

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 63 (1988)  
  
**Artikel:** Limites d'espaces tangents en géométrie analytique.  
**Autor:** Le, Dung Trang / Teissier, Bernard  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48219>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Limites d'espaces tangents en géométrie analytique

LÊ DŨNG TRÁNG et BERNARD TEISSIER

### Introduction

Le thème de ce travail est la structure de l'ensemble des directions limites en un point singulier  $x$  d'un espace analytique complexe  $X$  des espaces tangents à  $X$  en des points non-singuliers. C'est un ensemble algébrique projectif puisque c'est la fibre ensembliste au dessus de  $x$  de la modification de Nash de  $X$  (voir 1.4). Diverses caractérisations de cet ensemble ont été données dans des cas particuliers, d'abord numériques dans ([36], Chap. 2), puis géométriques dans [6], [18] et [23]; en fait nous étudions, pour un plongement local  $(X, x) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  donné, la fibre du morphisme conormal  $\kappa: C(X) \rightarrow X$ , où  $C(X) \subset X \times \mathbb{P}^{N-1}$  est l'ensemble des couples formés d'un point  $y$  de  $X$  et d'une direction limite en  $y$  d'hyperplans de  $\mathbb{C}^N$  tangents à  $X$ , et  $\kappa$  est induit par la première projection.

La structure géométrique de l'inclusion  $|\kappa^{-1}(x)| \subset \{x\} \times \mathbb{P}^{N-1}$  détermine celle de la fibre au-dessus de  $x$  de la modification de Nash (voir 1.4).

Un des principaux résultats de ce travail, annoncé dans [42], et dans [19] pour le cas des hypersurfaces, est que l'on peut déterminer géométriquement la fibre ensembliste  $|\kappa^{-1}(x)|$  au moyen des cônes tangents en  $x$  aux variétés polaires locales de  $X$  en  $x$  que nous avons introduites et étudiées dans [22]. Cette détermination fournit un moyen de calcul assez efficace de cette fibre, (voir l'exemple donné en appendice) alors qu'à notre connaissance il n'en existait aucun. Nous prouvons en fait un résultat bien plus général de dualité projective locale (Théorème 2.1.1) pour un espace réduit équidimensionnel  $X$  le long d'un sous-espace non-singulier  $Y$  tel que  $(X^0, Y)$  satisfasse les conditions de Whitney introduites dans [47], où  $X^0$  désigne la partie non-singulière de  $X$ . Les composantes irréductibles de  $|\kappa^{-1}(Y)|$  sont  $Y$ -duales (au sens d'une dualité projective relative au-dessus de  $Y$ ) de certains sous  $Y$ -cônes du cône normal (Voir [11]) de  $Y$  dans  $X$ . La donnée de ces  $Y$ -cônes équivaut à celle de la partie fixe, i.e., indépendante de la projection, des cônes normaux de  $Y$  dans les variétés polaires locales de  $X$  le long de  $Y$ .

En fait, nous montrons que cette  $Y$ -dualité caractérise les conditions de Whitney.

Nous mettons ainsi en évidence une famille de sous-cônes du cône normal de



$X$  le long d'un sous-espace réduit  $Y$ , que nous appelons l'auréole de  $X$  le long de  $Y$ . Lorsque  $Y$  est non-singulier, cette auréole permet de décider si  $X$  satisfait les conditions de Whitney le long de  $Y$  (Voir 2.1.5 ci-dessous), et si c'est le cas, cette auréole permet de déterminer les limites aux points de  $Y$  d'hyperplans tangents à  $X^0$  (Voir 2.2.1). Nous pensons que cette auréole est un objet géométrique important, ce qui est confirmé par le fait qu'elle a un bon comportement par section hyperplane générique et projection. Le corollaire (2.3.2.2) montre comment ce bon comportement par section hyperplane générique nous a permis de comprendre les propriétés particulières du point de vue de l'équisingularité de la famille des sections hyperplanes d'un même germe d'espace analytique complexe (cf. [44], Appendice), restées jusqu'ici mystérieuses pour nous.

En chemin, nous étudions la géométrie de la spécialisation d'un germe singulier sur le cône normal d'un sous-espace fermé dans le cas où celui-ci est non-singulier; cette construction, due dans un cadre général à Gerstenhaber ([3]) et ayant connu de nombreux avatars (voir 1.6) a une géométrie compliquée intimement reliée à la structure des limites d'espaces tangents du germe aux points du sous-espace. Cette géométrie, dans le cas particulier expérimental des surfaces, était le principal objet d'étude de [23] et a été utilisée aussi pour étudier les conditions de Whitney par V. Navarro Aznar dans [28].

Nous utilisons systématiquement ici le langage des sous-variétés Lagrangiennes homogènes du cotangent, déjà usuel en mécanique et en analyse. Dans la première partie, nous essayons de donner une base solide à l'utilisation de ce langage dans la théorie géométrique des singularités complexes, qui est relativement récente (Voir cependant [13], [20] et [34]). En particulier, nous obtenons la caractérisation suivante (cf. Proposition 1.3.8) des conditions a) et b) de Whitney pour  $(X^0, Y)$ : dans  $\mathcal{O}_{C(X)}$  l'idéal qui définit l'intersection  $C(Y) \cap C(X)$  est entier sur l'idéal qui définit  $\kappa^{-1}(Y)$ .

Nous remercions C. Sabbah pour avoir décelé une erreur dans une première version.

## §1. Préliminaires

1.1 NOTATIONS. Dans ce texte,  $\mathbb{C}^N$  désigne l'espace affine complexe de dimension  $N$ ,  $\mathbb{P}^{N-1}$  l'espace projectif complexe des droites de  $\mathbb{C}^N$  passant par une origine fixée qui sera un point  $x$ ,  $\check{\mathbb{P}}^{N-1}$  l'espace projectif dual dont les points sont les hyperplans de  $\mathbb{C}^N$  passant par  $x$ ; pour tout  $Y$ -cône  $C \subset Y \times \mathbb{C}^N$  de sommet  $Y$ , on notera  $\mathbb{P}(C)$  le sous-ensemble correspondant de  $Y \times \mathbb{P}^{N-1}$  et pour tout sous-ensemble  $V$  de  $Y \times \mathbb{P}^{N-1}$  on notera  $Y(V)$  le cône de sommet  $Y$  correspondant.

Si  $X$  est un espace analytique complexe,  $\mathcal{O}_X$  désignera son faisceau structural,  $|X|$  l'espace réduit ou ensemble analytique sous-jacent, et  $X^0$  l'ouvert des points non-singuliers de  $X$ . Pour un sous-espace  $Y$  de  $X$ , nous noterons  $C_{X,Y}$  le cône normal de  $X$  le long de  $Y$ , (Voir [11]), qui est le cône tangent de Zariski  $C_{X,x}$  de  $X$  quand  $Y$  est un point  $x \in X$  et l'espace tangent  $T_{X,x}$  de  $X$  en  $x$ , si  $x \in X^0$ .

## 1.2. Espace conormal relatif (Cf. [41], [8], [15])

1.2.1. Etant donné un espace analytique complexe  $Z$  sans singularités et de dimension pure, on notera  $\tilde{\pi}_Z: T^*(Z) \rightarrow Z$  le fibré cotangent de  $Z$ , et pour un sous-espace analytique complexe non-singulier  $Y$  de  $Z$ , on notera  $T_Y^*(Z) \subset T^*(Z)$  le fibré conormal de  $Y$  dans  $Z$ ; c'est une sous-variété de  $T^*(Z)$  invariante par les homothéties des fibres des  $\tilde{\pi}_Z$ .

Dans le cas où  $Z = \mathbb{C}^N$ , le fibré cotangent est trivial, et isomorphe à la projection  $\mathbb{C}^N \times \check{\mathbb{C}}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ , où  $\check{\mathbb{C}}^N$  est l'espace des formes affines sur  $\mathbb{C}^N$  s'annulant à l'origine. D'autre part,  $T_Y^*(\mathbb{C}^N)$  est l'ensemble des paires  $(y, \lambda)$  où  $y \in Y$  et  $\lambda \in \check{\mathbb{C}}^N$  s'annule sur l'espace tangent  $T_y Y$  de  $Y$  en  $y$ .

1.2.2. Rappelons que  $T^*(Z)$  est muni de la 1-forme de Liouville  $\alpha$  qui, à un vecteur tangent  $v$  à  $T^*(Z)$  au point  $(z, \lambda)$ , associe  $\lambda(d\tilde{\pi}_Z(v))$  où  $d\tilde{\pi}_Z$  est la différentielle de  $\tilde{\pi}_Z$  en  $(z, \lambda)$ . Pour tout sous-espace analytique complexe non-singulier  $Y$  de  $Z$ , la 1-forme  $\alpha$  s'annule sur tout vecteur tangent à  $T_Y^*(Z)$ ; autrement dit,  $T_Y^*(Z)$  est une sous-variété conique Lagrangienne.

1.2.3. On appelle fibré projectif cotangent et l'on note  $\pi_Z: \mathbb{P}T^*(Z) \rightarrow Z$  le fibré obtenu en projectivant les fibres du fibré cotangent, et espace conormal projectivisé de  $Y$  dans  $Z$  le sous-espace  $\mathbb{P}T_Y^*(Z)$  de  $\mathbb{P}T^*(Z)$  obtenu en remplaçant les fibres coniques de  $T_Y^*(Z)$  par les variétés projectives correspondantes. Nous dirons encore que ce sont des sous-variétés Lagrangiennes de  $\mathbb{P}T^*(Z)$ ;

Rappelons le très utile résultat suivant (Voir [30] §10, [13]):

Toute sous-variété Lagrangienne irréductible de  $\mathbb{P}T^*(Z)$  est l'espace conormal projectivisé de son image dans  $Z$  par  $\pi_Z$ .

1.2.4. Nous allons étendre ces notions simultanément au cas relatif et au cas d'espaces singuliers (Voir [41], Chap. 2, §4, et [8]):

1.2.4.1. Soit  $f: X \rightarrow S$  un morphisme d'espaces analytiques réduits, dont toutes les fibres sont purement de dimension  $d$  et tel qu'il existe un ouvert analytique  $X_0$  de  $X$ , dense dans  $X$  et sur lequel la restriction de  $f$  a toutes ses fibres lisses. Supposons de plus que  $X$  soit un sous-espace analytique fermé d'un espace  $p: Z \rightarrow S$  lisse au-dessus de  $S$  et que  $f$  soit la restriction de  $p$  à  $X$  (cette hypothèse est toujours vérifiée localement sur  $X$ ). Notons  $\tilde{\pi}_p: T^*(Z/S) \rightarrow Z$  le fibré cotangent de  $Z$  relatif à  $p$ , dual du fibré tangent relatif à  $p$  dont la fibre au-dessus de  $z \in Z$  est l'espace vectoriel des vecteurs tangents en  $z$  à la fibre de  $p$ .

D'après un théorème de Remmert [32], la fermeture dans  $T^*(Z/S)$  de l'espace conormal de  $X_0$  dans  $Z$  relatif à  $p$  est un sous-espace analytique complexe fermé réduit  $T_{X/S}^*(Z/S)$  de  $T^*(Z/S)$ . L'application  $\tilde{\pi}_p$  induit un morphisme  $\tilde{\kappa}_f : T_{X/S}^*(Z/S) \rightarrow X$  que l'on appelle morphisme conormal de  $X/S$  dans  $Z/S$ .

Localement sur  $Z$ , on peut identifier  $p$  à la première projection  $S \times U \rightarrow S$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{C}^N$ ; on peut alors identifier  $T_{X/S}^*(Z/S)$  à l'ensemble des couples  $(x, \varphi)$ , où  $x \in X$  et  $\varphi$  est une limite de formes linéaires sur  $\mathbb{C}^N$  s'annulant sur des espaces tangents aux fibres de  $f$  en des points lisses de  $f$ .

Comme plus haut, on peut projectiviser les fibres et définir le morphisme conormal relatif projectivisé  $\kappa_f : C_f(X; p) \rightarrow X$ , où  $C_f(X; p) = \mathbb{P}T_{X/S}^*(Z/S)$ .

Le plus souvent,  $p$  sera fixé et l'on notera  $T_f^*(X)$  au lieu de  $T_{X/S}^*(Z/S)$  et  $C_f(X)$  au lieu de  $C_f(X; p)$ . Enfin, quand le contexte sera clair, on omettra souvent "projectivisé".

1.2.4.2. Dans le cas où  $f$  est la restriction de la première projection  $p$  à un sous-espace fermé  $X$  de  $S \times U$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{C}^N$ , on a  $T^*(S \times U/S) = S \times U \times \check{\mathbb{C}}^N$ , et  $C_f(X)$  est la fermeture dans  $S \times U \times \check{\mathbb{P}}^{N-1}$  de l'ensemble des couples  $(x, H)$  où  $x \in X_0$  et  $H$  est un hyperplan de  $\mathbb{C}^N$  contenant l'espace tangent en  $x$  à la fibre de  $f$ . On notera dans ce cas  $\lambda_f : C_f(X) \rightarrow \check{\mathbb{P}}^{N-1}$  la restriction à  $C_f(X)$  de la projection  $S \times U \times \check{\mathbb{P}}^{N-1} \rightarrow \check{\mathbb{P}}^{N-1}$ .

Un point de  $C_f(X)$  est un couple  $(x, H)$  où  $x \in X$  et  $H$  est une limite d'hyperplans de  $\mathbb{C}^N$  tangents aux fibres de  $f$ , c'est-à-dire contenant l'espace tangent à la fibre de  $f$ , en des points lisses de  $f$  tendant vers  $x$ .

Dans la suite nous appellerons hyperplan tangent à la fibre de  $f$  en  $x$  un hyperplan  $H$  de  $\mathbb{C}^N$  tel que  $(x, H)$  appartienne à  $C_f(X)$ . Il est équivalent pour un hyperplan d'être tangent aux fibres ou de contenir une limite d'espaces tangents aux fibres.

1.2.4.3. Si de plus  $S$  est un point, on notera encore  $T_X^*(U)$  l'espace  $T_{X/S}^*(S \times U/S)$ ,  $C(X)$  l'espace  $C_f(X)$ , et  $\kappa : C(X) \rightarrow X$  le morphisme conormal. On notera  $\lambda : C(X) \rightarrow \check{\mathbb{P}}^{N-1}$  le morphisme  $\lambda_f$ .

1.2.5. Rappelons (voir [30], §10) qu'un sous-espace analytique réduit  $W$  de  $T^*(Z)$  est dit Lagrangien s'il est purement de dimension  $\dim Z$  et si la 2-forme  $\omega = d\alpha$ , différentielle de la forme de Liouville, s'annule en tout couple de vecteurs tangents à la partie lisse  $W^0$  de  $W$ . Si  $W$  est homogène, c'est-à-dire conique pour les homothéties des fibres de  $T^*(Z)$ , il est équivalent de dire que la 1-forme  $\alpha$  s'annule sur les vecteurs tangents à  $W^0$ .

Soit  $p : Z \rightarrow S$  un morphisme lisse; nous dirons de même qu'un sous-espace analytique réduit  $W$  de  $T^*(Z/S)$  est  $p$ -Lagrangien (ou  $S$ -Lagrangien lorsque aucune confusion n'est à craindre) si les fibres du morphisme  $q = p \circ \tilde{\pi}_p|_W$  sont purement de dimension égale à la dimension  $\dim_p Z$  des fibres de  $p$  et si la

différentielle  $\omega_p$  de la 1-forme de Liouville relative  $\alpha_p$  de  $T^*(Z/S)$  s'annule sur tout couple de vecteurs tangents en des points non-singuliers au sous-espace réduit sous-jacent aux fibres de  $q$ .

Si  $W$  est  $p$ -homogène, c'est-à-dire conique par rapport aux homothéties des fibres de  $T^*(Z/S)$ , on voit, comme ci-dessus, qu'il revient au même de demander que  $\alpha_p$  s'annule sur tout vecteur tangent aux fibres de la restriction de  $q$  à  $W$  en des points non-singuliers des fibres réduites. Dans ce cas, on peut encore projectiviser dans les fibres, et chaque sous-espace  $p$ -Lagrangien homogène donne un sous-espace du fibré cotangent relatif projectivisé  $\mathbb{P}_p T^*(Z/S)$ , sous-espace que nous appellerons encore  $p$ -Lagrangien ou  $S$ -Lagrangien.

Remarquons que l'image d'un sous-espace analytique fermé réduit  $p$ -homogène de  $T^*(Z/S)$  est un sous-espace analytique fermé de  $Z$  d'après un Théorème de Remmert et Grauert puisque c'est l'image du sous-espace  $\mathbb{P}_p(W)$  qui est projectif au-dessus de  $Z$ .

**PROPOSITION 1.2.6** (Principe de spécialisation Lagrangienne). *Soient  $p: Z \rightarrow S$  un morphisme lisse où  $S$  est réduit, et dont toutes les fibres sont purement de dimension  $N$ , et soit  $W$  un sous-espace analytique fermé réduit de l'espace total du fibré cotangent relatif  $\tilde{\pi}_p: T^*(Z/S) \rightarrow Z$ . Supposons que les fibres de  $W$  au-dessus des points généraux des composantes irréductibles de  $S$  soient purement de dimension  $N = \dim_p Z$ . Posons  $q = p \circ \tilde{\pi}_p|_W$ .*

A) *Si toutes les fibres de  $q$  sont purement de dimension  $N$ , étant donnée une 1-forme différentielle  $\alpha$  sur  $T^*(Z/S)$  relative au morphisme composé  $T^*(Z/S) \rightarrow Z \rightarrow S$ , s'il existe un ouvert analytique dense  $V$  de  $S$  tel que  $\alpha_s$  s'annule sur  $|q^{-1}(s)|^0$  pour  $s \in V$ ,  $\alpha_s$  s'annule sur  $|q^{-1}(s)|^0$  pour tout  $s \in S$ .*

B) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- 1) *Le sous-espace  $W$  de  $T^*(Z/S)$  est  $p$ -Lagrangien*
- 2) *Toutes les fibres de  $q$  sont purement de dimension  $N$  et il existe un ouvert analytique dense  $V$  de  $S$  tel que pour  $s \in V$ , la fibre  $q^{-1}(s)$  soit réduite et soit une sous-variété Lagrangienne de  $(p \circ \tilde{\pi}_p)^{-1}(s) = T^*(Z(s))$ .*

*Si de plus  $W$  est  $p$ -homogène, ces conditions sont équivalentes à la suivante:*

- 3) *Toutes les fibres de  $q$  sont purement de dimension  $N$  et chaque composante irréductible  $W_i$  de  $W$  est égale à  $T_{X_i/S}^*(Z/S)$ , où  $X_i = \tilde{\pi}_p(W_i)$ .*

Prouvons d'abord:

**LEMME 1.2.6.1.** *Pour tout  $s \in S$  et toute composante irréductible  $D_i$  de  $|q^{-1}(s)|$ , il existe un ouvert analytique dense  $U_i \subset D_i$  tel que  $U_i$  soit contenu dans  $D_i^0$  et que tout (couple de) vecteur(s) tangent(s) à  $U_i$  en  $w \in U_i$  soit limite de*

(couples de) vecteurs tangents en des points non-singuliers à des fibres voisines de  $q^{-1}(s)$ .

*Preuve du Lemme.* L'assertion est locale sur  $W$ , donc sur  $S$  et  $Z$ . Démontrons d'abord le Lemme dans le cas où  $S = \mathbf{D}$ , disque unité de  $\mathbb{C}$ . Le sous espace  $|q^{-1}(s)|$  de  $W$  est de codimension 1 et d'après ([38]), chaque composante irréductible  $D_i$  de  $|q^{-1}(s)|$  contient un ouvert analytique  $U_i$  en tout point duquel la normalisation est une résolution simultanée forte de  $W$  le long de  $D_i$ . Ceci implique en particulier que le morphisme de normalisation  $n: \bar{W} \rightarrow W$  a la propriété suivante:  $\bar{W}$  est non-singulier au voisinage de  $n^{-1}(U_i)$ , le morphisme  $n$  induit un isomorphisme au dessus du complémentaire de  $U_i$  dans un de ses voisinages dans  $W$  et le morphisme  $n^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$  induit par  $n$  est étale. Il suffit donc de prouver que tout (couple de) vecteur(s) tangent(s) à  $n^{-1}(U_i)$  est limite de (couples de) vecteurs tangents aux fibres de  $q \circ n$ . Dans une carte locale sur  $\bar{W}$  au voisinage d'un point  $w' \in n^{-1}(U_i)$ , le morphisme  $q \circ n$  est de la forme  $v^k$  où  $v$  est une coordonnée locale sur  $\bar{W}$ ,  $v = 0$  est une équation locale pour  $n^{-1}(U_i)$  et  $k$  est un entier  $> 0$ . Le résultat est alors évident.

Ramenos le cas général au cas où  $S = \mathbf{D}$ . On se place au voisinage d'un point  $w \in W$  et l'on choisit un chemin  $\tilde{h}: (\mathbf{D}, 0) \rightarrow (W, w)$  tel que  $h(\mathbf{D} - 0)$  soit contenu dans l'ouvert image réciproque par  $q$  de l'ouvert  $V \subset S$ . Posons  $h = q \circ \tilde{h}$  et faisons le changement de base par  $h: \mathbf{D} \rightarrow S$ . Le morphisme  $q_{\mathbf{D}}: |W \times_S \mathbf{D}| \rightarrow \mathbf{D}$  satisfait encore l'hypothèse 1) d'après l'hypothèse d'équidimensionalité des fibres, et  $|q_{\mathbf{D}}^{-1}(s)| = |q^{-1}(s)|$  pour  $s \in h(\mathbf{D})$ . ■

A) résulte immédiatement du Lemme par continuité. Prouvons B): 1) implique évidemment 2). Prouvons que 2) implique 1): il résulte du Lemme par continuité que si 2) est vérifiée, pour tout  $s \in S$ , la différentielle  $\omega_p$  de la forme de Liouville relative  $\alpha_p$  s'annule sur tout couple de vecteurs tangents en tout point d'un ouvert analytique dense de chaque composante irréductible de  $|q^{-1}(s)|$ , donc sur tout couple de vecteurs tangents à  $|q^{-1}(s)|$  en un point non-singulier, c'est-à-dire que  $W$  est  $p$ -Lagrangien.

Prouvons que 2) implique 3): pour  $s \in V$ , considérons l'ouvert dense  $U_i(s) \subset W_i(s)$  formé des points où le morphisme  $\tilde{\pi}_p: W_i(s) \rightarrow X_i(s)$  est une submersion d'espaces lisses; la réunion pour  $s \in S$  des  $U_i(s)$  est un ouvert dense de  $W_i$ . Soient  $x \in \tilde{\pi}_p(U_i)$  et  $v$  un vecteur tangent à  $X_i(s)$  en  $x$ . Soit  $(x, \lambda)$  un point de  $\tilde{\pi}_p^{-1}(x) \cap U_i$ ; Il existe un vecteur tangent  $t$  à  $W_i(s)$  en  $(x, \lambda)$  tel que  $d\tilde{\pi}_p(t) = v$ . Puisque  $W$  est Lagrangienne, on a  $\alpha_p(t) = \lambda(v) = 0$ , ce qui signifie que  $(x, \lambda) \in T_{f_i}^*(p)$ , donc par adhérence  $W_i(s) \subset T_{X_i/S}^*(Z/S)(s)$ . Comme  $W_i(s)$  et  $T_{X_i/S}^*(Z/S)(s)$  ont la même dimension, on a l'égalité  $W_i(s) = T_{X_i/S}^*(Z/S)(s)$  pour  $s \in V$ , donc par adhérence  $W_i = T_{X_i/S}^*(Z/S)$ .

Enfin 3) implique immédiatement 1) ■



*Remarques.* a) Il y a évidemment un résultat analogue dans le fibré cotangent relatif projectivisé, montrant que ses sous-espaces  $p$ -Lagrangiens irréductibles  $\mathbb{P}_p(W)$  sont les  $C_f(X; p)$ , où  $X$  est l'image de  $W$  par  $\pi_p$  et  $f = p|_X$ .

b) Dans le cas où  $Z$  est  $S \times \mathbb{P}^N$  et  $p$  la première projection, nous dirons qu'une sous-variété  $p$ -Lagrangienne  $W$  du fibré cotangent relatif projectivisé  $S \times \mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}}^N$  met en  $S$ -dualité projectives ses images  $X$  et  $\check{X}$  dans  $S \times \mathbb{P}^N$  et  $S \times \check{\mathbb{P}}^N$  respectivement. On prendra garde que pour des  $s \in S$  spéciaux, cette définition peut ne pas coïncider avec la définition de la dualité projective de  $X(s)$  et  $\check{X}(s)$ , si  $W(s)$  a des composantes irréductibles dont l'image est immergée dans  $X(s)$  ou  $\check{X}(s)$ .

c) Il résulte de la proposition que, si  $W$  est  $p$ -homogène et si la condition 2) est satisfaite, pour tout  $s \in S$ , la fibre réduite  $|q^{-1}(s)|$  est une sous-variété Lagrangienne homogène de  $T^*(Z(s))$ , donc est réunion d'espaces conormaux à des sous-espaces analytiques réduits des fibres  $X_i(s)$ .

Le résultat sur la spécialisation des espaces conormaux est dû indépendamment à Fulton-Kleiman-MacPherson dans [2] et à Sabbah dans [33] (voir aussi Henry-Merle-Sabbah dans [8] (Cor. 4.2.1)), et S. Kleiman a dans [16] donné une démonstration algébrique du principe de spécialisation dans le cas  $p$ -homogène, valable en toute caractéristique, et l'a utilisé pour démontrer une formule sur l'énumération des contacts (Voir aussi [15]).

La remarque selon laquelle la spécialisation équidimensionnelle de variétés Lagrangiennes reste Lagrangienne avait déjà été utilisée par Kashiwara dans [14]; comme le rapporteur nous l'a signalé, la preuve de la Proposition 5.6 de [14] est analogue à celle de  $2) \Rightarrow 1)$ . Mais ce n'est que récemment que l'on a réalisé sa grande utilité dans le cadre qui nous intéresse ici. Le second auteur avait suggéré de l'utiliser pour expliquer plus conceptuellement le cas particulier  $Y = \{x\}$  du Théorème 2.1.1 ci-dessous, ainsi que le Corollaire 4.2.1 de [8].

d) Puisque  $T_{X/S}^*(Z/S)$  est une adhérence, le morphisme  $q$  est sans  $\mathcal{O}_S$ -torsion et par conséquent, les conditions de la proposition sont automatiquement satisfaites lorsque  $W = T_{X/S}^*(Z/S)$  et  $S$  est une courbe non-singulière.

**COROLLAIRE 1.2.7.** *Soit  $X$  un sous-espace analytique fermé de  $Z$  satisfaisant les conditions de 1.2.4.1. Notons  $q: C_f(X) \rightarrow S$  le morphisme composé  $f \circ \kappa_f$ . Si  $f$  est propre ou si  $X$  est un voisinage assez petit de l'image d'une section  $\sigma$  de  $f$ , il existe un ouvert analytique dense  $U$  de  $S$  tel que pour  $s \in U$ , la fibre  $q^{-1}(s)$  coïncide avec l'espace conormal de  $X(s)$  dans  $Z(s)$  ■*

### 1.3. Stratifications

**DÉFINITIONS 1.3.1.** Soit  $X$  un espace analytique complexe réduit. On appelle partition analytique complexe de  $X$  une partition localement finie

$X = \bigcup X_\alpha$  de  $X$  par des sous-espaces analytiques complexes  $X_\alpha$  de dimension pure de  $X$  dont la fermeture  $\overline{X_\alpha}$  et la frontière  $\overline{X_\alpha} - X_\alpha$  sont analytiques fermés dans  $X$ ; les  $X_\alpha$  sont appelés strates de la partition.

Une partition analytique complexe est une stratification analytique complexe de  $X$  si chaque  $X_\alpha$  est non-singulier.

Une partition analytique complexe est compatible avec une famille localement finie  $\{T_\tau\}$  de sous-espaces analytiques de  $X$  si chaque  $T_\tau$  est réunion de strates.

Une partition possède la propriété de frontière si elle est compatible avec la frontière de chaque strate.

Etant donnée une partition analytique complexe  $X_\alpha$  de  $X$ , il lui est naturellement associée une filtration analytique complexe

$$X = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_i \supset F_{i+1} \supset \cdots$$

de  $X$ , c'est-à-dire une suite décroissante de sous-ensembles où chaque  $F_i$  est un sous-espace analytique fermé de  $X$  rare dans  $F_{i-1}$ ;  $F_i$  est la réunion des adhérences dans  $X$  des strates de dimension inférieure à celle de  $F_{i-1}$ . Inversement, à une telle filtration on peut associer la partition de  $X$  composée des composantes connexes des différences  $F_i - F_{i+1}$ . Une filtration  $F$  est plus fine qu'une filtration  $F'$  si la partition correspondant à  $F$  est compatible avec les  $F'_j$ .

1.3.1.1. Soit  $\Lambda$  une sous-variété Lagrangienne homogène de l'espace cotangent  $T^*Z$  d'un espace analytique non-singulier  $Z$  (ou une sous-variété Lagrangienne du projectivisé  $\mathbb{P}T^*Z$ ). A la décomposition en composantes irréductibles  $\Lambda = \bigcup \Lambda_j$  de  $\Lambda$  correspond une filtration de  $Z$  telle que  $F_i$  soit la réunion des images de dimension  $\leq d_i$  des  $\Lambda_j$ , où les  $d_i$  parcourent la suite des dimensions effectivement atteintes,  $d_0 > d_1 > \cdots$ . Nous appellerons cette filtration la  $\Lambda$ -filtration de l'image de  $\Lambda$  dans  $Z$ .

1.3.2. Nous supposons connues les conditions a) et b) de Whitney (mais 1.3.9 ci-dessous en donne une version) et le concept de stratification de Whitney d'un espace analytique complexe réduit  $X$ , introduit par H. Whitney dans [47] et caractérisé de diverses manières dans [41] et [21] (voir aussi [7]). Rappelons seulement que la condition a) de Whitney est le cas particulier, où  $S$  est un point, de la condition  $a_f$  de Thom définie ci-dessous.

1.3.3. Le concept de stratification a été étendu aux morphismes par Thom [45] (Voir aussi [25]). Nous fixons ci-dessous notre terminologie.

**DÉFINITION 1.3.3.1.** Etant donné un morphisme analytique complexe  $f: X \rightarrow Y$ , nous appellerons  $f$ -partition analytique de  $X$  la donnée d'une famille localement finie  $\{X_\alpha\}$  de sous-espaces analytiques de dimension pure de  $X$  tels que pour chaque  $\alpha$ ,  $\overline{X_\alpha}$  et  $\overline{X_\alpha} - X_\alpha$  soient des sous-espaces analytiques fermés de

$X$ , que la famille des composantes connexes des  $X_\alpha$  soit une partition de  $X$  et enfin que la restriction de  $f$  à chaque  $X_\alpha$  soit de corang constant. Nous dirons qu'une  $f$ -partition est une  $f$ -stratification si les strates  $X_\alpha$  sont des espaces non singuliers et que, chaque fois qu'une composante connexe d'une partie  $X_\alpha$  rencontre l'adhérence d'une partie  $X_\beta$ , elle est entièrement contenue dans cette adhérence.

Une partition de  $f$  est la donnée d'une  $f$ -partition de  $X$  et d'une stratification  $\{Y_\beta\}$  de  $Y$  à strates connexes telles que pour chaque  $\alpha$ , il existe  $\beta$  tel que  $f(X_\alpha) = Y_\beta$ . Une stratification de  $f$  est une partition de  $f$  qui est une  $f$ -stratification de  $X$ .

Une stratification de  $f$  est plus fine qu'une autre si les filtrations de  $X$  et  $Y$  correspondant à la première sont plus fines que celles correspondant à la seconde.

1.3.4. Soient  $N$  un entier,  $X$  et  $S$  deux espaces analytiques complexes réduits, tels que  $X$  soit un sous-espace analytique fermé de  $S \times U$ , où  $U$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{C}^N$ . Supposons que la restriction  $f: X \rightarrow S$  à  $X$  de la première projection  $p$  satisfasse les conditions de 1.2.4. Soient  $T$  et  $F$  deux sous-espaces analytiques non-singuliers de  $X$  à fermeture et frontière analytiques tels que  $F$  soit contenu dans  $\overline{T}$  et que les restrictions  $f|_T$  et  $f|_F$  soient de corang constant. Considérons les sous-espaces analytiques fermés  $C_{f|\overline{F}}(\overline{F})$  et  $C_{f|\overline{T}}(\overline{T})$  de  $\mathbb{P}T^*(S \times U/S)$  et le morphisme  $\pi_p: \mathbb{P}T^*(S \times U/S) \rightarrow S \times U$  (cf. 1.2.6).

**DÉFINITION 1.3.4.1.** On dit que le couple  $(T, F)$  satisfait la condition  $a_f$  de Thom en un point  $t \in F$  si l'on a l'inclusion:

$$C_{f|\overline{T}}(\overline{T}) \cap \pi_p^{-1}(t) \subset C_{f|\overline{F}}(\overline{F}) \cap \pi_p^{-1}(t)$$

On dit que  $(T, F)$  satisfait la condition  $a_f$  de Thom si elle est satisfaite en tout point  $t \in F$ .

On dit qu'une stratification  $(X_\alpha)$  de  $X$  satisfait la condition  $a_f$  si elle satisfait la condition de frontière et si tout couple de strates  $(X_\alpha, X_\beta)$  tel que l'on ait  $X_\beta \subset \overline{X_\alpha}$  satisfait la condition  $a_f$ .

*Remarque.* Cette définition est équivalente à celle de Thom dans [45] (Voir [13]).

On dit que le morphisme  $f: X \rightarrow S$  peut être stratifié avec la condition  $a_f$  s'il existe une stratification de  $f$  satisfaisant  $a_f$ .

La proposition suivante est une version conormale d'un résultat de Hironaka ([10] §5, Theorem 2), et est exprimée dans le langage des variétés polaires relatives par Sabbah dans [33], Th. 1.3.1.



**PROPOSITION 1.3.5.** a) *Dans la situation de la Proposition 1.2.6, si l'espace conormal relatif  $T_f^*(X)$  d'un sous-espace analytique  $X$  de  $Z$  muni de  $f = p \mid X$  est  $p$ -Lagrangien, pour tout point  $s$  de  $S$ , toute stratification de la fibre  $X(s)$  satisfaisant la condition a) de Whitney et compatible avec la  $q^{-1}(s)$ -filtration (au sens de 1.3.1.1) de la fibre  $X(s)$  a la propriété que la partie lisse de  $(X - X(s))$  satisfait la condition  $a_f$  le long de chaque strate.*

b) *Inversement, si une telle stratification existe pour une fibre  $X(s)$ , les conditions équivalentes de la Proposition 1.2.6 sont satisfaites par l'espace conormal  $T_f^*X$  au voisinage de  $q^{-1}(s)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Montrons que la  $q^{-1}(s)$ -filtration  $(F_i)$  a la propriété annoncée. Nous allons travailler dans l'espace conormal relatif projectivisé; posons  $\kappa_f = \pi_p \mid C_f(X)$ ,  $q = p \circ \kappa_f$  et soit  $\{X_\alpha\}$  une stratification de  $X(s)$  satisfaisant la condition a) de Whitney et compatible avec les  $F_i$ . Soit  $X_\alpha \subset F_i - F_{i+1}$  une strate; nous devons montrer l'inclusion  $\kappa_f^{-1}(X_\alpha) \subset C(X_\alpha)$ , où  $C(X_\alpha)$  est l'espace conormal de  $X_\alpha$  dans  $Z(s)$ . Or, les composantes irréductibles  $\Lambda_j$  de  $q^{-1}(s)$  que rencontre  $\kappa_f^{-1}(X_\alpha)$  ont la propriété que leur image, qui est irréductible, contient une strate  $X_\beta$  dense satisfaisant la condition a) le long de  $X_\alpha$ , ce qui donne  $\kappa_f^{-1}(X_\alpha) \cap \Lambda_j \subset C(X_\alpha)$ , d'où finalement l'inclusion  $\kappa_f^{-1}(X_\alpha) \subset C(X_\alpha)$  qu'il fallait démontrer.

Prouvons b): S'il existe une stratification de  $X(s)$  le long des strates de laquelle  $X$  satisfait  $a_f$ , les inclusions  $\kappa_f^{-1}(X_\alpha) \subset C(X_\alpha)$  impliquent que  $q^{-1}(s)$  est contenu dans une réunion finie de variétés Lagrangiennes de dimension  $N$ , donc est de dimension  $N$ . ■

**COROLLAIRE 1.3.5.1** (Hironaka [10], voir aussi [8]). *Dans la situation de la Proposition 1.3.5, si  $S$  est une courbe non-singulière, il existe une stratification de  $X$  par des strates sur lesquelles  $f$  est de rang constant et telle que pour tout couple de strates  $(X_\alpha, X_\beta)$  tel que l'image de  $X_\beta$  soit un point, la condition  $a_f$  soit satisfaite.*

**OBSERVATION 1.3.5.2.** Soient  $f: X \rightarrow S$  un morphisme analytique complexe comme en 1.3.4, où  $S$  est une courbe non-singulière,  $F$  et  $T$  deux sous-espaces analytiques de  $X$  à fermeture et frontière analytiques, tels que  $f(F)$  soit un point, que l'on ait l'inclusion  $F \subset \overline{T}$  et que  $f \mid T$  satisfasse les conditions de 1.2.4.1, à savoir que  $f \mid T$  ait toutes ses fibres de dimension pure et qu'il existe dans  $T$  un ouvert analytique dense  $T_0$  sur lequel  $f \mid T$  soit lisse. Supposons que l'on ait l'inclusion  $C_{f|\overline{T}}(\overline{T}) \cap \pi_p^{-1}(F) \subset C_{f|\overline{F}}(\overline{F})$ . Pour toute stratification  $(T_\tau)$  de  $F$  satisfaisant la condition a), tout couple de strates  $(T, T_\tau)$  satisfait la condition  $a_f$ .

En effet, on a les inclusions:  $C_{f|\overline{T}}(\overline{T}) \cap \pi_p^{-1}(T_\tau) \subset C_{f|\overline{F}}(\overline{F}) \cap \pi_p^{-1}(T_\tau)$  d'après l'hypothèse, et  $C_{f|\overline{F}}(\overline{F}) \cap \pi_p^{-1}(T_\tau) \subset C_{f|\overline{T_\tau}}(\overline{T_\tau}) \cap \pi_p^{-1}(T_\tau)$  puisque l'image de  $F$  est un point et que la stratification  $(T_\tau)$  de  $F$  satisfait la condition a).

**DÉFINITION 1.3.6.** Si un couple  $(T, F)$  vérifie les hypothèses de 1.3.5.2, nous dirons encore qu'il satisfait  $a_f$ .

Par analogie avec les conditions de Whitney strictes introduites par Hironaka ([11]), on peut introduire une version stricte de la condition  $a_f$ , qui est une généralisation de la condition c) de ([43], 2.5 et [39] §2) comme il est expliqué dans l'appendice de [44] (voir aussi [8], 1.1):

**DÉFINITION 1.3.7.** Soient  $f : (Z, 0) \rightarrow (S, 0)$  un morphisme d'espaces analytiques complexes réduits, dont la restriction à un ouvert analytique dense  $Z_0$  de  $Z$  est lisse à fibres de dimension pure  $d$ , et soit  $Y$  un sous-espace analytique fermé non singulier de  $Z$  tel que  $f|_Y$  soit une submersion sur un sous-espace analytique fermé non-singulier de  $S$ . Soit  $Z \subset S \times \mathbb{C}^N$  un plongement local tel que  $f$  soit induit par la première projection. Nous dirons que le couple de strates  $(Z_0, Y)$  satisfait la condition  $w_f$  en un point  $0$  de  $Y$  s'il existe un voisinage  $U$  de  $0$  dans  $Z$  et une constante  $C$  tels que l'on ait pour tout  $y \in U \cap Y$  et tout  $z \in U \cap Z_0$  l'inégalité:

$$\text{dist}(T_{Y(f(y)), y}, T_{Z(f(z)), z}) \leq C \text{ dist}(z, Y)$$

où la première distance est la distance angulaire dans la grassmannienne (voir [11], §1, ou [41], Chap. 3, §2, ou [8], §1) et la seconde est la distance pour la métrique induite sur  $S \times \mathbb{C}^N$  par un plongement local  $S \subset \mathbb{C}^r$ .

Cette condition ne dépend pas des plongements (voir [8]) et l'on peut en particulier supposer que  $Y$  est plongé linéairement dans  $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^N$ .

Cette condition peut être traduite en une condition algébrique sur l'espace conormal relatif:

**PROPOSITION 1.3.8.** Reprenons la situation de 1.3.7 et notons  $C_f(Z) \subset S \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{P}^{N-1}$  l'espace conormal relatif. Soient  $Z_0$  un ouvert analytique dense de  $Z$  sur lequel  $f$  est lisse et  $0$  un point de  $Y$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:

- i) Le couple de strates  $(Z_0, Y)$  satisfait la condition  $w_f$  en  $0$ .
- ii) En tout point de  $\kappa_f^{-1}(0)$ , l'idéal  $I$  définissant l'intersection  $C_f(Y) \cap C_f(Z)$  est entier dans  $\mathcal{O}_{C_f(Z)}$  sur l'idéal  $J$  définissant  $\kappa_f^{-1}(Y)$ .

*Remarque.* On a toujours l'inclusion  $J \subset I$ . Le couple  $(Z_0, Y)$  satisfait  $a_f$  en  $0$  si et seulement si on a l'égalité des racines  $\sqrt{J} = \sqrt{I}$ , et la proposition ci-dessus

montre que  $(Z_0, Y)$  satisfait  $w_f$  si et seulement si on a l'égalité des fermetures intégrales  $\bar{J} = \bar{I}$ .

**DÉMONSTRATION:** La question est locale sur  $Z$  et  $S$ , et nous pouvons supposer que  $S$  est un sous-espace fermé de  $\mathbb{C}'$ .

Choisissons des coordonnées locales  $w_1, \dots, w_r$  pour  $\mathbb{C}'$  telles que  $f(Y)$  soit définie par  $w_1 = w_2 = \dots = w_s = 0$ , des coordonnées  $y_1, \dots, y_t, w_{s+1}, \dots, w_r$  pour  $Y$ , des coordonnées  $y_1, \dots, y_t, z_{t+1}, \dots, z_N$  pour  $\mathbb{C}^N$  et enfin un système de coordonnées homogènes  $(b_1 : \dots : b_t : a_{t+1} : \dots : a_N)$  de  $\mathbb{P}^{N-1}$ . L'idéal définissant  $\kappa_f^{-1}(Y)$  dans  $C_f(Z)$  est engendré par  $(w_1, \dots, w_s, z_{t+1}, \dots, z_N) \mathcal{O}_{C_f(Z)}$ .

Remarquons que l'espace  $C_f(Y) \cap C_f(Z)$  est contenu dans  $\kappa_f^{-1}(Y)$  et que dans chacun des ouverts  $U_k$  de  $C_f(Z)$  définis par la condition  $a_k \neq 0$ , l'idéal définissant  $C_f(Y) \cap C_f(Z)$  dans  $C_f(Z)$  est engendré par  $(w_1, \dots, w_s, z_{t+1}, \dots, z_N, b_1/a_k, \dots, b_t/a_k)$ .

La distance de l'espace  $T$  tangent en 0 à la fibre  $Y(0)$  à l'espace tangent en  $z$  à la fibre  $f^{-1}(f(z))$  est le supremum des distances de  $T$  aux hyperplans tangents en  $z$  à  $f^{-1}(f(z))$ :

$$\text{dist}(T, T_{Z(f(z)), z}) = \sup_{H \supset T_{Z(f(z)), z}} \text{dist}(T, H)$$

où  $H$  désigne un hyperplan de  $\mathbb{C}^N$ .

Si  $H \in \mathbb{P}^{N-1}$  a pour coordonnées  $(b_1 : \dots : b_t : a_{t+1} : \dots : a_N)$ , on a:

$$\text{dist}(T, H) = \sup_{\eta \in T - \{0\}} \left( \frac{|\sum b_i \eta_i|}{\|\eta\| (\sum |b_i|^2 + \sum |a_k|^2)^{1/2}} \right)$$

Prouvons que i) entraîne ii): la condition i) est l'existence d'un voisinage  $W$  de 0 dans  $Z$  et d'une constante positive  $C$  tels que, pour tout point  $(z, H) \in C_f(Z)$  où  $z$  appartient à  $W$  et  $H$  a pour coordonnées homogènes  $(b_1 : \dots : b_t : a_{t+1} : \dots : a_N)$ , on ait l'inégalité:

$$\sup_{dy \in T - \{0\}} \left( \frac{|\sum b_i dy_i|}{\|dy\| (\sum |b_i|^2 + \sum |a_k|^2)^{1/2}} \right) \leq C \text{ dist}(z, Y)$$

où  $T$  désigne l'espace tangent en 0 à la fibre  $Y(0)$ . Ceci implique que les  $b_i$  sont nuls sur  $\kappa_f^{-1}(Y)$ , qui est donc contenu dans la réunion des ouverts  $U_k$ . Prenant tous les  $dy_i$  nuls sauf un, on en déduit aussitôt que tout point de  $\kappa_f^{-1}(W) \cap U_k$

possède un voisinage  $V$  dans  $C_f(Z)$  tel qu'il existe une constante  $C'$  telle que pour  $(z, H) \in V$ , on ait, pour  $1 \leq i \leq t$ :

$$\left| \frac{b_i}{a_k} \right| \leq C' \cdot \text{Sup} (|w_1|, \dots, |w_s|, |z_{t+1}|, \dots, |z_N|)$$

ce qui équivaut, d'après ([41], Chap. 1, 1.3) à la relation de dépendance intégrale cherchée.

Prouvons que ii) entraîne i): l'hypothèse implique que les  $b_i$  sont tous nuls sur  $C_f(Y) \cap C_f(Z)$ , qui est donc contenu dans la réunion des  $U_k$ , et que sur  $U_k$ , les fonctions  $b_1/a_k, \dots, b_t/a_k$  définissent des éléments entiers sur l'idéal  $(w_1, \dots, w_s, z_{t+1}, \dots, z_N)\mathcal{O}_{C_f(Z)}$  en tout point de  $\kappa_f^{-1}(Y) \cap U_k$ , donc aussi entiers dans  $V \cap U_k$ , où  $V$  est un voisinage de  $\kappa_f^{-1}(Y)$  dans  $C_f(Z)$ . Puisque  $\kappa_f$  est propre, l'image de  $V$  par  $\kappa_f$  contient un voisinage ouvert  $W$  de  $Y$  dans  $Z$ .

Si  $H \in \check{\mathbb{P}}^{N-1}$  a pour coordonnées  $(b_1 : \dots : b_t : a_{t+1} : \dots : a_N)$ , on a:

$$\sup_{\eta \in T - \{0\}} \left( \frac{|\sum b_i \eta_i|}{\|\eta\| (\sum |b_i|^2 + \sum |a_k|^2)^{1/2}} \right) \leq \frac{t \sup |b_i|}{(\sum |b_i|^2 + \sum |a_k|^2)^{1/2}}$$

D'après ([41], Chap. 1.3), la dépendance intégrale implique que pour tout point  $(z, H)$  de  $V$ , il existe un voisinage  $V(z, H)$  de  $(z, H)$  contenu dans un des  $U_k$  et une constante  $C(z, H) \geq 0$  tels que, pour  $1 \leq i \leq t$ :

$$\left| \frac{b_i}{a_k} \right| \leq C(z, H) \text{Sup} (|w_1|, \dots, |w_s|, |z_{t+1}|, \dots, |z_N|)$$

Soit  $K$  un voisinage compact de  $0$  dans  $Z$  contenu dans  $W$ ; d'après la propriété de  $\kappa_f$ , le compact  $\kappa_f^{-1}(K)$  est recouvert par un nombre fini  $V_1, \dots, V_m$  de voisinages de la forme  $V(z, H)$  auxquels sont attachés des constantes  $C_1, \dots, C_m$ . On pose  $C = t \sup C_i$ . Si  $z$  est un point de  $K$ , pour tout hyperplan  $H$  tangent à la fibre  $f^{-1}(f(z))$ , on a donc  $\text{dist}(T, H) \leq C \text{dist}'(z, Y)$ , où la distance  $\text{dist}'(z, Y) = \text{Sup} (|w_1|, \dots, |w_s|, |z_{t+1}|, \dots, |z_N|)$  est équivalente à la distance induite par la métrique de  $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^N$ . ■

**Remarque 1.3.9.** Rappelons que dans le cas où  $S$  est un point, il est prouvé dans ([41], Chap. 5) que le couple de strates  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions a) et b) de Whitney en un point  $0 \in Y$  si et seulement si il satisfait la condition  $w$ ) en  $0$ , donc au voisinage de  $0$ .

#### 1.4. Modification de Nash

Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme satisfaisant les hypothèses de 1.2.4.1. Il existe donc un ouvert dense  $X_0$  de  $X$  sur lequel le module  $\Omega_f^1$  des différentielles relatives est localement libre. Supposons que son rang soit constant sur cet ouvert, donc égal à  $d = \dim_f X$ . Soit  $g : G \rightarrow X$  la grassmannienne des quotients localement libres de rang  $d$  de  $\Omega_f^1$  (Voir [4]). Le  $\mathcal{O}_{X_0}$ -module localement libre  $\Omega_f^1|_{X_0}$  détermine une section  $\sigma$  de  $g$  au-dessus de  $X_0$ . D'après un théorème de Remmert ([32]), l'adhérence dans  $G$  de l'image de  $\sigma$  est un sous-espace analytique fermé de  $G$ .

**DÉFINITION 1.4.1** (Voir [39], [10], [40]). On appelle modification de Nash de  $X$  relative à  $f$  la restriction  $v_f$  de  $g$  à l'adhérence  $N_f(X)$  de l'image de  $\sigma$  dans  $G$ .

L'image de la section  $\sigma$  est l'ouvert dense  $v_f^{-1}(X_0)$  de  $N_f(X)$  et le morphisme  $v_f$  induit un isomorphisme analytique de  $v_f^{-1}(X_0)$  sur  $X_0$ . Ce morphisme est propre puisque  $g$  l'est; c'est donc une modification de  $X$ .

1.4.2. Supposons maintenant  $X$  plongé dans  $S \times \mathbb{C}^N$ , ce qui est toujours possible localement. Considérons le morphisme  $\gamma_f$  de  $X_0$  dans la Grassmannienne  $G(N, d)$  des  $d$ -plans de  $\mathbb{C}^N$  qui à  $x \in X_0$  associe la direction de l'espace tangent en  $x$  à la fibre de  $f$  passant par  $x$ . L'adhérence dans  $X \times G(N, d)$  du graphe de  $\gamma_f$  est un sous-espace analytique de  $X \times G(N, d)$  d'après le théorème de Remmert déjà invoqué. Muni de la projection sur  $X$  induite par la première projection du produit  $X \times G(N, d)$ , il est  $X$ -isomorphe à  $N_f(X)$ . On peut donc identifier  $N_f(X)$  à l'espace analytique formé des couples  $(x, T) \in X \times G(N, d)$  où  $x$  est un point de  $X$  et  $T$  une direction limite en  $x$  d'espaces tangents aux fibres de  $f$  en des points non-singuliers.

Dans ce cas, on notera encore  $\gamma_f$  le morphisme  $N_f(X) \rightarrow G(N, d)$  induit par la seconde projection, et on l'appellera morphisme de Gauss relatif.

**OBSERVATION.** On sait (voir [7]) que la bonne position par rapport aux sous-espaces linéaires de  $\check{\mathbb{P}}^{N-1}$  de la famille des fibres du morphisme conormal relatif au-dessus d'un sous-espace  $Y$  de  $X$  n'implique pas celle de la famille des fibres de la modification de Nash relative par rapport aux variétés de Schubert de la Grassmannienne, mais la variété  $|\kappa_f^{-1}(x)|$  des limites en  $x$  d'hyperplans tangent aux fibres de  $f$  détermine la variété  $|v_f^{-1}(x)|$  des limites en  $x$  d'espaces tangents aux fibres de  $f$ , et inversement; en effet, l'isomorphisme analytique naturel de la grassmannienne  $\check{G}$  des  $(N-d-1)$ -plans de  $\check{\mathbb{P}}^{N-1}$  sur la grassmannienne  $G$  des  $(d-1)$ -plans de  $\mathbb{P}^{N-1}$  identifie l'espace des espaces projectifs  $\mathbb{P}^{N-d-1}$  contenus dans  $\kappa_f^{-1}(x)$  avec la fibre  $|v_f^{-1}(x)|$  de la modification de Nash.

### 1.5. Variétés polaires

Dans [22], on a introduit les variétés polaires locales et dans [40] et [41] les variétés polaires locales relatives. Pour la commodité du lecteur, nous rappelons les principaux faits les concernant, et renvoyons à *loc. cit.* pour les démonstrations.

1.5.1. Soit  $f: X \rightarrow S$  un morphisme satisfaisant les hypothèses de 1.2.4.1 et 1.3.2. Soient  $\mathcal{D} = \{0 = D_N \subset D_{N-1} \subset \cdots \subset D_0 = \mathbb{C}^N\}$  un drapeau de sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}^N$  et  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d)$  une suite d'entiers. Considérons le sous-ensemble  $\sigma_{\mathbf{a}}(\mathcal{D}) = \{T \in G(N, d) / \dim(T \cap D_{d+a_i-i}) \geq i\}$ . C'est la variété de Schubert associée à  $\mathbf{a}$  et  $\mathcal{D}$ . Par un argument de transversalité (cf. [41], Chap. 4, Prop. 2), on prouve que pour tout  $\mathbf{a}$ , il existe un ouvert de Zariski dense  $U_{\mathbf{a}}$  de l'espace des drapeaux de  $\mathbb{C}^N$  tel que pour  $\mathcal{D} \in U_{\mathbf{a}}$ , l'espace  $\gamma_f^{-1}(\sigma_{\mathbf{a}}(\mathcal{D})) \cap \nu_f^{-1}(X_0)$  soit un ouvert dense de  $|\gamma_f^{-1}(\sigma_{\mathbf{a}}(\mathcal{D}))|$  et que ce dernier soit vide ou purement de codimension  $\sum a_i$  dans  $N_f(X)$ .

Dans l'étude des espaces conormaux n'intervient que le cas où  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_k = (1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  avec  $k$  fois 1.

**DÉFINITION 1.5.2.** On appelle variété polaire locale relative associée à  $\mathbf{a}$  et  $\mathcal{D}$  le sous-ensemble analytique complexe de  $X$  image réduite par  $\nu_f$  de  $\gamma_f^{-1}(\sigma_{\mathbf{a}}(\mathcal{D}))$ . Dans le cas où  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_k$ , on note cet ensemble analytique  $P_k(f; \mathcal{D})$  et comme il ne dépend que de  $D_{d-k+1}$ , on le note aussi  $P_k(f; D_{d-k+1})$ .

1.5.3. Dans ([41], Chap. 4, §3, th. 3.1), il est prouvé qu'il existe un ouvert de Zariski dense  $U_k \subseteq U_{\mathbf{a}_k}$  de la grassmannienne des sous-espaces de codimension  $d - k + 1$  tel la multiplicité en  $x$  de  $P_k(f; D_{d-k+1})$  soit indépendante de  $D_{d-k+1} \in U_k$ , et ne dépende que du type analytique en  $x$  du morphisme  $f$ .

Par abus de langage, nous parlerons souvent de "la" variété polaire relative pour signifier une variété polaire relative assez générale, i.e., associée à un  $D_{d-k+1}$  assez général.

Si l'on considère la projection  $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$  de noyau  $D_{d-k+1}$  assez général, et la projection  $\pi: S \times \mathbb{C}^N \rightarrow S \times \mathbb{C}^{d-k+1}$  qui s'en déduit, l'adhérence dans  $X$  de l'ensemble des points critiques de la restriction de  $\pi$  à  $X_0$  coïncide avec la variété polaire relative associée à  $D_{d-k+1}$ .

1.5.4. Dans le cas où  $S$  est un point, les variétés polaires relatives sont appelées variétés polaires locales (absolues), et notées  $P_k(X, x; D_{d-k+1})$  ou  $P_k(X; D_{d-k+1})$ . Pour désigner une variété polaire assez générale, on écrira  $P_k(X, x)$  ou même seulement  $P_k$ .

On peut penser à  $P_k$  comme adhérence dans  $X$  de l'espace critique de la restriction à  $X^0$  d'une projection linéaire assez générale  $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ ; on écrira donc aussi la variété polaire correspondante  $P_k(X; p)$ .



D'après ([22], 4.1.8), le morphisme du cône tangent  $C_{P_k,0}$  dans  $\mathbb{C}^{d-k+1}$  est fini, donc, par spécialisation sur le cône tangent et le théorème de préparation de Weierstrass, le morphisme de  $P_k$  dans  $\mathbb{C}^{d-k+1}$  est fini. Si la variété polaire  $P_k$  n'est pas vide, son image dans  $\mathbb{C}^{d-k+1}$  par la projection  $p$  qui sert à la définir est une hypersurface réduite que nous appellerons image polaire de dimension  $d - k$  de  $X$ . Si la variété polaire est vide, nous dirons que l'image polaire correspondante est vide.

L'image polaire est appelée dirimant dans [8].

### 1.5.5. Variétés polaires et espace conormal

Replaçons nous dans la situation de 1.5.1, et soit  $D_{d-k+1}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^N$  de codimension  $d - k + 1$ . Notons  $L^{d-k} \subset \check{\mathbb{P}}^{N-1}$  le sous-espace projectif des hyperplans de  $\mathbb{C}^N$  qui contiennent  $D_{d-k+1}$ . On peut caractériser les variétés polaires de la façon suivante (cf. [41]) Chap. 4, 4.1.1 ou [8] 3.2.1(c)):

1.5.5.1. Si  $D_{d-k+1}$  est assez général, l'image réduite par le morphisme conormal relatif  $\kappa_f$  de l'image inverse de  $L^{d-k}$  par le morphisme  $\lambda_f$  (défini au  $N^0$  1.2.4.2) est égale à la variété polaire  $P_k(f; D_{d-k+1})$ :

$$|\kappa_f(\lambda_f^{-1}(L^{d-k}))| = P_k(f; D_{d-k+1})$$

Pour cette raison, nous noterons parfois la variété polaire de  $X$  associé à  $p$  sous la forme  $P_L(f)$ , ou même simplement  $P_L$ , pour indiquer sa dépendance par rapport au sous-espace  $L = L^{d-k} \subset \check{\mathbb{P}}^{N-1}$  des hyperplans contenant  $\text{Kerp}$ .

**PROPOSITION 1.5.5.2.** *Pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq d$ , le morphisme*

$$\kappa_f \mid \lambda_f^{-1}(L^{d-k}) : \lambda_f^{-1}(L^{d-k}) \rightarrow P_k(f; D_{d-k+1})$$

*est une modification pourvu que  $D_{d-k+1}$  soit assez général.*

*Preuve.* Posons  $P_L = P_k(f; D_{d-k+1})$ , et notons  $\lambda_L : C_f(P_L) \rightarrow \check{\mathbb{P}}^{N-1}$  le morphisme associé à la construction de l'espace conormal de  $P_L$ ; l'ensemble des points  $z$  de  $P_L^0 \cap X^0$  où  $T_{P_L(f(z)),z} + D_{d-k+1}$  n'est pas un hyperplan est contenu dans une variété polaire relative qui est l'image par la modification de Nash relative  $\nu_f$  de l'image inverse par  $\gamma_f$  d'une variété de Schubert de la Grassmannienne qui est rare dans celle qui définit  $P_L$ . Comme dans Loc. cit., on utilise le théorème de transversalité de Kleiman pour montrer que pour une projection assez générale, cette variété polaire est rare dans  $P_L$ . En tout point  $z$  de cet ouvert de  $P_L^0 \cap X^0$  dense dans  $P_L$  (voir [41], Chap. 4, 1.3.2) où  $T_{P_L(f(z)),z} +$

$D_{d-k+1}$  est un hyperplan de  $\mathbb{C}^N$ , cet hyperplan coïncide avec  $T_{X(f(z)),z} + D_{d-k+1}$ , et est l'unique hyperplan tangent à  $X(f(z))$  en  $z$  contenant  $D_{d-k+1}$ ; cela définit en ce point la section cherchée de  $\kappa_f | \lambda_f^{-1}(L^{d-k})$ , dont l'image est contenue dans  $\lambda_L^{-1}(L^{d-k})$ , ce qui achève la démonstration. ■

### 1.6. Spécialisation sur le cône normal

Etant donné un espace analytique  $X$  et un sous-espace analytique fermé  $Y$  de  $X$  défini par l'idéal cohérent  $J$  de  $\mathcal{O}_X$ , le cône normal de  $X$  le long de  $Y$  est par définition l'espace  $C_{X,Y} = \text{Specan}(gr_J \mathcal{O}_X)$  où  $gr_J \mathcal{O}_X$  désigne la  $\mathcal{O}_Y$ -algèbre graduée de présentation finie  $\bigoplus_{k \geq 0} J^k/J^{k+1}$  (Voir [11]). Le cône normal  $C_{X,Y}$  est donc naturellement muni d'une projection analytique sur  $Y$ , dont les fibres sont des cônes, et contient  $Y$  comme "section nulle".

Si  $Y$  est non-singulier en  $y$ , on peut choisir au voisinage de  $y$  un plongement de  $X$  dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}^N$  et une rétraction analytique complexe  $r: U \rightarrow Y$ . Ensemblistement,  $|C_{X,Y}|$  peut être identifié au voisinage de  $y$  avec le cône des limites de sécantes  $xr(x)$  quand  $x$  tend vers un point de  $Y$  voisin de  $y$  (Voir [11]).

La construction de la spécialisation sur le cône normal est essentiellement due à Gerstenhaber ([3]) dans le cas local. Elle a été redécouverte plusieurs fois (voir [37], [1]). Nous suivons ici la présentation de [37], auquel nous renvoyons pour des démonstrations détaillées.

Soient  $\mathcal{O}$  un anneau et:

$$\mathcal{O} = \mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{H}_i \supset \mathcal{H}_{i+1} \supset \cdots$$

une filtration décroissante telle que  $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_0$ . Posons  $\mathcal{H}_i = \mathcal{O}$  pour  $i \leq 0$ .

1.6.1. Considérons l'anneau gradué (Algèbre de Rees généralisée)  $\mathbf{R}_{\mathcal{H}} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_i v^{-i} \subset \mathcal{O}[v, v^{-1}]$ . Dans d'assez nombreux cas, et en particulier quand  $\mathcal{O}$  est une algèbre analytique et  $\mathcal{H}_i = J^i$  pour un idéal  $J$  de  $\mathcal{O}$ , la  $\mathcal{O}$ -algèbre  $\mathbf{R}_{\mathcal{H}}$  est de présentation finie. Si nous nous restreignons au cas où  $\mathcal{O}$  est une algèbre analytique et donc contient  $\mathbb{C}$ , le morphisme composé  $\mathbb{C}[v] \rightarrow \mathbf{R}_{\mathcal{H}}$  déduit des inclusions  $\mathbb{C}[v] \subset \mathcal{O}[v] \subset \mathbf{R}_{\mathcal{H}}$  est plat. Lorsque  $\mathbf{R}_{\mathcal{H}}$  est une  $\mathcal{O}$ -algèbre de présentation finie, on peut construire l'espace analytique  $\mathbf{X} = \text{Specan}(\mathbf{R}_{\mathcal{H}})$  et un morphisme plat  $f: \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$ , qui est de plus muni d'une section  $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{X}$  qui pique le point marqué dans chaque fibre. On vérifie facilement que pour tout  $v \neq 0$ , le germe en  $\sigma(v)$  de la fibre  $f^{-1}(v)$  est isomorphe au germe  $(X, x)$  correspondant à  $\mathcal{O}$ , tandis que  $f^{-1}(0)$  est isomorphe à l'analysé du cône correspondant au gradué  $gr_{\mathcal{H}} \mathcal{O}$  associé à la filtration  $\mathcal{H}$ . Dans le cas où  $\mathcal{H}$  est une filtration  $J$ -adique, ce morphisme réalise donc une spécialisation de  $(X, x)$  sur le germe en  $x$  du cône normal dans  $X$  du sous-espace défini par  $J$ . Dans ce cas, nous noterons  $\mathcal{O}_J$



l'anneau associé à  $\mathcal{O}$  et à la filtration  $J$ -adique  $\mathbf{J}$ . Cette construction naturelle se globalise pour donner une spécialisation du couple  $(X, Y)$  d'un espace analytique  $X$  et d'un sous-espace analytique fermé  $Y$  sur le couple  $(C_{X,Y}, Y)$  formé du cône normal  $C_{X,Y}$  de  $Y$  dans  $X$  et de son sommet  $Y$ .

1.6.2. Dans le cas d'une filtration  $J$ -adique, on peut donner une interprétation géométrique (Voir [23], 1.4.3) de cette construction comme ceci: notons  $Z \rightarrow X \times \mathbb{C}$  l'éclatement dans  $X \times \mathbb{C}$  du sous-espace  $Y \times \{0\}$  défini dans  $X \times \mathbb{C}$  par l'idéal  $(J, v)$  de  $\mathcal{O}_Z$  engendré par  $J$  et une coordonnée  $v$  sur  $\mathbb{C}$  s'annulant en 0. On vérifie que le faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -algèbres  $\mathbf{R}_{\mathcal{X}}$  obtenu en faisceautisant la construction ci-dessus s'identifie au faisceau des fonctions analytiques, algébriques en  $v$ , sur l'ouvert  $\mathbf{X}$  de  $Z$  où l'idéal  $(J, v) \cdot \mathcal{O}_Z$  du diviseur exceptionnel est engendré par  $v$ . Le morphisme  $f$  s'identifie alors au morphisme composé  $\mathbf{X} \subset Z \rightarrow X \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

1.6.3. Dans le cas local et lorsque  $\mathcal{H}$  est la filtration par les puissances d'un idéal  $J$  de  $\mathcal{O}$  définissant un germe de sous-espace non-singulier  $Y$  de  $X$  en  $x$ , l'on peut aussi construire  $\mathbf{X}$  comme ceci:

Choisissons un plongement local  $(X, x) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ , et soit  $I$  l'image réciproque de  $J$  par la surjection correspondante  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N, 0} \rightarrow \mathcal{O}$ . Pour chaque élément  $g \in \mathcal{O}_N = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N, 0}$  posons  $v(g) = \sup \{n/g \in I^n\}$  et notons  $\text{in}_I(g)$  la forme initiale de  $g$  dans  $\text{gr}_I \mathcal{O}_N = \bigoplus_{i \geq 0} I^i/I^{i+1}$ , c'est-à-dire l'image de  $g$  dans  $I^{v(g)}/I^{v(g)+1}$ .

Choisissons des équations locales  $(g_1, \dots, g_k)$  pour  $X$  dans  $\mathbb{C}^N$  telles que leurs formes initiales  $\text{in}_I g_i$  engendrent l'idéal  $\text{in}_I J$  de  $\text{gr}_I \mathcal{O}_N$  engendré par les formes initiales des éléments de  $J$ , c'est-à-dire l'idéal définissant le cône normal  $C_{\mathbb{C}^N, Y}$  de  $\mathbb{C}^N$  le long de  $Y$ .

Posons  $m_i = v(g_i)$ , choisissons des coordonnées locales  $z_1, \dots, z_t, z_{t+1}, \dots, z_N$  de  $\mathbb{C}^N$  telles que  $Y$  soit défini par l'idéal  $I = (z_{t+1}, \dots, z_N) \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N, 0}$ , et soit  $\mathbf{X}$  le sous-espace de  $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$  défini au voisinage de  $\{0\} \times \mathbb{C}$  par les équations  $v^{-m_i} g_i(z_1, \dots, z_t, vz_{t+1}, \dots, vz_N) = 0, 1 \leq i \leq k$ . On notera  $f$  la restriction à  $\mathbf{X}$  de la projection sur  $\mathbb{C}$ . Pour  $v \neq 0$ , les fibres sont toutes isomorphes à  $X$  par l'homothétie de rapport  $v$ , et pour  $v = 0$ , on retrouve bien les équations du cône normal de  $X$  le long de  $Y$ .

Vérifions l'assertion de 1.6.2 dans ce cadre local; d'après le Lemme 6 du Chapitre 3, §2 de [9], qui est valide sans supposer la non-singularité du centre d'éclatement, les équations  $v^{-m_i} g_i(z_1, \dots, z_t, vz_{t+1}, \dots, vz_N) = 0, 1 \leq i \leq k$  sont précisément les équations définissant, dans l'ouvert de l'éclaté de  $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$  le long de  $Y \times \{0\}$  où  $v$  engendre l'idéal engendré par  $(J, v)$ , le transformé strict de  $X \times \mathbb{C}$ .

**DÉFINITION 1.6.4.** On appellera  $f: \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$  la spécialisation de  $X$  sur le cône normal  $C_{X,Y}$  en  $x$ . Dans le cas où  $Y = \{x\}$ , et donc  $J = m$ , idéal maximal de  $\mathcal{O}_{X,x}$ , on appellera  $f$  la spécialisation de  $X$  sur son cône tangent  $C_{X,x}$  en  $x$ .

La Proposition (1.3.8) a comme corollaire un avatar du Th. 3.1 de [28]:

**PROPOSITION 1.6.5.** *Soient  $X$  un espace analytique complexe purement de dimension  $d$ ,  $Y$  un sous-espace non-singulier de  $X$ , et  $0$  un point de  $Y$ . Soit  $f: \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$  la déformation de  $X$  sur le cône normal  $C_{X,Y}$  et  $\mathbf{X}^0$  la partie de  $\mathbf{X} - f^{-1}(0)$  lisse au-dessus de  $\mathbb{C}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- i) *Le couple de strates  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions a) et b) de Whitney (ou, ce qui est équivalent, la condition w)) en  $0$ .*
- ii) *Le couple de strates  $(\mathbf{X}^0, Y \times \mathbb{C})$  satisfait la condition  $w_f$  en  $(0, 0)$ .*

Prouvons  $i) \Rightarrow ii)$ : Notons  $h$  l'isomorphisme  $\mathbf{X}^0 \rightarrow X^0 \times \mathbb{C}^*$  qui au point de coordonnées  $(y_1, \dots, y_t, z_{t+1}, \dots, z_N, v)$  associe le point de coordonnées  $(y_1, \dots, y_t, vz_{t+1}, \dots, vz_N, v)$ . Si  $(b_1: \dots: b_t: a_{t+1}: \dots: a_N)$  est un hyperplan tangent à la fibre de  $f$  en  $z$ , l'hyperplan  $(vb_1: \dots: vb_t: a_{t+1}: \dots: a_N)$  est tangent à  $X^0 \times \{v\}$  en  $h(z)$ , et la distance de  $h(z)$  à  $Y \times \{v\}$  est égale à  $|v| \text{ dist}(z, Y \times \mathbb{C}) = |v| \text{ dist}(z, Y \times \{v\})$ . Il suffit maintenant de regarder l'expression de la distance angulaire donnée dans la preuve de 1.3.8.

Prouvons  $ii) \Rightarrow i)$ : D'après 1.3.8, la condition ii) implique que les idéaux définissant  $C_f(Y \times \mathbb{C}) \cap C_f(\mathbf{X})$  et  $\kappa_f^{-1}(Y \times \mathbb{C})$  dans  $C_f(\mathbf{X})$  ont la même fermeture intégrale en tout point de  $\kappa_f^{-1}(0, 0)$ , donc en tout point de l'image inverse par  $\kappa_f$  d'un voisinage de  $(0, 0)$  dans  $\mathbf{X}$ . Par restriction au-dessus de  $(0, v)$ , pour  $v \neq 0$  assez petit, et application en sens inverse de 1.3.8, on obtient la condition i). ■

## §2. Cônes exceptionnels

**2.1.** Soient  $X$  un espace analytique complexe réduit purement de dimension  $d$ ,  $Y$  un sous-espace analytique fermé de  $X$ ,  $x$  un point non-singulier de  $Y$ , et  $X \supset W \subset U \subset \mathbb{C}^N$  un plongement local en  $x$ , où  $W$  est un voisinage ouvert de  $x$  dans  $X$  plongé comme fermé dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}^N$ . Choisissons une rétraction (que nous supposons analytique ici et dans la suite) locale  $r: U \rightarrow Y$  au voisinage de  $x$  et des coordonnées locales dans  $r^{-1}(0)$ ; nous avons le diagramme normal/conormal de  $X$  le long de  $Y$  et les plongements naturels que voici, où  $t$  est la dimension de  $Y$  et où  $W$  est abusivement noté  $X$ :

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{P}^{N-1-t} \times \check{\mathbb{P}}^{N-1} \supset E_Y C(X) & \xrightarrow{e} & C(X) \subset X \times \check{\mathbb{P}}^{N-1} \\ & \downarrow \kappa' & \downarrow \kappa \\ X \times \mathbb{P}^{N-1-t} \supset E_Y X & \xrightarrow{e} & X \end{array} \quad (*)$$

où  $\kappa$  est le morphisme conormal projectivisé défini en 1.2.4.3,  $e = e_Y$  l'éclatement

de  $Y$  dans  $X$ ,  $\hat{e} = \hat{e}_Y$  l'éclatement dans  $C(X)$  du sous-espace  $\kappa^{-1}(Y)$ , et  $\kappa'$  le morphisme analytique dû à la propriété universelle de l'éclatement. Posons  $\zeta = \kappa \circ \hat{e} = e \circ \kappa'$ , et soit  $\{D_\alpha\}$  la famille finie des espaces réduits sous-jacents aux composantes irréductibles de dimension  $N-2$  du diviseur  $\zeta^{-1}(Y)$ , que nous considérons comme sous-espace de  $Y \times \mathbb{P}^{N-1-t} \times \check{\mathbb{P}}^{N-1}$ . Pour chaque  $\alpha$ , posons  $V_\alpha = |\kappa'(D_\alpha)| \subseteq Y \times \mathbb{P}^{N-1-t}$  et  $W_\alpha = |\hat{e}(D_\alpha)| \subset Y \times \check{\mathbb{P}}^{N-1}$ .

Remarquons que d'après le Hauptsatz, les composantes de  $\zeta^{-1}(Y)$  qui sont de dimension  $< N-2$  sont immergées et donc on a les égalités ensemblistes  $|\zeta^{-1}(Y)| = \bigcup D_\alpha$ ,  $|e^{-1}(Y)| = \bigcup V_\alpha$  et  $|\kappa^{-1}(Y)| = \bigcup W_\alpha$ .

Observations que  $e^{-1}(Y) = \mathbb{P}(C_{X,Y})$ , et que  $|\kappa^{-1}(Y)|$  est, par définition (cf. 1.2.4.2), l'ensemble des limites en des points de  $Y$  d'hyperplans tangents à  $X^0$ .

*Remarque.* Le fait que  $(X^0, Y)$  satisfasse la condition a) de Whitney au voisinage de  $y \in Y$  est équivalent à l'inclusion  $\bigcup W_\alpha(y) \subset \{y\} \times \check{\mathbb{P}}^{N-1-t}$ , où  $\check{\mathbb{P}}^{N-1-t} \subset \check{\mathbb{P}}^{N-1}$  désigne, ici et dans la suite, l'ensemble des hyperplans de  $\mathbb{C}^N$  passant par  $y$  et contenant  $T_{Y,y}$ . En fait lorsque  $Y$  est non-singulier au voisinage du point considéré, nous supposons souvent  $Y$  plongé linéairement dans  $\mathbb{C}^N$ , ce qui permet d'identifier tous les  $\check{\mathbb{P}}^{N-1-t}$ .

Le résultat principal de ce travail relie les  $V_\alpha$  aux conditions de Whitney pour  $X^0$  le long de  $Y$  et à la structure de l'ensemble des hyperplans tangents à  $X$  aux points de  $Y$ :

**THÉORÈME 2.1.1.** *Soient  $X \subset \mathbb{C}^N$  un espace analytique réduit,  $Y \subset X$  un sous-espace non-singulier et  $x \in Y$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- i) *Le couple de strates  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney en  $x$ .*
- ii) *On a l'égalité  $\dim \zeta^{-1}(x) = N-2-t$ , où  $t = \dim Y$ .*
- iii) *Pour chaque  $\alpha$ , la composante  $D_\alpha$  est égale à l'espace conormal relatif de son image  $V_\alpha \subset Y \times \mathbb{P}^{N-1-t}$ , et toutes les fibres du morphisme  $\zeta : D_\alpha \rightarrow Y$  ont la même dimension au voisinage de  $x$ .*

**DÉMONSTRATION.** Nous allons montrer ii)  $\Rightarrow$  i)  $\Rightarrow$  iii)  $\Rightarrow$  ii); L'équivalence de i) et ii) est démontré dans ([41], Chap. 5, Th. 1.2 et dans [7], Théorème 1, p. 579, voir aussi [8], Théorème 6.1), et iii)  $\Rightarrow$  ii) est évident. Prouvons donc i)  $\Rightarrow$  iii). Pour cela nous montrons d'abord:

**LEMME.** *Etant donnés une décomposition locale en produit  $\mathbb{C}^N = Y \times \mathbb{C}^{N-t}$  et un choix de coordonnées  $(y_1, \dots, y_t, z_{t+1}, \dots, z_N; b_1 : \dots : b_t : a_{t+1} : \dots : a_N)$  pour  $\mathbb{C}^N \times \check{\mathbb{P}}^{N-1}$  adapté à cette décomposition, notons  $p : \check{\mathbb{P}}^{N-1} \setminus \text{Proj}(Y) \rightarrow \check{\mathbb{P}}^{N-1-t}$  la projection linéaire associée à ce choix. Soit  $L$  une sous-variété de  $\mathbb{C}^N \times \check{\mathbb{P}}^{N-1}$*

conique par rapport aux homothéties de  $\mathbb{C}^{N-t}$  et telle que la 1-forme  $\alpha = \sum b_i dy_i + \sum a_k dz_k$  s'annule sur tout vecteur tangent à  $L^0$  et que la projection  $\text{Id}(\mathbb{C}^N) \times p$  induise un morphisme fini  $L \rightarrow L_1$  de  $L$  sur son image  $L_1 \subset Y \times \mathbb{C}^{N-t} \times \check{\mathbb{P}}^{N-1-t}$ . Alors  $L_1$  est conique par rapport aux homothéties de  $\mathbb{C}^{N-t}$  et l'espace projectivisé de  $L_1$  par rapport à ces homothéties, noté  $\mathbb{P}(L_1) \subset Y \times \mathbb{P}^{N-1-t} \times \check{\mathbb{P}}^{N-1-t}$  est une sous-variété  $Y$ -Lagrangienne.

Preuve du lemme: D'après l'hypothèse il existe un ouvert dense  $U$  de  $L_1$  au-dessus duquel le morphisme  $L \rightarrow L_1$  est étale. Soient  $u_1 = (x, \xi_{t+1} : \dots : \xi_N)$  un point de  $U$  et  $\mathbf{v}_1$  un vecteur tangent à  $L_1$  en  $u_1$ , ayant pour coordonnées  $(dy_1, \dots, dy_t, dz_{t+1}, \dots, dz_N, \delta_{t+1}, \dots, \delta_N)$ . Soient  $u = (x, \xi_1 : \dots : \xi_t : \xi_{t+1} : \dots : \xi_N)$  un point de  $L$  au-dessus de  $u_1$  et  $\mathbf{v} = (dy_1, \dots, dy_t, dz_{t+1}, \dots, dz_N, \delta_1, \dots, \delta_t, \delta_{t+1}, \dots, \delta_N)$  un vecteur tangent à  $L$  en  $u$ , qui se projette sur  $\mathbf{v}_1$ . Il suffit de prouver que l'on a:

$$\sum_{k=t+1}^N a_k dz_k = 0$$

ce qui résulte de la conicité de  $L$ ; en effet si  $\mathbf{v} = (dy_1, \dots, dy_t, dz_{t+1}, \dots, dz_N, \delta_1, \dots, \delta_t, \delta_{t+1}, \dots, \delta_N)$  est tangent à  $L$  au point de coordonnées  $(y_1, \dots, y_t, z_{t+1}, \dots, z_N; b_1 : \dots : b_t : a_{t+1} : \dots : a_N)$ , pour  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , le vecteur  $\mathbf{v}^\lambda = (dy_1, \dots, dy_t, \lambda dz_{t+1}, \dots, \lambda dz_N, \delta_1, \dots, \delta_t, \delta_{t+1}, \dots, \delta_N)$  est tangent au point  $(y_1, \dots, y_t, \lambda z_{t+1}, \dots, \lambda z_N; b_1 : \dots : b_t : a_{t+1} : \dots : a_N)$  de  $L$  et l'on a

$$\alpha(\mathbf{v}^\lambda) = \sum_{k=t+1}^N \lambda a_k dz_k + \sum_1^t b_i dy_i = 0$$

d'où le résultat.

D'après les résultats 4.4.2 à 4.4.5 de [17], et de l'appendice 4 de [34], le cône normal de  $C(Y) \cap C(X)$  dans  $C(X)$  est la fibre au-dessus de 0 du morphisme composé  $q : C_f(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$  dont la fibre au-dessus du point  $v \in \mathbb{C}$  est une sous-variété qui est isomorphe à  $C(X) \subset \mathbb{C}^N \times \check{\mathbb{P}}^{N-1}$  et Lagrangienne pour la structure donnée par la forme différentielle  $\alpha = \sum b_i dy_i + \sum a_k dz_k$ . Le morphisme  $q$  satisfait l'hypothèse du principe de spécialisation lagrangienne 1.2.6, B). La forme  $\alpha$  s'annule donc sur la partie non-singulière de  $L = |q^{-1}(0)|$ . De plus, (*loc. cit.*), étant donnée une décomposition  $\mathbb{C}^N = Y \times \mathbb{C}^{N-t}$ , cette fibre réduite  $L$  est conique par rapport aux homothéties de  $\mathbb{C}^{N-t}$  puisqu'elle est contenue comme sous-cône du cône normal de  $Y \times \mathbb{C}^{N-t} \times \check{\mathbb{P}}^{N-1}$  le long de  $C(Y) = Y \times \{0\} \times \check{\mathbb{P}}^{N-1-t}$ .

Par ailleurs on suppose que  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney, donc

la condition  $w)$  d'après ([41], Chap. 5). D'après la Proposition 1.3.8, le morphisme de cônes normaux  $C_{C(X), C(Y) \cap C(X)} \rightarrow C_{C(X), \kappa^{-1}(Y)}$  est fini d'après les propriétés de la dépendance intégrale des idéaux (voir [41], Chap. 1, §1, et [24]). Comme  $(X^0, Y)$  satisfait la condition (a) de Whitney, il en résulte que le diviseur exceptionnel  $D \subset E_Y C(X)$  est une sous-variété de  $Y \times \mathbb{P}^{N-t-1} \times \check{\mathbb{P}}^{N-t-1}$  et son cône  $C_{C(X), \kappa^{-1}(Y)}$  est une sous-variété de  $Y \times \mathbb{C}^{N-t} \times \check{\mathbb{P}}^{N-t-1}$  qui est conique par rapport aux homothéties de  $\mathbb{C}^{N-t}$  et est l'image de  $L$  par la projection  $Y \times \mathbb{C}^{N-t} \times \check{\mathbb{P}}^{N-1} \rightarrow Y \times \mathbb{C}^{N-t} \times \check{\mathbb{P}}^{N-t-1}$ . Le lemme ci-dessus montre alors que le diviseur exceptionnel  $D \subset E_Y C(X)$  est une sous-variété  $Y$ -Lagrangienne de  $Y \times \mathbb{P}^{N-t-1} \times \check{\mathbb{P}}^{N-t-1}$ . Chacune de ses composantes irréductibles met en dualité ses images dans  $Y \times \mathbb{P}^{N-t-1}$  et dans  $Y \times \check{\mathbb{P}}^{N-t-1}$ . ■

*Remarque.* Le Théorème ci-dessus contient la version correcte de la malheureuse Proposition 1 de la note [40].

L'équivalence de i) et iii) peut être reformulée comme ceci:

**COROLLAIRE 2.1.2.** *Le couple de strates  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney si, et seulement si, pour tout  $\alpha$  les images  $V_\alpha$  et  $W_\alpha$  de  $D_\alpha$  sont en  $Y$ -dualité projective. Dans ce cas,  $|\kappa^{-1}(Y)|$  est réunion des  $Y$ -duaux des  $V_\alpha$ . ■*

*Remarque 2.1.2<sup>Bis</sup>.* La condition a) de Whitney pour  $(X^0, Y)$  équivaut clairement au fait que le diviseur exceptionnel ensembliste  $|\xi^{-1}(Y)| \subset Y \times \mathbb{P}^{N-1-t} \times \check{\mathbb{P}}^{N-1}$  soit en fait contenu dans  $Y \times \mathbb{P}^{N-1-t} \times \check{\mathbb{P}}^{N-1-t}$ , où  $\check{\mathbb{P}}^{N-1-t}$  est l'espace des hyperplans contenant (l'espace tangent à)  $Y$ . D'après ce qui précède, si a) est vérifiée, la condition b) de Whitney équivaut à ce que ce diviseur exceptionnel soit de plus  $Y$ -Lagrangien dans  $Y \times \mathbb{P}^{N-1-t} \times \check{\mathbb{P}}^{N-1-t}$ .

Nous verrons plus bas comment l'on peut calculer les  $V_\alpha$ .

Lorsque  $Y$  est un point, les conditions de Whitney sont toujours satisfaites (Lemme de Whitney, [47], corollaire immédiat de 1.3.8). Le théorème 2.1.1 fournit donc, pour chaque  $x \in X$ , une collection de sous-cônes  $\mathbf{O}(V_\alpha)$  du cône tangent  $C_{X,x}$ , contenant en particulier les composantes irréductibles de  $|C_{X,x}|$  et telle que:

**COROLLAIRE 2.1.3.** *L'ensemble  $|\kappa^{-1}(x)| \subset \check{\mathbb{P}}^{N-1}$  des limites d'hyperplans tangents à  $X$  en un point  $x$  est la réunion des variétés projectives duales des  $V_\alpha \subset \mathbb{P}^{N-1}$ . ■*

*Remarque.* Il était connu de Zariski et Hironaka (Communications privées, et

voir [18], th. 1.2.1) que le dual du projectivisé réduit du cône tangent est contenu dans l'ensemble des limites d'hyperplans tangents. Dans le cas où  $X$  est une surface dans  $\mathbb{C}^3$ , on retrouve la structure de ([6]) puisque les cônes  $\mathbf{O}(V_\alpha)$  qui ne sont pas des composantes irréductibles du cône tangent sont des droites qui définissent les tangentes exceptionnelles de  $X$  en  $x$ .

Il est naturel d'introduire la définition suivante:

**DÉFINITION 2.1.4.** Soient  $X \subset \mathbb{C}^N$  un espace analytique réduit et  $Y$  un sous-espace analytique fermé de  $X$ . Notons  $D_\alpha$  les composantes irréductibles de dimension  $N - 2$  du diviseur image inverse de  $Y$  par le morphisme  $E_Y C(X) \rightarrow X$ , et  $V_\alpha$  leurs images dans  $e_Y^{-1}(Y)$ . Les cônes  $Y(V_\alpha)$  qui ne sont pas des composantes irréductibles du cône normal de  $X$  le long de  $Y$  sont appelés cônes exceptionnels de  $X$  le long de  $Y$ .

La collection des  $Y$ -variétés projectives  $V_\alpha$  contenues dans le projectivisé du cône normal de  $X$  le long de  $Y$  (ou, par abus de langage, celle des cônes  $\mathbf{Y}(V_\alpha)$  contenus dans le cône normal de  $X$  le long de  $Y$ ) sera appelée auréole de  $X$  le long de  $Y$ . Lorsque  $Y$  est un point  $x$ , on dira auréole de  $X$  en  $x$ .

*Remarques.* 1) Parmi les  $V_\alpha$ , il y a les composantes irréductibles du projectivisé réduit du cône normal de  $X$  le long de  $Y$ . Tous les  $V_\alpha$  étant contenus dans ce projectivisé, ils héritent d'une projection dans  $Y$ .

2) Bien que les  $V_\alpha$  puissent être définis pour tout  $Y$ , c'est seulement dans le cas où  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney que l'on sait les relier aux limites d'hyperplans tangents.

L'auréole apparaît aussi naturellement dans la déformation sur le cône normal:

**PROPOSITION 2.1.4.1.** Gardons les notations de 2.1, supposons que  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney et posons  $q = f \circ \kappa_f : C_f(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$ . Les cônes  $Y(V_\alpha)$  sont les images ensemblistes par  $\kappa_f$  dans  $f^{-1}(0) = C_{X,Y}$  des composantes irréductibles de la fibre  $q^{-1}(0)$ .

D'après la proposition 4.2.2 de [17] ou l'appendice 4 de [34], le cône normal de  $C(Y) \cap C(X)$  dans  $C(X)$  est la fibre au-dessus de 0 du morphisme composé  $q : C_f(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$ . D'après la Proposition 1.3.8, puisque  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney par hypothèse, l'idéal définissant  $\kappa^{-1}(Y)$  dans  $C(X)$  a même clôture intégrale que l'idéal définissant  $C(Y) \cap C(X)$ . Par conséquent le morphisme naturel  $C_{C(X), C(Y) \cap C(X)} \rightarrow C_{C(X), \kappa^{-1}(Y)}$  des cônes normaux dû à l'inclusion des idéaux est un morphisme fini et les composantes irréductibles de ces deux cônes ont donc les mêmes images dans  $C_{X,Y}$ . Par construction, le



projectivisé de  $C_{C(X), \kappa^{-1}(Y)}$  est la réunion des composants  $D_\alpha$  de 2.1, d'où le résultat. ■

Par ailleurs, l'auréole de  $X$  le long de  $Y$  a la propriété de minimalité suivante:

**PROPOSITION 2.1.4.2.** *Si  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney, une stratification  $Y$ -conique  $(T_\tau)$  de  $|C_{X,Y}|$  qui satisfait la condition a) de Whitney a la propriété que  $(X^0, T_\tau)$  satisfait  $a_f$  pour tout  $\tau$  si et seulement si elle est compatible avec les  $Y(V_\alpha)$ .*

Montrons que si la stratification est compatible avec les  $Y(V_\alpha)$ , les hypothèses de la proposition 1.3.5 sont satisfaites, avec la déformation  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  de  $X$  sur le cône normal  $C_{X,Y}$ . On plonge  $X$  dans  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$  et on note  $p$  la projection de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$  sur  $\mathbb{C}$ . Le morphisme  $f$  est la restriction de  $p$  à  $X$ . On reprend les notations de 1.3.4 avec  $\pi_p: \mathbb{P}T^*(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N/\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$ . D'après la remarque d) suivant la proposition 1.2.6 le sous-espace  $C_f(X)$  de  $\mathbb{P}T^*(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N/\mathbb{C})$  est  $p$ -Lagrangien. Donc, avec  $q = f \circ \kappa_f$ , la fibre  $|q^{-1}(0)|$  est Lagrangienne. D'après la Proposition 2.1.4.1. Si la stratification  $(T_\tau)$  de  $X(0)$  satisfait la propriété (a) de Whitney et est compatible avec les  $Y$ -cones  $Y(V_\alpha)$ , la proposition 1.3.5 a) montre que  $(X^0, T_\tau)$  satisfait  $a_f$  pour tout  $\tau$ .

Réciproquement, soit  $\{T_\tau\}$  une stratification de  $|C_{X,Y}|$  satisfaisant a) et telle que  $(X^0, T_\tau)$  satisfasse  $a_f$  pour tout  $\tau$ . Fixons  $\alpha$ . Il existe un  $\tau$  pour lequel  $T_\tau \cap Y(V_\alpha)$  soit ouvert et dense dans  $Y(V_\alpha)$ . Soit  $z$  un point de l'intersection qui est un point non-singulier de  $Y(V_\alpha)$  et donc de l'espace réduit  $|T_\tau \cap Y(V_\alpha)|$ . Supposons que  $T_\tau \not\subset Y(V_\alpha)$ . Dans ce cas la dimension de  $T_\tau$  est strictement plus grande que celle de  $Y(V_\alpha)$ . Comme  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney, d'après la proposition 2.1.4.1 et le théorème 2.1.1, tout hyperplan tangent à  $Y(V_\alpha)$  en  $z$  est limite d'hyperplans tangents aux fibres de  $f$  et contient donc une direction limite  $T$  en  $z$  d'espaces tangents aux fibres de  $f$ . Comme le plan tangent à  $T_\tau$  en  $z$  est supposé strictement plus grand que celui de  $Y(V_\alpha)$  en  $z$ , il existe un hyperplan tangent à  $Y(V_\alpha)$  qui n'est pas tangent à  $T_\tau$ , c'est-à-dire ne contient aucune direction limite  $T$  d'espaces tangents aux fibres de  $f$  contenue dans l'espace tangent à  $T_\tau$ . Ceci contredit la condition  $a_f$ , donc nécessairement  $T_\tau$  est contenu dans  $Y(V_\alpha)$ . Ainsi chaque  $Y(V_\alpha)$  contient une strate dense, notée  $T_\alpha$ . Si on a  $T_\tau \cap \overline{T_\alpha} = T_\tau \cap Y(V_\alpha) \neq \emptyset$ , d'après la condition de frontière  $T_\tau \subset \overline{T_\alpha} = Y(V_\alpha)$ , ce qui montre que  $\{T_\tau\}$  est compatible avec l'auréole de  $X$  le long de  $Y$ . ■

Montrons maintenant comment le comportement de l'auréole de  $X$  le long de  $Y$  décide des conditions de Whitney:

**PROPOSITION 2.1.5.** *Soient  $X$  un sous-espace analytique fermé réduit d'un ouvert de  $\mathbb{C}^N$  et  $Y$  un sous-espace non-singulier connexe de  $X$ . Le couple  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney si et seulement si, pour chaque  $\alpha$ , toutes les fibres de la projection  $V_\alpha \rightarrow Y$  ont la même dimension.*

*Démonstration.* Supposons les conditions de Whitney satisfaites. On se place en un point  $y$  de  $Y$ ; on peut choisir des coordonnées locales en  $y$  de telle façon que  $Y$  soit plongé linéairement dans  $\mathbb{C}^N$  et que l'on ait une rétraction locale linéaire de  $\mathbb{C}^N$  sur  $Y$  en  $y$ , c'est à dire localement en  $y$  une structure de produit  $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^{N-t} \times \mathbb{C}^t$ , où  $t = \dim Y$ , et  $Y = \{0\} \times \mathbb{C}^t$ . Soit  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{C}^N$  général parmi ceux qui contiennent  $Y$ . Utilisant la rétraction, écrivons le  $H = H_0 \times Y$ , où  $H_0$  est un hyperplan de  $\mathbb{C}^{N-t}$ . D'après ([41], Chap. 5, 1.3),  $(|X \cap H|^0, Y)$  satisfait encore les conditions de Whitney et par ailleurs d'après (Loc. cit., Chap. 5, preuve de 1.2, p. 458) nous avons un morphisme fini du transformé strict  $|X \cap H|^\sim$  par  $\zeta$  de  $X \cap H$  sur  $E_Y C(|X \cap H|)$  qui a la propriété que l'image de  $D_\alpha \cap |X \cap H|^\sim$  dans  $E_Y C(|X \cap H|)$  a pour image dans  $E_Y C(|X \cap H|)$  l'intersection  $V_\alpha \cap (Y \times \mathbb{P}(H_0))$ . Si toutes les fibres de  $V_\alpha \rightarrow Y$  ne sont pas de la même dimension, on se ramène par sections successives au cas où la fibre générale est vide, ce qui est contredit par le fait que le morphisme de chaque  $D_\alpha$  sur  $Y$  est surjectif d'après la condition ii) du théorème 2.1.1.

Inversement, supposons que pour chaque  $\alpha$ , toutes les fibres du morphisme  $V_\alpha \rightarrow Y$  aient la même dimension; ceci implique que pour chaque  $\alpha$ , le morphisme  $D_\alpha \rightarrow Y$  est surjectif. Comme  $D_\alpha$  est irréductible, l'image réciproque d'un ouvert analytique dense de  $Y$  (par exemple celui où  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney) est dense dans  $D_\alpha$ . Comme dans ([41], Chap. 3, 2.3.1) on remarque que les fonctions "sinus de l'angle d'un hyperplan tangent à  $X$  en  $x \in X^0$  et de  $T_{Y,y}$ " et "sinus de l'angle d'un hyperplan tangent à  $X$  en  $x \in X^0$  et de la sécante  $\overline{xy}$ " s'étendent en des fonctions continues sur  $E_Y C(X)$ . Les conditions de Whitney étant satisfaites en tout point d'un ouvert analytique dense de  $Y$  (voir [46], [10], ou [41]), ces fonctions s'annulent en tout point d'un ouvert dense de chaque  $D_\alpha$ , donc sur  $D_\alpha$  tout entier, ce qui implique que les conditions de Whitney sont satisfaites sur tout  $Y$ . ■

**2.2.** Lorsque  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney, la Proposition suivante permet de ramener le calcul de l'auréole, donc celui des limites d'espaces tangents à  $X^0$  le long de  $Y$ , au calcul des cônes normaux le long de  $Y$  des variétés polaires de  $X$ , pour lequel on dispose de méthodes algébriques effectives.

Rappelons d'abord qu'il a été prouvé dans ([41], Chap. 5, §2), que si  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney et si l'on se donne une rétraction locale



$r: X \rightarrow Y$ , les variétés polaires de  $X$  relatives à  $r$  coïncident avec les variétés polaires absolues de  $X$ .

**PROPOSITION 2.2.1.** *Soient  $X$  un espace analytique réduit,  $Y$  un sous-espace non-singulier de  $X$  tel que  $(X^0, Y)$  satisfasse les conditions de Whitney en  $x \in Y$ . Choisissons un plongement local de  $(X, x)$  dans  $(\mathbb{C}^N, 0)$ , une rétraction locale  $r: \mathbb{C}^N \rightarrow Y$ , et identifions  $\mathbb{C}^N$  avec  $Y \times \mathbb{C}^{N-t}$  et avec son cône normal le long de  $Y$ .*

*Pour chaque entier,  $k$ ,  $0 \leq k \leq d-1$ , considérons les projections linéaires  $p: Y \times \mathbb{C}^{N-t} \rightarrow Y \times \mathbb{C}^{d-k-t+1}$  qui induisent l'identité sur  $Y$  et s'écrivent donc  $p = \text{Id}_Y \times p_0$ .*

a) *Si  $p_0$  est assez générale, pour tout  $y \in Y$ , le noyau  $\text{Kerp}_0$  est transverse dans  $\mathbb{C}^{N-t}$  à la fibre en  $y$  du cône normal le long de  $Y$  de la variété polaire  $P_k(X; p)$ .*

b) *Le cône normal le long de  $Y$  de la variété polaire  $P_k(X; p)$  associée à une projection linéaire  $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$  comme ci-dessus est la réunion des  $Y(V_\alpha)$  de dimension  $d-k$  et des variétés polaires relatives de codimension  $j$  (pour la projection sur  $Y$ ) des cônes  $Y(V_\beta)$  de dimension  $d-k+j$  définies par la même projection  $p$ , pour  $j \geq 1$ . (Ces variétés polaires sont bien définies à cause du a)).*

**DÉMONSTRATION.** Puisque d'après ([41], Chap. 5, Th. 1.2, voir aussi [7]), les variétés polaires  $P_k(X; p)$  sont équimultiples le long de  $Y$ , d'après ([25], §5), l'assertion a) équivaut à la transversalité de  $\text{Kerp}$  et du cône tangent en  $y$  à la variété polaire  $P_k(X; p)$ ; cette dernière assertion est prouvée dans [22].

Prouvons b): Le  $Y$ -Projectivisé  $\mathbb{P}(C_k)$  du cône normal de  $P_k(X; p)$  le long de  $Y$ , est l'intersection avec  $e_Y^{-1}(Y)$  du transformé strict de  $P_k$  par  $e_Y$ . D'après les résultats généraux de transversalité ([41], 4.2.5, 4.3.1 et 5.2), c'est aussi l'image par  $\kappa'$  de l'intersection de la réunion des  $D_\alpha$  avec l'image réciproque par  $\hat{e}_Y$  de  $\lambda^{-1}(L^{d-k})$ , où  $L^{d-k}$  est l'espace projectif des hyperplans de  $\mathbb{C}^N$  contenant  $\text{Kerp}$ . Nous avons donc l'égalité:

$$|\mathbb{P}(C_k)| = U_\alpha |\kappa'(D_\alpha \cap (Y \times \mathbb{P}^{N-1-t} \times L_0^{d-k-t}))|,$$

où

$$L_0^{d-k-t} = L^{d-k} \cap \check{\mathbb{P}}^{N-1-t} \subset \check{\mathbb{P}}^{N-1-t}.$$

Remarquons que cette dernière intersection est transversale parce que  $\text{Kerp}$  est transverse à  $Y$ .

La transversalité de  $\text{Kerp}_0$  et des  $V_\alpha(y)$  implique la transversalité des intersections  $L_0 \cap W_\alpha(y)$  et de cela résulte que si  $\dim V_\alpha \geq d-k-1$ , l'image de  $D_\alpha \cap (Y \times \mathbb{P}^{N-1-t} \times L_0^{d-k-t})$  est bien une variété polaire relative de  $V_\alpha$ , égale à  $V_\alpha$  si  $\dim V_\alpha = d-k-1$ . D'après la Proposition 2.1.5, il suffit de raisonner en un

point général de  $Y$ , et par une section transversale ([41], Chap. 3, 4.2.2) on se ramène au cas où  $Y$  est un point.

Puisque  $L^{d-k}$  est supposé assez général, l'intersection de  $D_\alpha$  avec  $\mathbb{P}^{N-1} \times L^{d-k}$  est transversale, et est donc vide ou de dimension  $d-k-1$ . Considérons les  $\alpha$  pour lesquels  $\kappa'(D_\alpha \cap (\mathbb{P}^{N-1} \times L^{d-k}))$  est vide ou de dimension  $d-k-1$ . Si l'image n'est pas vide, elle est contenue dans  $V_\alpha$  et l'on a donc  $\dim V_\alpha \geq d-k-1$ . Si elle est vide,  $D_\alpha \cap (\mathbb{P}^{N-1} \times L^{d-k})$  est vide donc la fibre de  $D_\alpha$  au dessus d'un point de  $V_\alpha$  est de dimension  $< N-1-d+k = N-2-(d-k-1)$  d'après le Théorème de Bézout, ce qui implique  $\dim V_\alpha \geq d-k-1$ . Inversement, supposons avoir  $\dim V_\alpha \geq d-k-1$ ; comme le morphisme  $\kappa' \mid D_\alpha$  fait de  $D_\alpha$  le conormal de  $V_\alpha$  dans  $\mathbb{P}^{N-1}$ , l'image  $\kappa'(D_\alpha \cap (\mathbb{P}^{N-1} \times L^{d-k}))$  est par définition une variété polaire de dimension  $d-k-1$  de  $V_\alpha$ , donc est vide ou de dimension  $d-k-1$  (Voir [22]).

*Remarques 2.2.1.1.* 1) Après la Proposition 2.2.1, on peut retrouver une partie de la Proposition 2.1.5, en utilisant le fait que d'après ([41], Chap. 5, Th. 1.2), si  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney, les variétés polaires de  $X$  sont équimultiples le long de  $Y$ , et que ceci implique d'après [11] ou ([24], §2) l'équidimensionalité des fibres du cône normal de  $Y$  dans les  $P_k(X)$ , dont les  $Y(V_\alpha)$  sont des composantes irréductibles.

2) De ce que nous venons de voir et des résultats de ([41], Chap. 5), il résulte que les morphismes  $V_\alpha \rightarrow Y$  et  $D_\alpha \rightarrow Y$  sont à fibres de dimension constante dès lors qu'ils sont surjectifs: il semble que quelque chose s'oppose à ce qu'ils présentent de l'éclatement.

3) Par contre, les morphismes  $D_\alpha \rightarrow V_\alpha$  peuvent présenter de l'éclatement. Néanmoins, la dimension des fibres générales du morphisme induit  $D_\alpha(y) \rightarrow V_\alpha(y)$  ne dépend pas de  $y$  quand  $(X^0, Y)$  satisfait la condition a) de Whitney.

**DEFINITION 2.2.2.** Soient  $\mathbf{Y}(V_\alpha)$  un cône exceptionnel pour  $X$  le long de  $Y$  et  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{C}^N$  tangent à  $\mathbf{Y}(V_\alpha)$ . Nous dirons que  $H$  est un hyperplan exceptionnel associé à  $V_\alpha$  s'il n'est tangent à aucun des  $\mathbf{Y}(\overline{V}_\beta)$  tels que  $V_\alpha$  soit contenu dans  $\overline{V}_\beta$ .

En un point assez général d'un cône exceptionnel, presque tous les hyperplans tangents sont exceptionnels. Cette terminologie diffère légèrement de celle de [6] et [23] où n'était considéré que le cas où  $X$  est une surface et  $Y$  un point.

La Proposition 2.2.1 montre que les cônes normaux le long de  $Y$  des variétés polaires interviennent de façon essentielle dans la structure de l'ensemble des limites d'hyperplans tangents à  $X$  aux points de  $Y$ , et que ces cônes ont des

composantes dépendant de la projection servant à les définir, et d'autres qui en sont indépendantes, ce qui motive la définition suivante:

**DÉFINITION 2.2.3.** Soient  $Y \subset X$  tels que  $(X^0, Y)$  satisfasse les conditions de Whitney. Les composantes de dimension  $d - k$  du cône normal le long de  $Y$  de la variété polaire de dimension  $d - k$  qui sont des  $Y(V_\alpha)$  ne dépendent pas de la projection  $p$  et sont appelées composantes fixes de ce cône normal. Les autres varient effectivement avec la projection, comme les variétés polaires projectives le font toujours, et sont appelées composantes mobiles.

*Remarque.* Il est immédiat de voir que si  $X$  est le cône  $\mathbf{O}(V)$  sur une variété projective  $V$ , les variétés polaires de  $X$  sont les cônes sur les variétés polaires de  $V$  au sens projectif (Cf. [31]) et n'ont aucune composante fixe à part  $X$  lui-même.

Le résultat suivant précise dans le cas absolu le Corollaire 5.6 de [8] et, joint à la Proposition 2.2.1, nous donne la structure de l'ensemble des hyperplans tangents aux images polaires d'un espace analytique  $X$ :

**THÉORÈME 2.2.4.** *Au voisinage de  $x \in Y \subset X \subset \mathbb{C}^N$ , si  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney en  $x$ , pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq d - 1$ , l'image polaire  $\Delta_k \subset \mathbb{C}^{d-k+1}$  de la variété polaire  $P_k(X; p)$  correspondant à une projection  $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$  assez générale satisfait les conditions de Whitney le long de l'image  $Y_1 = p(Y)$  et a pour auréole le long de  $Y_1$  la collection des images par l'application  $\mathbb{P}|C_{X,Y}| \rightarrow \mathbb{P}C_{\mathbb{C}^{d-k+1}, Y_1}$  induite par  $p$  des  $V_\alpha$  de dimension  $< d - k - 1$  et des composantes irréductibles du cône normal de  $P_k(X, p)$  le long de  $Y$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $L \subset \check{\mathbb{P}}^{N-1}$  l'espace projectif de dimension  $d - k$  formé des hyperplans contenant le noyau de  $p$ . Notons  $P_L$  la variété polaire correspondante et  $\Delta_L$  son image dans  $\mathbb{C}^{d-k+1}$ . On a pour  $\Delta_L$  le diagramme normal/conormal le long de  $Y_1$ :

$$\begin{array}{ccc} E_{Y_1} C(\Delta_L) & \xrightarrow{\hat{e}_L} & C(\Delta_L) \subset \mathbb{C}^{d-k+1} \times \check{\mathbb{P}}^{d-k} \\ \kappa'_L \downarrow & & \downarrow \kappa_L \\ E_{Y_1} \Delta_L & \xrightarrow{e_L} & \Delta_L \subset \mathbb{C}^{d-k+1} \end{array}$$

L'auréole de  $\Delta_L$  est par définition la collection des images par  $\kappa'$  des composantes irréductibles de  $(e_L \circ \kappa'_L)^{-1}(Y_1)$ . Nous allons obtenir ces composantes à partir de la géométrie du diagramme normal/conormal de  $X \subset \mathbb{C}^N$ :

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{P}^{N-1-t} \times \check{\mathbb{P}}^{N-1} \supset E_Y C(X) & \xrightarrow{\hat{e}} & C(X) \subset X \times \check{\mathbb{P}}^{N-1} \\ \kappa' \downarrow & & \downarrow \kappa \\ X \times \mathbb{P}^{N-1-t} \supset E_Y X & \xrightarrow{e} & X \subset \mathbb{C}^N \end{array} \quad (*)$$

Tout d'abord, l'application  $H \mapsto p(H)$  de  $L$  dans  $\mathbb{P}^{d-k}$  induit évidemment un isomorphisme de  $C(\Delta_L; \mathbb{C}^N) \cap (\mathbb{C}^N \times L)$  sur  $C(\Delta_L)$ , où  $C(\Delta_L; \mathbb{C}^N)$  est le conormal de  $\Delta_L$  dans  $\mathbb{C}^N$ .

D'autre part, la même application  $H \mapsto p(H)$  induit un morphisme fini et biméromorphe  $\tau: |\lambda^{-1}(L)| \rightarrow C(\Delta_L)$ .

En effet, le morphisme  $C_{P_L,0} \rightarrow C_{\mathbb{C}^{d-k+1},0}$  induit par  $p$  est fini d'après ([22], 4.1.8), donc le morphisme  $P_L \rightarrow \Delta_L$  induit par  $p$  est fini d'après ([41], Chap. 1, 5.2 ou [22], §1). Il est biméromorphe puisque sinon, en prenant l'image réciproque d'un 2-plan général de  $\mathbb{C}^{k-d+1}$ , on obtiendrait une projection non biméromorphe d'une courbe polaire générale sur son image (voir [20], 4.1.6), en contradiction avec ([41], Chap. 5, Lemme-clé). (Pour une autre démonstration du fait que cette projection est finie et biméromorphe, voir [8], 4.3.6). On a donc un ouvert analytique dense  $U$  de  $P_L$ , isomorphe par  $p$  à un ouvert analytique dense  $U_1$  de  $\Delta_L$ . Comme d'après 1.5.5.2, le morphisme  $|\lambda^{-1}(L)| \rightarrow P_L$  induit par  $\kappa$  est une modification, l'image inverse  $V$  de  $U$  par ce morphisme est dense dans  $\lambda^{-1}(L)$ . L'application  $(x, H) \mapsto (p(x), p(H))$  est un isomorphisme de  $V$  sur l'ouvert  $V_1$  image réciproque de  $U_1$  dans  $C(\Delta_L)$  par  $\kappa_L$ . Par continuité, on obtient le morphisme biméromorphe  $\tau$ , qui est fini puisque la restriction de  $p$  à  $P_L$  l'est (voir aussi [8] 4.3.11).

On construit un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} |\hat{e}^{-1}(\lambda^{-1}(L))| & \longrightarrow & |\lambda^{-1}(L)| \\ \downarrow \hat{\tau} & & \downarrow \tau \\ E_{Y_1}C(\Delta_L) & \longrightarrow & C(\Delta_L) \end{array}$$

où les morphismes horizontaux sont induits par les morphismes  $\hat{e}$  et  $\hat{e}_L$  respectivement,  $\tau$  est le morphisme que nous venons de construire, et  $\hat{\tau}$  le morphisme induit par  $(x, l, H) \mapsto (p(x), p(l), p(H))$ . Ce dernier morphisme est bien défini: en effet, la projection étant générale, le morphisme  $C_{P_L,Y} \rightarrow C_{\mathbb{C}^{d-k+1},Y_1}$  induit par  $p$  est fini, d'après ([22], 4.1.8) qui donne la finitude pour les cônes tangents, les conditions de Whitney qui d'après ([41], Chap. 5, Th. 1.2), donnent l'équimultiplicité de  $P_L$  le long de  $Y$ , et ([24], §5) qui permet de passer grâce à l'équimultiplicité du cône tangent au cône normal. L'application  $l \mapsto p(l)$  est donc bien définie. L'isomorphisme ci-dessus entre  $U$  et  $U_1$  induit par  $p$  montre que l'image de  $|C_{P_L,Y}|$  dans  $C_{\mathbb{C}^{d-k+1},Y_1}$  est  $|C_{\Delta_L,Y_1}|$ , et donc que  $\hat{\tau}$  est bien défini, fini et biméromorphe.

Nous retrouvons ainsi le fait prouvé dans ([22], 5.1.3.2) que  $\hat{\tau}$  est le morphisme transformé strict de  $\tau$  par  $\hat{e}$ , c'est-à-dire que  $|\hat{e}^{-1}(\lambda^{-1}(L))|$  est le transformé strict de  $\lambda^{-1}(L)$  par  $\hat{e}$ .

Notons  $D_L$  le diviseur image réciproque de  $Y_1$  dans  $E_{Y_1}C(\Delta_L)$  par  $\xi_L = e_L \circ \kappa'_L$ ; c'est l'image par  $\hat{\tau}$  de  $D'_L = U(D_\alpha \cap (Y \times \mathbb{P}^{N-t-1} \times L))$  où les  $D_\alpha$  sont ceux de

2.1.1. Comme  $L$  est assez général,  $Y \times \mathbb{P}^{N-t-1} \times L$  est transverse à chaque  $D_\alpha$ . On en déduit que les composantes de  $D'_L$  sont les  $D_\alpha \cap (Y \times \mathbb{P}^{N-t-1} \times L)$  non vides; en effet, les morphismes  $D_\alpha \rightarrow Y$  sont surjectifs, et il résulte du Théorème de Bertini que leur fibre générale  $D_\alpha(g)$  est irréductible. Les points singuliers de  $D_\alpha(g) \cap (\mathbb{P}^{N-t-1} \times L)$  sont les points d'intersection avec  $\mathbb{P}^{N-t-1} \times L$  du lieu singulier  $\Sigma$  de  $D_\alpha(g)$ , et d'après le Théorème de Lefschetz quasi-projectif, ([5], Theorem 2.1.2), si  $L$  est assez général, l'intersection  $(D_\alpha(g) - \Sigma) \cap (\mathbb{P}^{N-t-1} \times L)$  est connexe, donc  $D_\alpha(g) \cap (\mathbb{P}^{N-t-1} \times L)$  est irréductible, ce qui donne l'irréductibilité de  $D_\alpha \cap (Y \times \mathbb{P}^{N-t-1} \times L)$ . Puisque  $L$  est assez général, et que toutes les fibres de  $D_\alpha \rightarrow Y$  ont la même dimension, les composantes de  $D'_L$ , qui sont les  $D_\alpha \cap (Y \times \mathbb{P}^{N-t-1} \times L)$  non vides sont aussi équidimensionnelles au-dessus de  $Y_1$ , ce qui prouve ([41], Chap. 5, Th. 1.2) que  $\Delta_L$  satisfait les conditions de Whitney le long de  $Y_1$  (Pour une autre démonstration de ce fait, voir [8], Th. 6.1).

L'application  $(x, l, H) \mapsto (p(x), p(H))$  définit un morphisme analytique  $|\hat{e}^{-1}(\lambda^{-1}(L))| \rightarrow E_{Y_1}(\Delta_L)$  égal à la composition de  $\hat{t}$  et  $\kappa'_L$ . L'auréole de  $\Delta_L$  le long de  $Y_1$  est donc formée des images par ce morphisme des  $D_\alpha \cap (Y \times \mathbb{P}^{N-t-1} \times L)$  non vides. Montrons que les images par  $p$  des  $V_\alpha$  de dimension  $\leq d - k - 1$  sont des composantes de cette auréole. Pour cela, il suffit de remarquer que le morphisme  $D_\alpha \cap (Y \times \mathbb{P}^{N-t-1} \times L) \rightarrow V_\alpha$  est surjectif si et seulement si la dimension de  $V_\alpha$  est  $\leq d - k - 1$ , et que cette surjectivité entraîne que l'image que l'élément correspondant de l'auréole de  $\Delta_L$  est l'image de  $V_\alpha$ . Les images des  $D_\alpha \cap (Y \times \mathbb{P}^{N-t-1} \times L)$  correspondant aux autres  $V_\alpha$  sont les images par  $p$  des composantes irréductibles de  $\mathbb{P}(C_{P_L, Y})$  d'après la Proposition 2.2.1. ■

Dans la situation de 2.2.4, nous dirons par abus de langage que l'auréole de  $\Delta_L$  le long de  $Y_1$  est l'image par  $p$  de l'auréole de  $X$  le long de  $Y$ .

Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'énoncé "dual" de 2.1.5.

**COROLLAIRE 2.2.4.1.** *Soient  $X$  un sous-espace analytique fermé réduit d'un ouvert de  $\mathbb{C}^N$  et  $Y$  un sous-espace non-singulier connexe de  $X$ . Le couple  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney si et seulement si, pour chaque  $\alpha$ , toutes les fibres de la projection  $W_\alpha \rightarrow Y$  ont la même dimension.*

**DÉMONSTRATION.** Si toutes les fibres ont la même dimension, les morphismes  $W_\alpha \rightarrow Y$  sont surjectifs, donc aussi les morphismes  $D_\alpha \rightarrow Y$  ce qui implique les conditions de Whitney d'après la remarque 2.2.1.1, 2).

Supposons avoir les conditions de Whitney le long de  $Y$ , et qu'un morphisme  $W_\alpha \rightarrow Y$  n'ait pas toutes ses fibres de même dimension. Soient  $\delta$  la dimension de la fibre générale et  $\delta_0 > \delta$  la dimension de la fibre spéciale au-dessus de  $x \in Y$ .

Choisissons une projection générale  $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ , où  $\delta_0 \geq N - 1 - d + k > \delta$ . Soient  $\Delta$  l'image polaire correspondante et  $Y_1$  l'image de  $Y$  par  $p$ . Comme dans la preuve de 2.2.4, on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} |\hat{e}^{-1}(\lambda^{-1}(L))| & \longrightarrow & |\lambda^{-1}(L)| \\ \downarrow \hat{\tau} & & \downarrow \tau \\ E_{Y_1}C(\Delta) & \longrightarrow & C(\Delta) \end{array}$$

où  $\tau$  et  $\hat{\tau}$  sont des morphismes finis et biméromorphes; les composantes de  $W_\alpha \cap L$  sont des composantes irréductibles de  $\kappa^{-1}(Y) \cap \lambda^{-1}(L)$ . Le morphisme  $\hat{e}$  envoie les composantes irréductibles de  $D_\alpha \cap \hat{e}^{-1}(L)$  sur celles de  $W_\alpha \cap L$ . Le morphisme  $\hat{\tau}$  envoie les composantes irréductibles de  $D_\alpha \cap \hat{e}^{-1}(L)$  sur des composantes du diviseur image inverse de  $Y_1$  dans  $E_{Y_1}C(\Delta)$  et, comme  $W_\alpha \cap L$ , celles-ci ne s'envoient pas surjectivement sur  $Y_1$ , ce qui contredit le Théorème 2.2.4 et ([41], Chap. 5, Th. 1.2). ■

Nous pouvons résumer les résultats du théorème 2.1.1, la proposition 2.1.5, la remarque 2.2.1.1, 2) et le corollaire 2.2.4.1, avec les mêmes notations, par:

**PROPOSITION 2.2.4.2.** *Soient  $X$  un sous-espace analytique fermé réduit d'un ouvert de  $\mathbb{C}^N$  et  $Y$  un sous-espace non-singulier connexe de  $X$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- 1) *Le couple  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney;*
- 2) *Pour tout  $\alpha$ , la projection  $V_\alpha \rightarrow Y$  est surjective (resp. toutes les fibres de la projection  $V_\alpha \rightarrow Y$  ont la même dimension);*
- 3) *Pour tout  $\alpha$ , la projection  $W_\alpha \rightarrow Y$  est surjective (resp. toutes les fibres de la projection  $W_\alpha \rightarrow Y$  ont la même dimension);*
- 4) *Pour tout  $\alpha$ , la projection  $D_\alpha \rightarrow Y$  est surjective (resp. toutes les fibres de la projection  $D_\alpha \rightarrow Y$  ont la même dimension).* ■

Rappelons la Proposition suivante (Voir [8], 4.3.12):

**PROPOSITION 2.2.5.** *Soient  $X \subset \mathbb{C}^N$  un espace analytique réduit purement de dimension  $d$ ,  $x$  un point de  $X$ ,  $k$  et  $k'$  deux entiers tels que  $0 \leq k \leq k' \leq d - 1$ ,  $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$  une projection linéaire générale et  $p_1: \mathbb{C}^{d-k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{d-k'+1}$  une autre projection linéaire générale. Posons  $p' = p_1 \circ p$  et notons  $\Delta_k$  et  $\Delta_{k'}$  les images polaires associées à  $p$  et  $p'$  respectivement. Au voisinage de l'image de  $x$  par  $p'$ , l'image polaire de dimension  $d - k'$  associée par  $p_1$  à l'image polaire  $\Delta_k$  est égale à l'image polaire  $\Delta_{k'}$ .*



**DEMONSTRATION.** Soient  $L$  et  $L'$  les sous-espaces de  $\mathbb{P}^{N-1}$  formés des hyperplans contenant les noyaux de  $p$  et de  $p'$  respectivement. Nous avons vu dans la preuve de la proposition précédente que le morphisme  $H \mapsto p(H)$  induit un morphisme fini et biméromorphe  $\tau: |\lambda^{-1}(L)| \rightarrow C(\Delta_L)$ . L'image par  $\tau$  de  $|\lambda^{-1}(L')|$  est égale à  $|C(\Delta_L) \cap \lambda_L^{-1}(L'_1)|$ , où  $\lambda_L$  est le morphisme naturel  $C(\Delta_L) \rightarrow \mathbb{P}^{d-k}$  et  $L'_1$  est l'espace des hyperplans de  $\mathbb{C}^{d-k+1}$  contenant le noyau de  $p_1$ . Soit  $\Delta_1$  l'image polaire de  $\Delta_k$  dans  $\mathbb{C}^{d-k'+1}$  associée à  $p_1$ ; toujours d'après ce qui précède, le morphisme  $L'_1 \rightarrow \mathbb{P}^{d-k'}$  défini par  $H_1 \mapsto p_1(H_1)$  induit un morphisme fini et biméromorphe  $|C(\Delta_L) \cap \lambda_L^{-1}(L'_1)| \rightarrow C(\Delta_1)$ . D'autre part, on a évidemment une inclusion  $\Delta_{L'} \subset \Delta_1$ , comme on le vérifie en un point non-singulier de  $\Delta_{L'}$ . Enfin, le diagramme suivant, où les flèches verticales sont des morphismes propres et biméromorphes, commute:

$$\begin{array}{ccc}
 \lambda^{-1}(L') & \longrightarrow & |C(\Delta_L) \cap \lambda_L^{-1}(L'_1)| \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C(\Delta_{L'}) & & C(\Delta_1) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta_{L'} & \hookrightarrow & \Delta_1
 \end{array}$$

l'inclusion est donc une égalité. ■

On retrouve ainsi le fait que pour  $k \leq k'$ , l'auréole de  $\Delta_{L'}$  le long de l'image de  $Y$  par  $p'$  est l'image par  $p_1$  de l'auréole de  $\Delta_L$  le long de  $Y_1$ .

**2.3.** Pour étudier le comportement de l'auréole par section hyperplane, nous avons besoin de préciser des conditions géométriques sur une projection  $p$  non nécessairement générique suffisantes pour que l'on puisse obtenir une description analogue à celle de 2.2.1 du cône normal de la variété polaire associée à la projection  $p$ :

**PROPOSITION 2.3.1.** Soient  $X \subset \mathbb{C}^N$  un espace analytique réduit équidimensionnel,  $Y$  un sous-espace non-singulier de  $X$  tel que  $X^0$  satisfasse les conditions de Whitney le long de  $Y$  en un point  $x \in Y$ . Soit  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{C}^N$  passant par  $x$  et non tangent à  $X$ .

Pour tout entier  $k$  entre 0 et  $d-1$ , il existe un ouvert de Zariski dense  $U$  de l'espace des projections linéaires  $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$  dont le noyau est contenu dans  $H$  tel que pour  $p \in U$ , la variété polaire associée à  $p$  soit vide ou de dimension  $d-k$ , et que le réduit de son cône normal le long de  $Y$  soit constitué des  $Y(V_\alpha)$  qui sont

de dimension  $d - k$  et des  $P_j(\mathbf{Y}(V_\beta); p) = \mathbf{Y}(P_j(V_\beta; p))$ , où les  $P_j(V_\beta; p)$  sont les variétés polaires au sens projectif de dimension  $d - k$  relatives à la projection  $p$  des  $V_\beta$  de dimension  $> d - k$ .

**DÉMONSTRATION.** Fixons au voisinage de  $x$  une stratification de Whitney de  $C(X)$  compatible avec chaque  $W_\alpha$  ainsi que  $\kappa^{-1}(x)$  et une rétraction analytique  $r: \mathbb{C}^N \rightarrow Y$ . Comme  $H$  n'est pas tangent à  $X$  en  $x$ , il n'est tangent à aucun  $\mathbf{Y}(V_\alpha)$  d'après 2.1.1, et en particulier,  $H \cap \mathbf{Y}(V_\alpha)$  est de dimension  $\dim \mathbf{Y}(V_\alpha) - 1$ .

Constatons l'existence d'un ouvert dense  $U$  de l'espace des projections dont le noyau est contenu dans  $H$  tel que pour  $p \in U$ , le dual projectif  $L \subset \check{\mathbb{P}}^{N-1}$  de  $\text{Kerp}$ , espace des hyperplans contenant  $\text{Kerp}$ , soit transverse dans  $\check{\mathbb{P}}^{N-1}$  aux strates contenues dans  $\kappa^{-1}(x)$ , que  $\text{Kerp} \cap Y(V_\alpha) = \{0\}$  pour tous les  $\mathbf{Y}(V_\alpha)$  de dimension  $\leq d - k$ , et que  $\text{Kerp} \cap \mathbf{Y}(P_j(V_\beta; p)) = \{0\}$  pour tous les  $P_j(V_\beta; p)$  de dimension  $d - k$ .

Remarquons que l'hypothèse que  $p$  est dans  $U$  suffit pour pouvoir appliquer l'argument démontrant la Proposition 2.2.1, b), car  $L$  sera alors transverse au-dessus d'un voisinage de  $x$  aux strates contenues dans  $\kappa^{-1}(Y)$ , et l'on pourra appliquer le Lemme de transversalité de ([41], Chap. 3, 5.2) à  $L$  et au morphisme  $\hat{e}_Y: E_Y C(X) \rightarrow C(X)$ , et achever la démonstration comme en 2.2.1. ■

L'auréole se comporte bien par section hyperplane générale:

Rappelons que si la forme initiale dans le gradué  $\text{gr}_Y \mathcal{O}_Y$  d'une équation de  $H$  dans  $\mathbb{C}^N$  n'y est pas diviseur de 0, on a identification canonique du cône normal  $C_{X \cap H, Y \cap H}$  avec le sous-espace de  $C_{X, Y}$  défini par la forme initiale le long de  $Y$  d'une équation de  $H$ , sous-espace que nous noterons  $C_{X, Y} \cap {}^Y H$ . C'est le cas en particulier si  $H$  n'est pas tangent à  $C_{X, Y}$ . Nous noterons  $\iota: \mathbb{P}(C_{X, Y}) \cap \mathbb{P}({}^Y H) \rightarrow \mathbb{P}(C_{|X \cap H|, Y \cap H})$  l'identification correspondante après projectivisation.

**THÉORÈME 2.3.2.** Soient  $X \subset \mathbb{C}^N$  un espace analytique réduit purement de dimension  $d$ , et  $Y$  un sous-espace non-singulier tel que  $(X^0, Y)$  satisfasse les conditions de Whitney en un point  $y \in Y$ . Soit  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{C}^N$  passant par  $y$  et qui n'est pas tangent à  $Y$  en  $y$ ; alors on a:

- i) L'hyperplan  $H$  n'est tangent à aucun des  $\mathbf{Y}(V_\alpha)$  constituant l'auréole de  $X$  le long de  $Y$ .
- ii) L'intersection  $X^0 \cap H$  est, au voisinage de  $y$ , la partie non-singulière de  $X \cap H$  et satisfait les conditions de Whitney le long de  $Y \cap H$  en  $y$ .
- iii) L'identification  $\iota$  identifie la famille des  $|V_\alpha \cap \mathbb{P}({}^Y H)|$  non vides à l'auréole de  $|X \cap H|$  le long de  $Y \cap H$ .



DÉMONSTRATION. i) est une conséquence immédiate du Théorème 2.1.1.

On a l'inclusion évidente  $(X \cap H)^0 \subset X^0 \cap H$ . L'ouverture de la transversalité implique que  $H$  est transverse à  $X^0$  en tout point assez voisin de  $y$ , et que cette inclusion est une égalité (Voir [36], §1). Ceci prouve la première partie de ii) et l'égalité  $|P_k(X; p) \cap H| = P_k(|X \cap H|; p)$  pour tout  $k$  et toute projection  $p$  dont le noyau est contenu dans  $H$  et au demeurant assez générale.

La seconde partie résulte de ([41], Chap. 4, 5.1, 5.3.1, et Chap 5, Th. 1.2) ou de l'argument suivant, qui prouve aussi iii) d'après 2.1.5: d'après 2.3.1, les variétés polaires de  $X$  associées à des projections assez générales parmi celles dont le noyau est contenu dans  $H$  ont pour composantes fixes de leur cône normal les  $Y(V_\alpha)$  de la bonne dimension. Comme  $H$  n'est pas tangent au cône normal le long de  $Y$  de ces variétés polaires, on a pour chaque  $k$  égalité entre l'intersection avec  ${}^Y H$  du cône normal de  $P_k(X; p)$  le long de  $Y$  et le cône normal le long de  $Y \cap H$  de l'intersection avec  $H$  de  $P_k(X; p)$ . D'après 2.2.1, l'auréole de  $|X \cap H|$  le long de  $Y \cap H$  est la famille formée des  $|V_\alpha \cap \mathbb{P}({}^Y H)|$  non vides. ■

*Remarque.* Puisque  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney, d'après ([41], Chap. 5, 1.2.1), la condition que  $H$  ne soit pas tangent à  $X$  en  $x$  est en particulier vérifiée pour tout hyperplan appartenant à un ouvert dense de l'espace des hyperplans contenant  $Y$  (que nous pouvons supposer plongé linéairement).

**COROLLAIRE 2.3.2.1.** *Soient  $c$  un entier et  $E$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^N$  de codimension  $c$  qui est intersection de  $c$  hyperplans  $H_1, \dots, H_c$  tels que  $H_i$  ne soit pas tangent à  $|X \cap H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_{i-1}|$  pour  $1 \leq i \leq c$ . Alors la multiplicité en  $x$  des variétés polaires  $P_k(|X \cap E|)$  est égale à celle des variétés polaires  $P_k(X)$  pour  $0 \leq k \leq d - c - 1$ .*

*Cela résulte aussitôt du Théorème 2.3.2 et de la Proposition 2.2.1, b).* ■

Le théorème 2.3.2 nous permet maintenant d'obtenir ce qui est d'après [36] et [44] une généralisation de l'énoncé " $\mu$  constant entraîne  $\mu^*$  constant pour les sections hyperplanes d'une même hypersurface" de ([44], Appendice):

**COROLLAIRE 2.3.2.2.** *Supposons  $Y$  plongé linéairement dans  $\mathbb{C}^N$ . Soit  $U$  l'ouvert de Zariski dense de  $\check{\mathbb{P}}^{N-1}$  formé des hyperplans non tangents à  $X$  en  $x$ , et soit  $E \subset U \times \mathbb{C}^N$  la restriction à  $U$  du fibré tautologique de  $\check{\mathbb{P}}^{N-1}$ , dont la fibre au-dessus d'un point est l'hyperplan correspondant. Posons  $\mathbf{X} = E \cap (U \times X)$  et  $\mathbf{Y} = E \cap (U \times Y) \subset \mathbf{X}$ , et notons  $\pi: \mathbf{X} \rightarrow U$  la projection. Soient  $U_0$  l'ouvert dense de  $U$  formé des hyperplans transverses à  $Y$  et  $U_\infty$  le fermé analytique de  $U$  formé des hyperplans contenant  $Y$ . Notons  $\sigma$  la section  $U \rightarrow \mathbf{Y}$  qui pique le point  $x$  dans chaque fibre. Pour  $\delta = 0, \infty$ , le couple de strates  $(|\pi^{-1}(U_\delta)|^0, \pi^{-1}(U_\delta) \cap \mathbf{Y})$  satisfait les conditions de Whitney au voisinage de  $\sigma(U_\delta)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Rappelons d'abord que d'après ([41], Chap. 5), pour tout  $H \in U$ , le couple  $(|X \cap H|, Y \cap H)$  satisfait les conditions de Whitney en  $x$ .

D'après (*loc. cit.*, Chap. 2, §3), si nous choisissons des coordonnées pour  $\mathbb{C}^N$  telles que  $H$  soit défini par  $z_1 = 0$ , et des équations  $f_i = 0$  ( $1 \leq i \leq m$ ) pour  $X$ , le fait que  $H$  soit dans  $U$  est équivalent à l'énoncé suivant:

Dans  $\mathcal{O}_{X,x}$ , l'idéal engendré par les mineurs jacobiens de rang  $c = N - d$ , où  $d = \dim X$ , des fonctions  $f_i$ , au dénominateur desquels  $z_1$  apparaît, est entier sur l'idéal engendré par les autres mineurs.

Si l'on se restreint à l'intersection  $V$  de  $U$  et de l'ouvert affine de  $\mathbb{P}^{N-1}$  où les hyperplans ont pour équations  $z_1 = \sum a_i z_i$  et si l'on écrit  $F_i(a_2, \dots, a_N, z_2, \dots, z_N)$  pour  $f_i(\sum a_i z_i, z_2, \dots, z_N)$ , les  $F_i = 0$  sont les équations de  $\pi^{-1}(V)$  dans  $V \times \mathbb{C}^N$ . D'après (*loc. cit.*), pour chaque  $\lambda$  le fait qu'un hyperplan  $\sum \lambda_i a_i = 0$  de  $V \times \mathbb{C}^N$  ne soit pas limite d'hyperplans tangents à  $\pi^{-1}(V)$  est également une condition de dépendance intégrale sur les mineurs jacobiens des  $F_i$ , et l'on vérifie facilement que c'est une conséquence de la condition précédente. On peut itérer ce résultat à l'intersection de plusieurs hyperplans de la même forme.

Puisque d'après (*loc. cit.*, Chap. 5), les conditions de Whitney se ramènent à une question d'équimultiplicité des variétés polaires, et puisque pour chaque  $H \in U$ , les variétés polaires de  $|X \cap H|$  sont équimultiples le long de  $Y \cap H$  et puisque enfin, d'après la transversalité que nous venons de voir, cette multiplicité est bien celle des variétés polaires de  $\mathbf{X}$ , l'ensemble des points de  $\pi^{-1}(U_\delta) \cap \mathbf{Y}$  où elles ne sont pas satisfaites est, au voisinage de  $\sigma(U_\delta)$ , un fermé analytique de la forme  $\pi^{-1}(\Delta) \cap \mathbf{Y}$  où  $\Delta \subset U_\delta$ , pour  $\delta = 0, \infty$ .

Pour montrer que  $\Delta$  est vide, on peut supposer le contraire et restreindre tout la situation au-dessus d'une droite  $D$  de  $U_\delta$  qui ne rencontre  $\Delta$  qu'en un point 0 et qui est la trace sur  $U_\delta$  de l'intersection d'hyperplans de  $\mathbb{P}^{N-1}$  dont les images réciproques dans  $V \times \mathbb{P}^{N-1}$  satisfont, toujours parce que  $V$  est dans  $U$ , les conditions de transversalité itérée de 2.3.2.1: pour montrer que  $\Delta$  est vide il suffit de montrer que  $|\pi^{-1}(D)|$  satisfait les conditions de Whitney le long de  $\pi^{-1}(D) \cap \mathbf{Y}$ . Soit  $t$  une coordonnée locale sur  $D$  en 0; le même argument de dépendance intégrale que plus haut montre que l'hyperplan  $t = 0$  de  $D \times \mathbb{C}^N$  n'est pas limite d'hyperplans tangents à  $|\pi^{-1}(D)|$  au voisinage de  $\sigma(D)$ .

Le Théorème 2.3.2 montre alors que d'une part, pour tout point  $H_t \in D$  l'auréole de  $\pi^{-1}(\{H_t\})$  le long de  $\pi^{-1}(\{H_t\}) \cap \mathbf{Y}$  est l'intersection avec  $\{H_t\} \times \mathbb{C}^N$  de l'auréole de  $\pi^{-1}(D)$  le long de  $\pi^{-1}(D) \cap \mathbf{Y}$ , qui est non-singulier puisque  $D$  est dans  $U_\delta$ , et que d'autre part l'auréole de  $\pi^{-1}(\{H_t\})$  le long de  $\pi^{-1}(\{H_t\}) \cap \mathbf{Y}$  est la collection des  $|V_\alpha \cap H_t|$  non vides. Le corollaire résulte alors de 2.1.5. ■

**COROLLAIRE 2.3.2.3.** *Si  $H \subset \mathbb{C}^N$  n'est pas tangent à  $X$  en  $x$ , pour tout  $k$  entre 0 et  $d - 1$ , il existe un ouvert dense  $V$  de l'espace des projections*

$p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$  dont le noyau est contenu dans  $H$  tel que pour  $p \in V$ , la multiplicité de  $P_k(X; p)$  soit la multiplicité d'une variété polaire  $P_k$  générique.

Cela résulte aussitôt de 2.3.2.1. ■

*Remarques.* 1) Récemment, Smith et Varley ([35]) ont utilisé le cas  $Y = \{x\}$  du Théorème 2.1.1 de façon très ingénieuse pour déterminer la structure du cône tangent du discriminant de la famille des hypersurfaces projectives de degré  $d$  de  $\mathbb{P}^N$  ou du diviseur théta universel.

2) Il ressort du travail de Mostowski [27] sur les stratifications Lipschitziennes que certaines des composantes fixes des variétés polaires sont fixes à un ordre élevé qui contient de l'information géométrique importante.

### Appendice: Calcul d'un exemple

Soient  $a, b, c, d$  quatre entiers tels que  $2 \leq a < b < c < d$ , et considérons l'hypersurface  $(X, 0) \subset \mathbb{C}^4$  d'équation:

$$x^a + y^b + z^c + w^d = 0.$$

Appliquons notre méthode pour calculer l'ensemble des limites en 0 d'espaces tangents à  $X$ .

Il faut d'abord calculer les équations des variétés polaires  $P_2$  et  $P_1$  de dimensions respectives 1 et 2.

Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$  deux suites de nombres complexes assez générales. La variété polaire  $P_1$  est la surface d'équations:

$$x^a + y^b + z^c + w^d = 0 \quad \text{et} \quad \alpha x^{a-1} + \beta y^{b-1} + \gamma z^{c-1} + \delta w^{d-1} = 0$$

et  $P_2$  est la courbe intersection de  $P_1$  avec l'hypersurface d'équation

$$\alpha' x^{a-1} + \beta' y^{b-1} + \gamma' z^{c-1} + \delta' w^{d-1} = 0$$

L'idéal des formes initiales pour la filtration  $m$ -adique de l'idéal définissant  $P_1$  contient  $x^{a-1}$  et  $y^{b-1}(\beta x - \alpha y)$ . Comme nous savons d'après [36] et [44] que la multiplicité de  $P_1$  en 0 est  $\mu^{(2)} + \mu^{(1)} = (a-1)b$ , ces deux éléments engendrent l'idéal initial. La composante fixe du cône tangent de  $P_1$  est donc ensemblistement le plan  $x = y = 0$ . De façon analogue, puisque nous savons que la multiplicité de  $P_2$  en 0 est  $\mu^{(3)} + \mu^{(2)} = (a-1)(b-1)c$ , nous vérifions que l'idéal initial de l'idéal définissant  $P_2$  est engendré par  $(x^{a-1}, y^{b-1}, z^{c-1}(Ux + Wy + Tz))$ , où  $U, W, T$

sont des fonctions non constantes de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ . La composante fixe est donc la droite  $x = y = z = 0$ .

Ainsi, l'espace des limites en 0 d'espaces tangents à  $X$  est le plan projectif de  $\mathbb{P}^3$  dual du point  $x = y = z = 0$  de  $\mathbb{P}^3$  (alors que le dual du cône tangent est un point de ce plan). Ceci signifie qu'un hyperplan  $\xi x + \kappa y + \lambda z + \pi w = 0$  de  $\mathbb{C}^4$  est limite d'espaces tangents si et seulement si  $\pi$  est nul, ce qui confirme les résultats de [44]. Nous encourageons le lecteur à étendre les calculs au cas  $a \leq b \leq c \leq d$ .

L'effectivité du calcul repose sur la relative facilité avec laquelle on trouve les équations du cône tangent des variétés polaires, et donc leurs composantes fixes, grâce aux calculs de bases standard. Dans l'exemple ci-dessus, nous avons pu simplifier ces calculs grâce à des informations spéciales, mais ils sont en principe effectifs en général.

Le premier auteur remercie l'Université Harvard et la Japan Association for Mathematical Sciences pour les moyens qu'elles ont mis à sa disposition pour achever une partie de ce travail.

Le second auteur tient à remercier le C.N.R.S., l'Université de Caroline du Nord à Chapel Hill où il a bénéficié du support de la N.S.F. pour l'année spéciale de singularités 1985–86 et l'Université Harvard où il a bénéficié du support de la Fondation Vaughn pour achever une partie de ce travail.

## RÉFÉRENCES

- [1] WILLIAM FULTON, *Intersection theory*. Springer Verlag, 1984.
- [2] W. FULTON, STEVEN L. KLEIMAN and ROBERT MACPHERSON, *About the enumeration of contacts*. In: "Algebraic geometry, open problems". Proc. Ravello conf. 1982. Springer Lecture Notes in Math. No. 997, 1983, p. 156–196.
- [3] MURRAY GERSTENHABER, *On the deformations of rings and algebras*, 2. Annals of Math., 84, no. 1, (July, 1966), p. 1–19.
- [4] ALEXANDER GROTHENDIECK, *Techniques de construction en géométrie analytique*. Séminaire Cartan 1960–61, exposé 12. Publ. Inst. Henri-Poincaré. Paris 1961.
- [5] HELMUT HAMM, LÊ DŨNG TRÁNG, *Lefschetz Theorems on quasi-projective varieties*. Bull. Soc. Math. Fr. 113, 1985, p. 123–142.
- [6] JEAN-PIERRE-GEORGES HENRY et D. T. LÊ, *Limites d'espaces tangents*, Sémin. Norguet, Springer Lect. Notes in Math. 482.
- [7] J. P. G. HENRY and MICHEL MERLE, *Limites de normales, conditions de Whitney et éclatement d'Hironaka*. Proc. A.M.S. Symp. in pure Math., Vol. 40, part 1, p. 575–584 (1983).
- [8] J. P. G. HENRY, MICHEL MERLE et CLAUDE SABBAH, *Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe*. Annales E.N.S., 17, 2 (1984), p. 227–268.
- [9] HEISUKE HIRONAKA, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*. Annals of Math., 79, 1964.
- [10] H. HIRONAKA, *Stratification and flatness*. Real and complex singularities, Sijthoff & Noordhoff, 1977, p. 199–265.
- [11] H. HIRONAKA, *Normal cones in analytic Whitney stratifications*. Publ. Math. I.H.E.S. No. 36, P.U.F. 1970.

- [12] CHRISTIAN HOUZEL, *Géométrie analytique locale*. Séminaire Cartan 1960–61, exposé 19. Publ. I.H.P. 1961.
- [13] MASAKI KASHIWARA, *Systems of microdifferential equations*. Birkhäuser, Progress in Math. No. 31.
- [14] M. KASHIWARA, *B-functions and holonomic systems*. Inventiones Math., No. 38, p. 33–68 (1976).
- [15] STEVEN L. KLEIMAN, *About the conormal scheme*. In: “Complete intersections”. Proc. conf. Arcireale 1983, Springer Lecture Notes in Math. 1092.
- [16] S. KLEIMAN, *Tangency and duality*, Proc. 1984 Vancouver conf. in algebraic geometry. C.M.S.-A.M.S., Vol. 6, 1986, p. 163–226.
- [17] GÉRARD LAUMON, *Transformations canoniques et spécialisation pour les  $\mathcal{D}$ -modules filtrés*. Astérisque No. 130, S.M.F. 1985.
- [18] LÊ DŨNG TRÁNG, *Limites d'espaces tangents sur les surfaces*. Nova Acta Leopoldina NF 52 Nr. 240 (1981), p. 119–137.
- [19] D. T. LÊ, *Geometry of tangents, local polar varieties, and Chern classes*. Symp. on singularities and functions of several variables, Kyoto, Sept. 1980. Kyokuryoku Series, Kyoto 1981.
- [20] D. T. LÊ et ZOGHMAN MEBKHOUT, *Variétés caractéristiques et variétés polaires*. C.R.A.S. Paris, Sér. 1, 296 (1983), p. 129–132.
- [21] D. T. LÊ et BERNARD TEISSIER, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney II*. In “Singularities”, Proc. Symp. Pure Math. 40, Part 2, (1983), p. 65–103.
- [22] D. T. LÊ et B. TEISSIER, *Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières*, Annals of Math. 114 (1981), p. 457–491.
- [23] D. T. LÊ et B. TEISSIER, *Sur la géométrie des surfaces complexes, 1: Tangentes exceptionnelles*. American J. of Maths, 101 (1979), p. 420–452.
- [24] JOSEPH LIPMAN, *Equimultiplicity, reduction, and blowing-up*. Proc. Conf. on transcendental methods in commutative algebra; Lecture notes in pure and applied Math., Marcel Dekker 1982.
- [25] JOHN MATHER, *Notes on topological stability*. Harvard University, 1970. Voir aussi “Singularités d'applications différentiables” Springer Lect. Notes in Math. No. 535.
- [26] BOUDEWIJN MOONEN, *Polar multiplicities as limits of curvature integrals*. Preprint, January 1985 Mathematisches Institut der Universität zu Köln, Im Weyertal 86–90, 5000 Köln 40, W. Germany.
- [27] TADEUSZ MOSTOWSKI, *Lipschitz stratifications*. Preprint 1984?, Polska Akad. Nauk. Warszawa, Pologne.
- [28] VICENTE NAVARRO AZNAR, *Conditions de Whitney et section planes*. Inventiones Math., 61, (1980), p. 199–225.
- [29] DONAL O'SHEA, *Pairs of tangent spaces*. Preprint 1985, Mt Holyoke College, Massachusetts.
- [30] FRÉDÉRIC PHAM, *Singularités des systèmes différentiels de Gauss–Manin*. Progress in Math. No. 2, Birkhäuser 1979.
- [31] RAGNI PIENE, *Polar classes of singular varieties*. Annales E.N.S. 11 (1978).
- [32] REINHOLD REMMERT, *Holomorphe und meromorphe Abbildungen complexe Räume*. Math. Annalen, 133, (1957), p. 328–370.
- [33] CLAUDE, SABBAB: *Morphismes stratifiés sans éclatement et cycles évanescents*. Astérisque, No. 101–102, S.M.F. 1983, p. 286–319.
- [34] C. SABBAB, *Quelques remarques sur la géométrie des espaces conormaux*. Astérisque No. 131, S.M.F. 1985.
- [35] ROY SMITH and ROBERT VARLEY, *The tangent cone to the discriminant*. Canadian Math. Soc. Conf. proceedings Vol. 6 (1986) p. 443–460.
- [36] BERNARD TEISSIER: *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*. Astérisque, No. 7–8 (1973), p. 285–362.
- [37] B. TEISSIER, Appendice aux notes du cours *Le problème des modules pour les branches planes* par O. Zariski, Centre de Math., Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France, 1975. Réédition Hermann, Paris 1986.

- [38] B. TEISSIER, *Résolution simultanée, 1*. In Séminaire sur les singularités des surfaces, Demazure-Pinkham-Teissier, Palaiseau 1976–77, Springer Lectures No. 777.
- [39] B. TEISSIER, The hunting of invariants in the geometry of discriminants. *Real and complex singularities*, Oslo 1976. Noordhoff & Sijthoff 1977.
- [40] B. TEISSIER, *Variétés polaires locales et conditions de Whitney*, C. R. Acad. Sci. Paris 290, 1980, p. 799–802.
- [41] B. TEISSIER, *Variétés polaires 2: Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney*. Actes de la conférence de géométrie algébrique à La Ràbida, 1981, Springer Lecture Notes No. 961, p. 314–491.
- [42] B. TEISSIER, *Sur la classification des singularités des espaces analytiques*. Actes du Congrès international mathématiciens, Varsovie 1983, p. 763–781.
- [43] B. TEISSIER, *Introduction to equisingularity problems*. Proc. A.M.S. Symp. in pure Math., 29, Arcata 1974.
- [44] B. TEISSIER, *Variétés polaires 1*. Inventiones Math., 40, 3, (1977), p. 267–292.
- [45] RENÉ THOM, *Ensembles et morphismes stratifiés*. Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), p. 240–284.
- [46] JEAN-LOUIS VERDIER, *Spécialisation de faisceaux et monodromie modérée*. Astérisque, No. 101–102 (1983), p. 332–364.
- [47] HASSLER WHITNEY, *Tangents to an analytic variety*. Annals of Math., 81, (1964), p. 496–549.
- [48] OSCAR ZARISKI, *Foundation of a general theory of equisingularity...*, in “Contributions to algebraic geometry”, John Hopkins University Press, 1979.

43, Rue du Faubourg Saint-Antoine 75011 Paris

L.M.E.N.S., 45 Rue d’Ulm, 75005 Paris

Reçu le 23 juin 1986/24 août 1987