

# **Stability of minimal hypersurfaces.**

Autor(en): **Palmer, Bennett**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **66 (1991)**

PDF erstellt am: **01.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-50398>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*

ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

## Stability of minimal hypersurfaces

BENNETT PALMER

This paper is concerned with the stability of minimal hypersurfaces of  $n+1$  dimensional Euclidean space  $\mathbb{E}^{n+1}$ . For  $n=2$  it was shown independently by Do Carmo-Peng and Fischer Colbrie-Schoen that a smooth, orientable, complete, stable minimal surface must be a plane. In higher dimensions,  $n \geq 7$ , the celebrated result of Bombieri, De Giorgi and Giusti on the existence of minimal graphs indicates that the situation is more complicated since these hypersurfaces are minimizing and hence stable.

With the existence of minimal, stable graphs in mind it is natural to seek a topological restriction which implies instability. We show:

**THEOREM I.** *Let  $M^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$  be a complete, orientable minimal hypersurface. Suppose there exists a codimension one cycle  $C$  in  $M$  which does not separate  $M$ . Then  $M$  is unstable*

*Proof of Theorem I.* Suppose  $C$  exists. By the results of [D], Cor 1,  $M$  supports a non-trivial  $L^2$ -harmonic vector field  $\xi$ . Let  $\nabla$  denote the naturally defined connection on  $M$  and let  $\nabla_i$  denote  $\nabla_{e_i}$  where  $e_i$  is a locally defined orthonormal frame for  $TM$ . Compute

$$\begin{aligned}\nabla \|\xi\|^2 &= 2 \left( \sum_i (\langle \nabla_i \nabla_i \xi, \xi \rangle + \langle \nabla_i \xi, \nabla_i \xi \rangle) \right) \\ &= 2(\langle \text{tr. } \nabla \nabla \xi, \xi \rangle + \|\nabla \xi\|^2)\end{aligned}$$

Since  $\xi$  is harmonic, one has

$$\langle \text{tr. } \nabla \nabla \xi, \xi \rangle = \text{Ricci}(\xi, \xi)$$

so that

$$\Delta \|\xi\|^2 - 2 \text{Ricci}(\xi, \xi) = 2 \|\nabla \xi\|^2. \quad (1)$$

For a minimal hypersurface,

$$-\text{Ricci} = \langle dv, dv \rangle$$

where  $v : M \rightarrow S^n$  is the Gauss map. Therefore

$$\|dv\|^2 \|\xi\|^2 \geq \langle dv(\xi), dv(\xi) \rangle = -\text{Ricci}(\xi, \xi). \quad (2)$$

By diagonalizing  $dv$  at an arbitrary  $p \in M$  and using the fact that  $M$  is minimal, one easily sees that equality holds in (2), at  $P$ , if and only if  $\|dv(P)\|^2 = 0$  or  $\xi(P) = 0$ .

We claim  $\xi$  cannot vanish identically on any open set in  $M$ . One way to see this is to associate to  $\xi$  the one form  $\omega \equiv \langle \xi, \cdot \rangle$ . Using a theorem of Andreotti and Vesentini stated in [D], one has  $d\omega = 0 = d * \omega$ . The lift of  $\omega$  to the simple connected universal cover  $\tilde{M}$  and  $M$  is hence the differential of a globally defined harmonic function  $U$ . If  $\xi \equiv 0$  on an open set then on the lift of this set  $U \equiv \text{const}$ , on  $\tilde{M}$  by unique analytic continuation for the Laplacian. This implies  $\xi \equiv 0$  on  $M$ . Using these facts we write (1) as

$$\Delta \|\xi\|^2 + 2\|dv\|^2 \|\xi\|^2 = 2\|\nabla \xi\|^2 + 2W^2 \quad (3)$$

where  $W^2 \geq 0$  and  $w^2 = 0$  a.e. implies  $\|dv\|^2 \equiv 0$ .

Away from the zeroes of  $\xi$ , one has

$$\Delta \|\xi\|^2 = 2(\|\xi\| \Delta \|\xi\| + \|\nabla \|\xi\|\|^2). \quad (4)$$

In fact this equality holds globally in  $M$  in the sense of distributions, which is how it will be used. Recalling Kato's inequality

$$\|\nabla \xi\| \geq \|\nabla \|\xi\|\|,$$

we obtain from (3) and (4),

$$\|\xi\| \Delta \|\xi\| + \|\nabla \|\xi\|\|^2 + \|dv\|^2 \|\xi\|^2 \geq \|\nabla \xi\|^2 + W^2 \geq \|\nabla \|\xi\|\|^2 + W^2$$

and hence

$$\|\xi\| \Delta \|\xi\| + \|dv\|^2 \|\xi\|^2 \geq W^2. \quad (5)$$

Next recall that  $M$  is stable provided

$$0 \leq \int (\|\nabla \psi\|^2 - \|dv\|^2 \psi^2) \quad (6)$$

for all  $\psi \in W_c^{1,2}$ , the space of  $W^{1,2}$  functions with compact support in  $M$ . We take  $\psi = \omega \|\xi\|$  in (6). Here  $\omega$  denotes a “standard” cutoff function of geodesic distance  $r$  with the following properties:

- (i)  $\omega \in C^\infty$ ,
- (ii)  $0 \leq \omega \leq 1$
- (iii)  $\omega \equiv 1$  on  $B_r/2$ ,  $\omega \equiv 0$  off  $B_r$
- (iv)  $\|\nabla \omega\|^2 \leq c/r^2$ , where  $c = \text{const. independent of } r$ .

$B_r$  denotes the geodesic ball of radius  $r$  centered at a point  $P \in M$ . We have

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int (\|\nabla(\omega \|\xi\|)\|^2 - \|dv\|^2 \|\xi\|^2 \omega^2) \\ &= \int (-\|\xi\| \omega \Delta(\|\xi\| \omega) - \|dv\|^2 \|\xi\|^2 \omega^2) \\ &= \int (-\|\xi\| \omega (\|\xi\| \Delta \omega + \omega \Delta \|\xi\| + 2\langle \nabla \omega, \nabla \|\xi\| \rangle) - \|dv\|^2 \|\xi\|^2 \omega^2) \\ &= - \int \omega^2 \|\xi\| (\Delta \|\xi\| + \|dv\|^2 \|\xi\|) - 2 \int \|\xi\| v \langle \nabla \|\xi\|, \nabla \omega \rangle - \int \|\xi\|^2 \omega \Delta \omega \\ &\leq \int \|\xi\|^2 \|\nabla \omega\|^2 - \int \omega^2 W^2 \\ &\leq c/r^2 \int_{B_r} \|\xi\|^2 - \int_{B_r/2} W^2 \end{aligned}$$

Letting  $r \rightarrow \infty$  and using the assumption  $\xi \in L^2$  one finds  $W^2 \equiv 0$  on  $M$ . This implies that  $\|dv\|^2 \equiv 0$  which implies  $M$  is a hyperplane. A contradiction is reached by the existence of the cycle  $C$ . Q.E.D.

## REFERENCES

- [BDG] E. Bombieri, E. De Giorgi, E. Giusti, Minimal cones and the Bernstein problem, *Invent. Math.* 7 (1969), 243–268.
- [D] V. Dodziuk,  $L^2$  harmonic forms on complete manifolds. In *Seminar on Differential Geometry, Annals of Math. Studies* no. 102.
- [FS] D. Fischer-Colbrie, R. Schoen, The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. *Comm. Pure Appl. Math.* 33 (1980), 199–211.

*Technische Universität Berlin*

Received December 28, 1989