpha) = \operatorname{ord} \mathscr{I} \mid \mathscr{V}(X_\alpha)$, *alors* $\mathscr{F}(X_\alpha)$ *est l'ensemble des* $D \in \mathscr{F}(X)$ *telles que* $v_D(f_\alpha) = 0$.

Remarque. Si le plongement (X, x) est sans couleur (i.e. $\mathscr{F}(X)$ est vide) et si $\mathscr{I}$ n'est pas inversible, alors son éclatement normalisé n'est pas un plongement simple. Par contre, lorsque $\mathscr{F}(X)$ n'est pas vide, choisissons $\Phi \in \Lambda$ telle que $v(\Phi) \geq 0$ pour tout $v \in \mathscr{V}(X)$, et que $v_D(\Phi) > 0$ pour tout $D \in \mathscr{F}(X)$. Alors l'éclatement normalisé de $\mathscr{I}_\Phi$ est le plongement simple (X', x') tel que $\mathscr{F}(X') = \varnothing$ et que $\mathscr{V}(X') = \mathscr{V}(X)$. On reviendra là-dessus en 3.3.

3.2. *Un théorème d'annulation*

Soit $\pi : (X', x') \to (X, x)$ un morphisme propre de plongements de G/H. Soit Φ une coque sur $\mathscr{V}(X) = \mathscr{V}(X')$. Soit $\mathscr{I}_\Phi$ (resp. $\mathscr{I}'_\Phi$) l'idéal invariant de X (resp. X') défini en 2.3; alors $\mathscr{I}'_\Phi$ est la clôture intégrale de $\mathscr{I}_\Phi \mathcal{O}_{X'}$.

THÉORÈME. *Avec les notations précédentes, on a:* $\pi_* \mathscr{I}'_\Phi = \mathscr{I}_\Phi$ *et* $R^i \pi_* \mathscr{I}'_\Phi = 0$ *pour tout* $i \geq 1$.

Démonstration. Comme dans la preuve du théorème 2.3, considérons la $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée $\oplus_{n=0}^{\infty} \overline{\mathscr{I}^n} = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{I}_{n\Phi}$, et son spectre $\tilde{X}$ avec le morphisme canonique

$\varphi : \tilde{X} \to X$. Définissons de même $\varphi' : \tilde{X}' \to X'$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}' & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \tilde{X} \\ {\scriptstyle \varphi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ X' & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

où le morphisme $\tilde{\pi}$ est dual de l'inclusion

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \overline{\mathscr{I}^n} \subset \bigoplus_{n=0}^{\infty} \overline{\mathscr{I}^n \mathcal{O}_{X'}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{I}'_{n\Phi}.$$

Par suite, $\tilde{\pi}$ se factorise en un morphisme fini $\tilde{X}' \to X' \times_X \tilde{X}$, suivi du morphisme canonique $X' \times_X \tilde{X} \to \tilde{X}$. Puisque π est propre, $\tilde{\pi}$ l'est aussi. D'autre part, $\tilde{X}$ et $\tilde{X}'$ sont des plongements de $(G \times k^*)/(H \times \{1\})$, et $\tilde{\pi}$ est un morphisme de plongements (car les restrictions de $\mathscr{I}_\Phi$ et de $\mathscr{I}'_\Phi$ à G/H sont triviales). En particulier, $\tilde{\pi}$ est birationnel. D'où $\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}'} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ d'après le théorème principal de Zariski. De plus, $R^i \tilde{\pi}_* \mathcal{O}_{\tilde{X}'} = 0$ pour tout $i \geq 1$ car les singularités de $\tilde{X}$ et de $\tilde{X}'$ sont rationnelles (voir [B1, 1.2 Corollaire 1] et ses références). D'où

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{I}_{n\Phi} = \varphi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = \varphi_* \tilde{\pi}_* \mathcal{O}_{X'} = \pi_* \varphi'_* \mathcal{O}_{\tilde{X}'} = \pi_* \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{I}'_{n\Phi} \right)$$

et en particulier $\mathscr{I}_\Phi = \pi_* \mathscr{I}'_\Phi$. Puisque φ et φ' sont affines, on obtient de même: $R^i \pi_* (\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{I}'_{n\Phi}) = 0$ pour tout $i \geq 1$.

Remarque. Dans le cas des variétés toriques, le résultat ci-dessus est dû à G. Kempf (voir [KKMS, I.3 Corollary 1]), qui le déduit d'une description des groupes de cohomologie des idéaux invariants, en termes combinatoires. Il en déduit aussi que $H^i(X, \mathscr{I}) = 0$ pour tout $i \geq 1$ lorsque X est une variété torique complète, et $\mathscr{I}$ est engendré par ses sections globales [loc. cit, Corollary 2]. Ce théorème d'annulation est encore vrai dans les variétés sphériques (voir [B2, Théorème 2.3]); mais c'est un problème ouvert de déterminer la cohomologie des idéaux invariants d'une variété sphérique complète.

3.3. *Factorisation de morphismes birationnels*

Soient (X, x) et (X', x') deux plongements de l'espace homogène sphérique G/H. Nous allons étudier les morphismes de plongements $\pi : (X', x') \to (X, x)$. Supposons d'abord que X est sans couleur; alors il en est de même de X'. Soit P le sous-groupe

parabolique de G, formé des $s \in G$ tels que $s \cdot B \cdot x = B \cdot x$. Rappelons qu'il existe un sous-groupe de Levi L de P, et une sous-variété Z de X, tels que: Z est stable par L, et contient x; le sous-groupe dérivé (L, L) de L opère trivialement dans Z, et l'application naturelle de $P^u \times Z$ vers X est une immersion ouverte. De plus, Z recontre toute orbite de G dans X, suivant une unique orbite de L (voir [BP, Proposition 3.4]). Posons $Z' := \pi^{-1}(Z)$ et $C := L/(L, L)$. Alors (Z, x) et (Z', x') sont des plongements du tore $C/C \cap H$; de plus, π est uniquement déterminé par sa restriction à Z', que est un morphisme birationnel équivariant entre variétés toriques. Bien que de tels morphismes aient été beaucoup étudiés, nous n'en avons qu'une connaissance incomplète (voir [O, 1.7] et ses références). Appelons dans ce cas X, X' des *variétés toroïdales*, et π un *morphisme toroïdal.*

Lorsque (X, x) est un plongement quelconque de G/H, il existe un unique plongement toroïdal $(\tilde{X}, \tilde{x})$ muni d'un morphisme propre de plongements p vers X, et minimal pour cette propriété. Si (X_α, x_α) es la famille des sous-plongements simples de (X, x), alors $(\tilde{X}, \tilde{x})$ a comme sous-plongements simples les $(\tilde{X}_\alpha, \tilde{x}_\alpha)$ tels que $\mathscr{F}(\tilde{X}_\alpha) = \varnothing$ et que $\mathscr{V}(\tilde{X}_\alpha) = \mathscr{V}(X_\alpha)$. Appelons $\tilde{X}$ la *décoloration* de X.

PROPOSITION. *Soit $\pi : (X', x') \to (X, x)$ un morphisme de plongements. Il existe un unique morphisme toroïdal $\tilde{\pi}$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}' \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "p'"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ X' \arrow[r, "\pi"] & X \end{tikzcd}$$

commute, où p, p' sont les décolorations de X, X'. De plus, si π est propre, alors $\tilde{\pi}$ l'est aussi.

Démonstration. On peut supposer X simple. Soit (X'_α) la famille des sous-plongements simples de X'. Alors la famille des $\mathscr{V}(X'_\alpha)$ est une subdivision d'un sous-cône de $\mathscr{V}(X)$, et π est propre si et seulement si $\bigcup_\alpha \mathscr{V}(X'_\alpha) = \mathscr{V}(X)$. L'énoncé en résulte aussitôt.

Nous sommes conduits à étudier la décoloration d'un plongement (X, x), que nous supposerons simple. Faisons de plus l'hypothèse suivante:

(*) Tout diviseur de Weil de X est un diviseur de Cartier.

D'après [B1, 2.2 Remarque (ii)], cela se traduit par:

(**) $\mathscr{B}(X) \cup \mathscr{F}(X)$ est une partie d'une base de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, \mathbf{Z})$

avec les notations de 2.1(i). Pour tout $D \in \mathscr{F}(X)$, il existe alors $f_D \in \Lambda$ tel que $v_D(f_D) = 1$ et que $v(f_D) = 0$ pour tout $v \in \mathscr{B}(X) \cup \mathscr{F}(X)$, $v \neq v_D$. Soit $\mathscr{I}_D$ l'idéal invariant intégralement clos tel que $\mathrm{ord}\, \mathscr{I}_D = f_D$ (voir le théorème 2.3).

THÉORÈME. *Sous l'hypothèse* (*), *la décoloration de* X *est le composé* (*dans un ordre arbitraire*) *des éclatements normalisés des* $\mathscr{I}_D$ *pour* $D \in \mathscr{F}(X)$. *De plus, quel que soit* $D \in \mathscr{F}(X)$, *l'idéal* $\mathscr{I}_D$ *est la clôture intégrale de* $\Sigma_{g \in G}\, g \cdot \mathcal{O}_X(-D)$.

Autrement dit, pour supprimer les couleurs, on éclate l'intersection schématique de leurs translatés.

Démonstration. La première assertion est conséquence immédiate de la proposition 3.1. D'après le théorème 2.3, pour prouver la seconde assertion, il suffit de montrer que $\operatorname{ord} \mathscr{I}_D = f_D$, où on pose $\mathscr{I}_D = \Sigma_{g \in G}\, g \cdot \mathcal{O}_X(-D)$. Soit $v \in \mathscr{V}(X)$; alors $(\operatorname{ord} \mathscr{I}_D)(v) = \min v(f)$, où f décrit l'idéal J_D associé à $\mathscr{I}_D$ dans $\mathcal{O}_{X,Y}$. Mais puisque v est G-invariante et que $J_D = \Sigma_{g \in D}\, \mathcal{O}_{X,Y}(-g \cdot D)$, on a:

$$(\operatorname{ord} \mathscr{I}_D)(v) = \min_{f \in \mathcal{O}_{X,Y}(-D)} v(f).$$

On en déduit comme dans la preuve de la proposition 2.2, que $(\operatorname{ord} \mathscr{I}_D)(v) = \min v(f)$ où f décrit l'ensemble des fonctions régulières sur X_0, nulles sur D, et vecteurs propres de B. Mais d'après (**), un tel f s'écrit sous la forme $f_D \varphi$, avec $v(\varphi) \geq 0$; d'où l'assertion.

Remarque. Dans certains cas, l'idéal $\Sigma_{g \in G}\, g \cdot \mathcal{O}_X(-D)$ est premier, pour tout $D \in \mathscr{F}(X)$; de plus, on peut ordonner $\mathscr{F}(X) = \{D_1, \ldots, D_n\}$ de façon que l'éclatement du produit $\mathscr{I}_{D_1} \cdots \mathscr{I}_{D_p}$ soit normal pour $1 \leq p \leq n$. Alors la décoloration de X se factorise en éclatements successifs de sous-variétés irréductibles G-stables. Nous allons voir un exemple classique d'une telle situation: la construction de "collinéations complètes" (ou de "formes bilinéaires complètes"; voir [TK] et ses références).

3.4. *Exemple*

Comme dans l'exemple 1.4(a), considérons $G := \mathrm{GL}_m(k) \times \mathrm{GL}_n(k)$ opérant dans $X := \operatorname{Hom}_k(k^m, k^n)$ où m, n sont des entiers tels que $1 \leq n \leq m$. Puisque X est lisse, la condition (*) ci-dessus est bien vérifiée. Pour $0 \leq p \leq n$, notons X_p la sous-variété de X formée des matrices de rang au plus p, et D_p la couleur associée au poids $\varphi_p + \psi_p$ (avec les notations de 1.4). Alors l'idéal

$$I_p := \sum_{g \in G} g \cdot \mathcal{O}_X(-D_p)$$

est engendré par le sous-G-module simple de $k[X]$, dual de $\operatorname{Hom}_k(\wedge^p k^m, \wedge^p k^n)$; par suite, I_p est l'idéal de X_{p-1}.

Pour $1 \leq q \leq p \leq n$, définissons des variétés $X_p^{(q)}$ par:

$X_p^{(0)} = X_p$.
$X_n^{(q+1)}$ est l'éclatement de $X_q^{(q)}$ dans $X_n^{(q)}$.
$X_p^{(q+1)}$ est la transformée stricte de $X_p^{(q)}$ dans cet éclatement.

Montrons, par récurrence sur q, que

(i) $X_n^{(q)}$ est lisse pour $0 \leq q \leq n$.
(ii) $X_p^{(q)}$ est normale pour $0 \leq q \leq p$.
(iii) $X_p^{(p)}$ est lisse pour $0 \leq p \leq n$, et c'est la décoloration de X_p.

Pour $q = 0$, on a: $X_n^{(0)} = X$, et $X_0^{(0)} = \{0\}$. De plus, $X_p^{(0)} = X_p$ est une sous-variété irréductible G-stable de X; elle est donc normale d'après [BP, Proposition 3.5]. Si les énoncés (i), (ii), (iii) sont vrais pour q éclatements, alors $X_n^{(q+1)}$ est lisse, comme éclatement de la sous-variété lisse $X_q^{(q)}$ dans la variété lisse $X_n^{(q)}$. Comme ci-dessus, on en déduit que $X_p^{(q+1)}$ est normale pour $p \geq q+1$. On vérifie sans peine que $X_{q+1}^{(q+1)}$ s'obtient en éclatant les intersections des translatés des couleurs de X_{q+1}; c'est donc la décoloration de X_{q+1}. Il reste à montrer que pour $0 \leq p \leq n$, la décoloration $\tilde{X}_p$ de X_p est lisse.

Soit $x_p := \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in X$, où 1_p est la matrice unité $p \times p$. Notons H_p le groupe d'isotropie de x_p dans G. Avec des notations évidentes, on vérifie comme en 1.4 que $D(A_p)$ (resp. Σ_p) est engendré librement par $\varphi_1 + \psi_1, \ldots, \psi_p + \psi_p$ (resp. $-\alpha_1 - \beta_1, \ldots, -\alpha_{p-1} - \beta_{p-1}$). Par suite, le cône dual de $\mathscr{V}(X_p)$ est engendré par $\varphi_1 + \psi_1, -\alpha_1 - \beta_1, \ldots, -\alpha_{p-1} - \beta_{p-1}$ qui forment une base de Λ_p. Donc $\mathscr{V}(X_p)$ est engendré par une base de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda_p, \mathbf{Z})$. Grâce à la structure locale de $\tilde{X}_p$ rappelée en 3.3 et au critère de lissité pour les plongements toriques, on conclut que $\tilde{X}_p$ est lisse.

Remarques. (1) On peut montrer que l'éclatement de I_p dans X_p est lisse pour $1 \leq p \leq n$; en fait, c'est la résolution des singularités de X_p introduite par G. Kempf (voir [K, Proposition 2]).

(2) On construit de façon analogue les "formes bilinéaries symétriques (ou antisymétriques) complètes".

4. Caractérisation des variétés sphériques lisses

4.1. *Multiplicité d'un idéal invariant*

Soit A un anneau local noethérien excellent; notons d sa dimension et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Soit I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de A. Les fonctions $H(n) := \lg(A/I^n)$ et

$\bar{H}(n) := \lg(A/\overline{I^n})$ sont des polynômes pour n assez grand, avec le même terme dominant $en^d/d!$. Le nombre e est un entier positif, appelé la *multiplicité* de I (voir [M] et ses références).

Soient X une variété algébrique et $\mathscr{I}$ un faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_X$, définissant un sous-schéma fermé S de X. Supposons pour simplifier que le support Y de $\mathcal{O}_X/\mathscr{I}$ est irréductible. On peut alors définir la *multiplicité e de $\mathscr{I}$, ou de X le long de S*, comme la multiplicité dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,Y}$ de l'idéal associé à $\mathscr{I}$ (voir [F, Example 4.3.4]).

Lorsque X est une G-variété sphérique, et $\mathscr{I}$ un idéal invariant, nous allons exprimer la multiplicité de $\mathscr{I}$ en fonction de son ordre. On suppose pour simplifier que X est simple et que l'orbite fermée Y de G dans X, est le support de $\mathcal{O}_X/\mathscr{I}$; on utilise les notations de la seconde partie. Posons $\Lambda_{\mathbf{R}} := \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. Notons $D_{\mathbf{R}}(\mathscr{I})$ l'ensemble des $f \in \Lambda_{\mathbf{R}}$ telles que $f \geq 0$ sur $\mathscr{F}(X)$ et que $f \geq \operatorname{ord} \mathscr{I}$ sur $\mathscr{V}(X)$; alors $D_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_X)$ est le cône dual de $\mathscr{C}(X)$, et $D_{\mathbf{R}}(\mathscr{I})$ est un polytope convexe rationnel dans $D_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_X)$. Soit $\pi : \Lambda_{\mathbf{R}} \to E$ le quotient par le sous-espace orthogonal à $\mathscr{C}(X)$. Notons $\mathscr{C}(\mathscr{I})$ l'adhérence de $\pi(D_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_X) \backslash D_{\mathbf{R}}(\mathscr{I}))$. C'est une réunion finie de polytopes convexes, rationnels par rapport au réseau $\pi(\Lambda_{\mathbf{R}})$.

Avec les notations de 2.1(iii), toute $f \in D(\mathcal{O}_X)$ s'identifie à un vecteur propre de $B \cap L$ dans $k[Z]$, donc f engendre un L-module simple $\langle L \cdot f \rangle$ dont on note $\dim(f)$ la dimension. D'après la formule de Weyl, l'application dim se prolonge en une fonction polynomiale sur $\Lambda_{\mathbf{R}}$, notée encore dim. Puisque tout élément de $D(\mathcal{O}_X)$ orthogonal à $\mathscr{C}(X)$ est vecteur propre de L, la fonction dim est invariante par translations par l'orthogonal de $\mathscr{C}(X)$. Donc elle se factorise par une fonction polynomiale, toujours notée dim, sur E.

On note $I_{X,Y}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{X,Y}$ associé à $\mathscr{I}$. Pour tout entier $n \geq 0$, on note $\bar{H}(n)$ la longueur du $\mathcal{O}_{X,Y}$-module $\mathcal{O}_{X,Y}/\overline{I^n_{X,Y}}$.

THÉORÈME. *Avec les notations précédentes, on a*: $\bar{H}(n) = \Sigma \dim(f)$ *où la somme porte sur les* $f \in n\mathscr{C}(\mathscr{I}) \cap \pi(\Lambda)$.

Démonstration. On pose $A = k[X_0]$ et $I = \Gamma(X_0, \mathscr{I})$. Puisque le support de A/I est $X_0 \cap Y$, le A-module $A/\overline{I^n}$ admet une filtration dont tous les sous-quotients sont annulés par l'idéal de $X_0 \cap Y$; le rang (sur $k[X_0 \cap Y]$) du gradué associé à une telle filtration est égal à $\bar{H}(n)$. De plus, l'isomorphisme de A sur $k[P^u] \otimes k[Z]$ envoie I sur $k[P^u] \otimes J$, où J est un idéal L-invariant de $k[Z]$, et envoie $\overline{I^n}$ sur $k[P^u] \otimes \overline{J^n}$. On peut donc remplacer X par Z (cela ne change pas ord $\mathscr{I}$, $D_{\mathbf{R}}(\mathscr{I})$, etc). Alors $\bar{H}(n)$ est le rang (sur $k[Z \cap Y]$) du gradué associé à toute filtration de $k[Z]/\Gamma(Z, \overline{\mathscr{I}^n})$ avec sous-quotients annulés par l'idéal de $Z \cap Y$. Or $k[Z \cap Y] = \oplus kf$ où la somme porte sur les $f \in \Lambda$ qui sont nulles sur $\mathscr{C}(X)$. De plus

$$k[Z] = \bigoplus_{f \in D(\mathcal{O}_X)} \langle L \cdot f \rangle \quad \text{et} \quad \Gamma(Z, \overline{I^n}) = \bigoplus_{f \in D(\overline{\mathscr{I}^n})} \langle L \cdot f \rangle = \bigoplus_{f \in nD(\mathscr{I})} \langle L \cdot f \rangle.$$

L'énoncé s'en déduit aussitôt.

COROLLAIRE. *L'ensemble $\mathscr{C}(\mathscr{I})$ est borné, et la multiplicité de $\mathscr{I}$ est égale à*

$$d! \int_{\mathscr{C}(\mathscr{I})} \varphi(p)\, dp$$

où d est la codimension de Y dans X, φ est le terme de plus haut degré de la fonction polynomiale dim, *et dp est la mesure de Lebesgue sur E, normalisée de façon que la maille du réseau $\pi(\Lambda)$ soit de volume* 1.

Démonstration. La première assertion résulte du fait que $\bar{H}(n)$ est finie pour tout entier $n \geq 0$. Pour la seconde assertion, on remarque que

$$\bar{H}(n) = \sum_{f \in n\mathscr{C}(\mathscr{I}) \cap \pi(\Lambda)} \dim(f)$$

est équivalente quand $n \to \infty$ à

$$\sum_{f \in n\mathscr{C}(\mathscr{I}) \cap \pi(\Lambda)} \varphi(f) = n^{\deg(\varphi)} \sum_{f \in \mathscr{C}(\mathscr{I}) \cap n^{-1}\pi(\Lambda)} \varphi(f)$$

et que la dernière somme est le produit de $n^{\dim(E)}$ par une "somme de Riemann" pour $\int_{\mathscr{C}(\mathscr{I})} \varphi(p)\, dp$.

PROPOSITION. *L'application $\bar{H}$ est la restriction aux entiers naturels d'une fonction polynomiale.*

Démonstration (analogue à [KKMS, 1.3 Corollary 3]; voir aussi [M]). Comme dans la preuve du théorème ci-dessus, on peut supposer que X est affine. Soient $\pi : X' \to X$ l'éclatement normalisé de $\mathscr{I}$, et $\mathscr{L} := \mathscr{I}\mathscr{O}_{X'}$. Notons Y' le sous-schéma fermé de X' défini par $\mathscr{L}$, et $\iota : Y' \to X'$ l'inclusion, avec $\mathscr{L}' := \mathscr{L} \mid Y'$. On a une suite exacte

$$0 \to \mathscr{L}^{n+1} \to \mathscr{L}^n \to \iota_* \mathscr{L}'^n \to 0.$$

De plus, $\pi_* \mathscr{L}^n = \overline{\mathscr{I}^n}$, et $R^i\pi_* \mathscr{L}^n = 0$ pour tout $i \geq 1$ d'après [B2, Théorème 1.1]; en effet, $\mathscr{L}^n$ est engendré par ses sections globales. On en déduit que $R^i\pi_*(\iota_* \mathscr{L}'^n) = 0$ pour tout $i \geq 1$, et que la suite

$$0 \to \overline{I^{n+1}} \to \overline{I^n} \to \pi_* \iota_* \mathscr{L}'^n \to 0$$

est exacte. Puisque X est affine, on a une suite exacte

$$0 \to \Gamma(X, \overline{\mathscr{I}^{n+1}}) \to \Gamma(X, \overline{\mathscr{I}^{n}}) \to \Gamma(Y', \mathscr{L}'^{n}) \to 0;$$

de plus, $H^i(Y', \mathscr{L}'^n) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Puisque $\mathscr{L}'$ est un fibré en droites sur Y', on déduit de [F, Example 18.3.6] que l'application $n \to \chi(Y', \mathscr{L}'^n)$ est la restriction aux entiers naturels d'une fonction polynomiale; il en est donc de même de l'application $n \to \dim \Gamma(X, \overline{\mathscr{I}^n})/\Gamma(X, \overline{\mathscr{I}^{n+1}}) = \bar{H}(n+1) - \bar{H}(n)$.

Exemple. Soient (X, x) un plongement projectif de G/H, et δ un diviseur de Cartier ample sur X. D'après [B1, Proposition 3.3], on peut associer à δ un caractère $\chi(\delta)$ de B, et un polyèdre convexe rationnel $\mathscr{C}(X, \delta)$ dans $\Lambda_{\mathbf{R}}$, tels que l'ensemble des poids de $\Gamma(X, n\delta)^{(B)}$ s'identifie à $n\chi(\delta) + (n\mathscr{C}(X, \delta) \cap \Lambda)$ pour tout entier $n \geq 0$. Notons A l'algèbre graduée $\oplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(X, n\delta)$. Le groupe $\tilde{G} := G \times k^*$ opère dans A par automorphismes, et A est un $\tilde{G}$-module sans multiplicité. Par suite, $\tilde{X} := \operatorname{Spec}(A)$ est une $\tilde{G}$-variété sphérique affine, avec un point fixe noté 0. Soit I l'idéal de 0 dans $\tilde{X}$, i.e. l'idéal maximal homogène de A. La multiplicité de I n'est autre que le degré $\deg(\delta)$ du diviseur δ. En outre, il est immédiat que

$$\mathscr{C}(\mathscr{I}) = \{(\lambda, t) \in \Lambda_{\mathbf{R}} \times \mathbf{R} \mid \lambda \in t(\chi(\delta) + \mathscr{C}(X, \delta)), 0 < t \leq 1\} \cup \{0, 0\}.$$

Les données de $\mathscr{C}(\mathscr{I})$ et de $\mathscr{C}(X, \delta)$ sont donc équivalentes, et le corollaire ci-dessus permet de retrouver l'expression intégrale de $\deg(\delta)$ (voir [B1, Théorème 4.1]).

4.2. *Un critère de lissité*

On désigne toujours par X une variété sphérique simple, d'orbite fermée Y. Nous allons donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que Y soit formée de points lisses de X. Soit $\mathscr{I}$ le faisceau d'idéaux de Y dans X; déterminons d'abord le D-idéal et l'ordre de $\mathscr{I}$, introduits en 2.2.

Avec les notations de 2.1 et 2.2, le D-idéal de $\mathscr{I}$ est l'ensemble des $f \in \Lambda$ telles que $f \in D(\mathcal{O}_X)$ et que f ne soit pas inversible dans $D(\mathcal{O}_X)$; autrement dit, on a:

$$D(\mathscr{I}) = \{f \in \Lambda \mid f \geq 0 \text{ sur } \mathscr{C}(X) \text{ et } f \mid \mathscr{C}(X) \neq 0\}.$$

Soit $\{f_1, \ldots, f_n\}$ l'unique système générateur minimal du quotient du monoïde $D(\mathcal{O}_X)$ par le groupe de ses éléments inversibles. Alors pour tout $v \in \mathscr{V}(X)$, l'expression $v(f_i)$ a un sens, on l'on a:

$$(\operatorname{ord} \mathscr{I})(v) = \min_{1 \leq i \leq n} v(f_i).$$

Comme en 4.1, posons $\Lambda_{\mathbf{R}} := \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ et notons $D_{\mathbf{R}}(\mathscr{I})$ l'ensemble des $f \in \Lambda_{\mathbf{R}}$ telles que $f \geq 0$ sur $\mathscr{F}(X)$ et que $f \geq \operatorname{ord} \mathscr{I}$ sur $\mathscr{V}(X)$. Notons enfin $\mathscr{C}(\mathscr{I}) = \mathscr{C}$ l'adhérence de l'image de $D_{\mathbf{R}}(\mathscr{O}_X) \backslash D_{\mathbf{R}}(\mathscr{I})$ dans le quotient $\pi : \Lambda_{\mathbf{R}} \to E$ par l'orthogonal de $\mathscr{C}(X)$. Alors $\mathscr{C}$ est formé des $f \in E$ telles que $f \geq 0$ sur $\mathscr{C}(X)$ et qu'il existe $v \in \mathscr{V}(X)$ avec $v(f) \leq v(f_i)$ por $1 \leq i \leq n$. Soient φ la fonction polynomiale, et dp la mesure de Lebesgue sur E, définies dans le corollaire 4.1; notons d la codimension de Y dans X.

THÉORÈME. *Avec les notations précédentes, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *L'orbite Y est formée de points lisses de X.*

(ii) *Le cône $\mathscr{C}(X)$ est engendré par une partie d'une base de* $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, \mathbf{Z})$. *De plus, $\mathscr{C}$ est un simplexe, de volume $1/d!$ pour la forme $\varphi(p)\, dp$.*

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i). D'après le corollaire 4.1, la multiplicité de X le long de Y est égale à 1. On conclut grâce à [F, Example 4.3.5].

(i) $\Rightarrow$ (ii). Grâce à la structure de la carte X_0 (voir 2.1(iii)) et à [Lu, Corollaire 2], on se ramène au cas où X est affine, et où Y est réduite à un point noté 0. Puisque G opère dans X avec une orbite ouverte et un point fixe lisse, X est G-isomorphe à un G-module rationnel V d'après [loc. cit.]; le point 0 est l'origine de V.

Comme B opère dans V avec une orbite ouverte Ω, le monoïde $D(k[V])$ est engendré librement par les équations des composantes irréductibles de $V \backslash \Omega$. Par suite, le cône $D_{\mathbf{R}}(k[V])$ est engendré par une base de Λ, d'où la première assertion. De plus, $\mathscr{C}$ est convexe; en effet, si δ désigne la section hyperplane de l'espace projectif $\mathbf{P}(V)$, l'ensemble $\mathscr{C}$ s'identifie à un cône tronqué sur $\mathscr{C}(\mathbf{P}(V), \delta)$ (avec les notations de l'exemple 4.1). Puisque $D_{\mathbf{R}}(k[V]) \backslash \mathscr{C} = D_{\mathbf{R}}(\mathscr{I})$ est aussi convexe, on en déduit que $\mathscr{C}$ est un simplexe. L'assertion sur le volume de $\mathscr{C}$ résulte du corollaire 4.1.

Remarques. (1) Renvoyons à [B1, 4.2] pour la détermination de la fonction φ, et le calcul de son intégrale sur un simplexe quelconque.

(2) L'énoncé précédent généralise un critère de lissité classique pour les variétés toriques (voir [O, Theorem 1.10] et ses références). En effet, prenons pour G un tore T, et pour X un plongement affine de T, avec un point fixe. Alors $\mathscr{F}(X)$ est vide, et $\mathscr{C}(X)$ est le cône dual du monoïde formé des poids de T dans $k[X]$. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ le système générateur minimal de ce monoïde. Alors $\mathscr{C}$ est le complémentaire dans $\mathscr{C}(X)^{\vee}$ de l'enveloppe convexe de $\bigcup_{i=1}^{n} f_i + \mathscr{C}(X)^{\vee}$; de plus, $\varphi = 1$. Si $\mathscr{C}(X)$ est engendré par une (partie d'une) base de $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, \mathbf{Z})$, alors $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de Λ. Donc $n = d$ et $\mathscr{C}$ est le simplexe standard; il est bien connu que son volume est $1/d!$. On conclut que X est lisse si et seulement si le cône $\mathscr{C}(X)$ est engendré par une partie d'une base de $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, \mathbf{Z})$.

(3) Nous vernons de voir que lorsque G est un tore, la première condition de l'énoncé (ii) du théorème implique les deux autres. Ceci n'est pas vrai en général. En effet, soient V un G-module simple, v un vecteur propre de B dans V, et $X := \overline{G \cdot v}$. Alors la variété affine X est sphérique d'après [Kr, III.3.5], et le monoïde $D(k[X])$ est engendré librement par le plus grand poids λ de V^*. Par suite, le cône $\mathscr{C}(X)$ est une demi-droite, et $\mathscr{C}$ est l'intervalle $[0, \lambda]$. Or X n'est jamais lisse, sauf si G opère transitivement dans $V \backslash \{0\}$ (voir [loc. cit]).

4.3. *Exemple: lissité de certaines compactifications des groupes*

Dans cette section, G est un groupe simple adjoint; on le considère comme espace homogène sous $G \times G$ opérant par multiplication à gauche et à droite. La théorie des plongements de G est un cas particulier de celle des plongements d'espaces symétriques (voir [V]), ce que permet de décrire les objets introduits en 2.1.

Soient T un tore maximal de G, et R le système de racines de (G, T). Alors Λ est le réseau des racines de R, donc $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, \mathbf{Z})$ est le réseau des poids de $\check{R}$. De plus, $\mathscr{V}$ s'identifie aux points rationnels d'une chambre de R, qu'on prend comme chambre positive. Enfin, l'application $\rho : \mathscr{D} \to \mathscr{Q}$ est injective, et son image est formée des opposées des coracines simples (voir [loc. cit, Propositions 1 et 2]).

Le plongement simple (X, x) de G, tel que $\mathscr{F}(X) = \varnothing$ et que $\mathscr{V}(X) = \mathscr{V}$, est lisse (et possède bien d'autres propriétés remarquables; voir [DP], [V]). Soit α une racine simple. Si le rang de G est au moins deux, il existe un plongement simple X_α de G tel que $\mathscr{F}(X_\alpha) = \{-\check{\alpha}\}$ et que $\mathscr{V}(X_\alpha) = \mathscr{V}$. De plus, X_α est projectif.

PROPOSITION. *Avec les notations précédentes, la variéte X_α est lisse si et seulement si α est une racine longue, à une extrémité du diagramme de Dynkin de R.*

Démonstration. Ordonnons les racines simples de façon que $\alpha = \alpha_1$. Le cône $\mathscr{C}(X_\alpha)$ est engendré par $-\alpha_1, \pi_1, \ldots, \pi_l$, où on note $\pi_1, \ldots, \pi_l$ les poids fondamentaux. De plus, on a:

$$-\alpha_1 = -2\pi_1 - \sum_{i=2}^{l} \langle \alpha_1, \check{\alpha}_i \rangle \pi_i$$

avec $-\langle \alpha_1, \check{\alpha}_i \rangle \geq 0$. Si X_α est lisse, alors le cône $\mathscr{C}(X_\alpha)$ est simplicial, donc il existe i tel que π_i soit combinaison linéaire positive des π_j pour $j \neq i$, et de $-\alpha_1$. Par suite, tous les $\langle \alpha_1, \check{\alpha}_i \rangle$ sont nuls, sauf un; donc α_1 est une extrémité du diagramme de Dynkin. On peut supposer que α_2 est la racine simple liée à α_1. Posons $m = -\langle \alpha_1, \check{\alpha}_2 \rangle$ et $n = -\langle \check{\alpha}_1, \alpha_2 \rangle$; ce sont des entiers positifs, et $mn \in \{1, 2, 3\}$.

Puisque $-\alpha_1 + 2\pi_1 = m\pi_2$, le cône $\mathscr{C}(X)$ est engendré par $-\alpha_1, \pi_1, \pi_3, \ldots, \pi_l$; son dual est donc engendré par $n\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_l$. Par suite, $\mathscr{C}(X)^\vee$ est engendré par une base de Λ si et seulement si $n \neq 3$. On vérifie que $\mathscr{C}$ est le simplexe de sommets 0, $(n/2)\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$, et que φ est donnée par $\varphi(p) = \langle p, \check{\alpha}_1 \rangle^2$, c'est à-dire

$$\varphi(x_1((n/2)\alpha_1 + \alpha_2) + x_2\alpha_2 + \cdots + x_l\alpha_l) = n^2 x_2^2.$$

D'où, par un calcul élémentaire:

$$\int_{\mathscr{C}} \varphi(p)\, dp = n^3/(l+2)!\,.$$

Puisque la codimension de l'orbite fermée de X_α est $l+2$, on conclut que X_α est lisse si et seulement si $n = 1$, c'est-à-dire si α_1 est plus longue que α_2.

RÉFÉRENCES

[AD] S. Abeasis, A. DelFra: *Young diagrams and ideals of pfaffians*, Adv. in Math. *35* (1980), 158–178.

[BP] M. Brion, F. Pauer: *Valuations des espaces homogènes sphériques*, Comment. Math. Helv. *62* (1987), 265–285.

[B1] M. Brion: *Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques*, Duke Math. J. *58* (1989), 397–424.

[B2] M. Brion: *Une extension du théorème de Borel-Weil*, Math. Ann. *286* (1990), 655–660.

[B3] M. Brion: *Vers une généralisation des espaces symétriques*, J. of Alg. *134* (1990), 115–143.

[DEP] C. DeConcini, D. Eisenbud, C. Procesi: *Young diagrams and determinantal varieties*, Invent. Math. *56* (1980), 129–165.

[DP] C. DeConcini, C. Procesi: *Complete symmetric varieties*, dans: Lect. Notes Math. *996*, 1983.

[F] W. Fulton: *Intersection theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. *2*, Springer-Verlag 1984.

[K] G. Kempf: *On the geometry of a theorem of Riemann*, Ann. of Math. *98* (1973), 178–185.

[KKMS] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat: *Toroidal Embeddings I*, Lect. Notes Math. *339*, Springer-Verlag 1973.

[Kn] F. Knop: *The Luna-Vust theory of spherical embeddings*, preprint 1990 (Basel).

[Kr] H. Kraft: *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Vieweg 1985.

[Li] J. Lipman: *Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization*, Pub. Math. I. H.E.S. *36* (1969), 195–280.

[Lu] D. Luna: *Slices étales*, Mémoire de la S.M.F. *33* (1973), 81–105.

[M] M. Moralès: *Polynôme de Hilbert-Samuel des clôtures intégrales des puisances d'un idéal m-primaire*, Bull. Soc. math. France *112* (1984), 343–358.

[O] T. Oda: *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergeb. Math. Grenzgeb. *15*, Springer-Verlag 1988.

[P] F. Pauer: *Caractérisation valuative d'une classe de sous-groupes d'un groupe algébrique*, C. R. du 109e congrès nat. Soc. sav. Dijon 1984, Sci. III, 159–166.

[R] G. C. M. Ruitenburg: *Invariant ideals of polynomial algebras with multiplicity-free group action*, Compos. Math. *71* (1989), 181–228.

[TK] A. THORUP, S. KLEIMAN: *Complete bilinear forms*, dans: Lect. Notes Math. *1311*, Springer-Verlag 1988.

[V] T. VUST, *Plongements d'espaces symétriques*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa *17* (1990), 165–194.

[ZS] O. ZARISKI, P. SAMUEL: *Commutative algebra*, vol. II, Van Nostrand 1960.

Laboratoire de Mathématiques
Institut Fourier
B.P. 74
038402 St. Martin d'Hères
Cedex, France

Received March 20, 1990