Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold.

Autor(en): **Colin de Verdière, Y. de**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **63 (1988)**

PDF erstellt am: **03.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-48202

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 63 (1988) 184–193 0010-2571/88/020184-10$01.50 + 0.20/0
© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel

Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold

Y. Colin de Verdière

Dans [AD], V. Arnold introduit certaines hypothèses de transversalité relatives aux valeurs propres d'une famille d'opérateurs autoadjoints.

Après avoir donné une définition précise d'une hypothèse forte (SAH = "strong Arnold's hypothesis") et d'une hypothèse faible (WAH = "weak Arnold's hypothesis"), nous prouvons les résultats suivants:

– L'hypothèse SAH est vérifiée pour toutes les valeurs propres positives du laplacien de S^2 pour la métrique canonique.

– L'hypothèse SAH est vérifiée pour toute valeur propre d'un tore plat de multiplicité ≤ 6 et non pour les autres. Cela fournit un contrexemple à l'hypothèse d'Arnold.

– Nous traitons ensuite le cas des laplaciens discrets sur certains graphes finis.

Tous ces résultats sont utilisables dans la construction de métriques riemanniennes ou de domaines euclidiens de $\mathbf{R}^n$ dont une partie finie du spectre est prescrit ([C–C], [CV3]). L'ensemble de ces résultats est annoncé dans [CV2].

Je tiens à remercier Michel Brion pour m'avoir aidé à traiter le cas de S^2.

1. L'hypothèse d'Arnold

Rappelons d'abord quelques éléments de la théorie des perturbations des valeurs propres multiples:

soit $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\mathbf{R}} \oplus \mathbf{C}$ le complexifié d'un espace de Hilbert réel et $(H_a)_{a \in T}$ une famille d'opérateurs autoadjoints réels sur $\mathbf{H}$ (i.e. définis sur $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}$) de même domaine $\mathbf{D} \subset \mathbf{H}$, dépendant continument de a variant dans l'espace topologique T au sens que $a \mapsto (H_a + i)^{-1}$ de T dans $\mathscr{L}(\mathbf{H}, \mathbf{D})$ est continue pour la norme. Soit alors λ_0 une valeur propre isolée de multiplicité finie n_0 de $H_0 (0 \in T)$, c'est à dire telle que $\lambda_0 \notin \text{sp.ess}\,(H_0)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que le disque D de centre λ_0 et de rayon ε ne rencontre le spectre de H_0 qu'en λ_0.

Il existe alors un voisinage U de 0 dans T tel que, si $a \in U$, H_a admet dans D un nombre fini de valeurs propres dont la somme des multiplicités est n_0. De plus, le projecteur orthogonal P_0 de $\mathbf{H}$ sur la somme E_a de ces espaces propres

dépend continument de a:

$$P_a = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (\lambda - H_a)^{-1}\, d\lambda \quad \text{avec} \quad \gamma = bD.$$

Lorsque $a \to 0$, $E_a \to E_0$ et on définit la forme quadratique q_a sur E_0 par $q_a(f) = \langle H_a U_a f \mid U_a f \rangle$ où U_a est l'isométrie naturelle de E_0 sur E_a définie par:

$$U_a = \mathscr{B}(\mathscr{B}^* \mathscr{B})^{-1/2}$$

avec $\mathscr{B}x = x + \mathscr{B}x$ et $E_a = \text{graphe}\,(B)$, $B \in \mathscr{L}(E_0, E_0^\perp)$.

Il est clair que le spectre de q_a sur E_0 est (spectre $(H_a)) \cap D$.

Supposons maintenant que T est une variété C^k $(k \geq 0)$ et que q_a est définie sur un voisinage de 0 homéomorphe à une boule K d'un espace modèle. On désigne par

$$\Phi : K \to \mathscr{Q}(E_0) = \{\text{formes quadratiques réelles sur } E_0\}$$

l'application $a \mapsto q_a$ et on pose les:

DÉFINITIONS. On dira que la valeur propre λ_0 de H_0 vérifie l'hypothèse d'Arnold forte (SAH) (resp. l'hypothèse d'Arnold faible (WAH)) relativement à la famille $(H_a)_{a \in T}$ si Φ est une submersion en $a = 0$ (resp. Φ est essentielle sur $(\mathscr{Q}(E_0), \lambda_0 \langle . \mid . \rangle)$.)

Soit K un espace topologique, E un espace de Banach, $y_0 \in E$, $\Phi : K \to E$ continue, on dira que Φ est *essentielle* sur (E, y_0) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, $\forall \Psi : K \to E$, continue, avec $\|\Psi - \Phi\|_{L^\infty(K)} \leq \varepsilon$, on a $y_0 \in \Psi(K)$.

L'ensemble de ces applications est un ouvert de $C(K, E)$. Lorsque K est une boule d'un espace vectoriel et Φ de classe C^1, si $\Phi(x_0) = y_0$ et $d\Phi(x_0)$ est surjective, Φ est essentielle sur (E, y_0).

On introduit de même les propriétés SAH et WAH pour une famille $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N$ de valeurs propres isolées de multiplicités $n_i < \infty$ de H_0 dans la famille (H_a) en considérant l'application

$$\Phi : K \to \mathscr{Q}(E_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{Q}(E_N), \text{ somme des applications précédentes.}$$

Une condition *nécessaire* pour SAH et WAH est évidemment que:

$$\text{dimension}\,(T) \geq \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i(n_i + 1)}{2}.$$

On peut également traiter le cas *non réel* de manière similaire: c'est le cas qui intervient pour la théorie de l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique.

La vérification de SAH se ramène à celle de la surjectivité de la différentielle de $\Phi : a \mapsto q_a$ en $a = 0$ et on a le:

CRITÈRE. Pour que λ_0 vérifie SAH, il faut et il suffit que la différentielle de $\Phi : a \mapsto \langle H_a . \mid . \rangle \in \mathcal{Q}(E_0)$ soit surjective en $a = 0$.

Preuve. On a

$$q_{a_t}(x, y) = \langle H_{a_t}(x + B_t x) \mid y + B_t y \rangle + O(t^2),$$

et donc

$$\dot{q}_0(x, y) = \langle \dot{H}_0 x \mid y \rangle + \langle H_0 \dot{B} x \mid y \rangle + \langle H_0 x \mid \dot{B} y \rangle$$

et comme $\dot{B} \in \mathcal{L}(E_0, E_0^{\perp})$, on a $\dot{q}_0(x, y) = \langle \dot{H}_0 x \mid y \rangle$.

Lorsque **H** et (ou) **D** dépendent de a, on peut souvent modifier les H_a par des transformations unitaires explicites pour se ramener à la théorie précédente. Traitons par exemple le cas où (X, g_0) est une variété riemannienne compacte de dimension 2 et la famille H_a celle des laplaciens Δ_a associés aux métriques $e^{2a} g_0 = g (a \in C^\infty(X, \mathbf{R}) = T)$, on a alors la:

PROPOSITION. $\lambda_0 (\neq 0)$ *vérifie SAH si*

$$h \mapsto \left((\varphi, \psi) \mapsto \int_X h \varphi \psi \right)$$

est surjective de $C^\infty(X)$ *dans* $\mathcal{Q}(E_0)$.

Preuve. $v_g = e^{2a} v_{g_0}$ et $\hat{\Delta} = e^{-a} \Delta_a e^{-a}$, où $\hat{\Delta}$ est le transporté de Δ_a sur $L^2(X, v_{g_0})$ par l'isométrie $Uf = e^{-a} f$ de $L^2(X, v_{g_0})$ sur $L^2(X, v_g)$. Le résultat est alors immédiat.

2. Cas de la sphère

THÉORÈME. *Soit* (S^2, g_0) *la sphère munie de la métrique usuelle et* $\lambda_0 = l(l+1)$ $(l \geq 1$ *entier*$)$ *une valeur propre du laplacien. Alors* λ_0 *vérifie SAH*

relativement à la famille des laplaciens des métriques conformes à g_0. Il en est de même en ne considérant que les déformations invariantes par antipodie.

Preuve. On désigne par $\mathcal{P}_{2l}$ l'espace des polynômes homogènes de degré $2l$ sur $\mathbf{R}^3$ et par $\mathcal{H}_l$ l'espace des harmoniques sphériques de degré l. D'après le §1, il suffit de montrer la surjectivité de l'application

$$F_l : \mathcal{P}_{2l} \to \mathcal{Q}(\mathcal{H}_l) \quad \text{définie par} \quad F_l : P \mapsto \left(q(\varphi) = \int_{S^2} P\varphi^2\right).$$

La transposée de F_l est l'application de $\mathcal{H}_l \circ \mathcal{H}_l \to \mathcal{P}_{2l}$ définie par $\varphi \circ \psi \mapsto \varphi\psi$. Comme $\dim(\mathcal{Q}(\mathcal{H}_l)) = \dim(\mathcal{P}_{2l})$ $(= (l+1)(2l+1))$, il suffit de montrer la surjectivité de ${}^tF_l$, c'est à dire que tout polynôme homogène de degré $2l$ est combinaison linéaire de produits d'harmoniques sphériques de degré l.

Comme tout sous-espace de $\mathcal{P}_{2l}$ contient une fonction zonale (invariante par rotation autour de Oz), il suffit visiblement de le montrer pour les éléments zonaux de $\mathcal{P}_{2l}$. Pour cela, on utilise des arguments classiques de la théorie des représentations linéaires qui m'ont été expliqués par Michel Brion. On note $a = x + iy$, $b = z$, $c = x - iy$ et on a une base de $\mathcal{P}_{2l}$ formée des $a^u b^v c^w$ avec $u + v + w = 2l$. L'espace zonal est engendré par les monômes tels que $u = w$, l'algèbre de Lie de $SO(3)$ par les vecteurs

$$L_x = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \quad L_y = \ldots \text{ et } L_z = \ldots.$$

On pose $W_\pm = L_y \pm iL_x$ et on a:

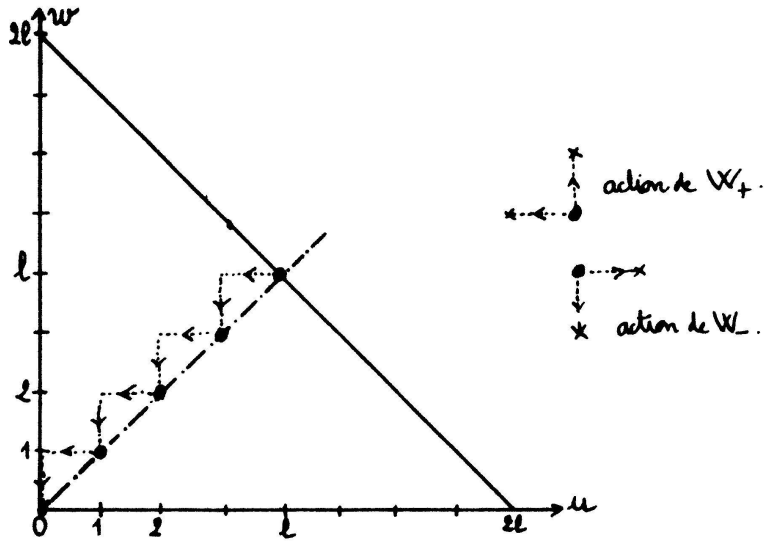
$$W_+(a) = 2b,\ W_+(b) = -c,\ W_+(c) = 0 = W_-(a),\ W_-(b) = -a,\ W_-(c) = 2b.$$

De plus cette algèbre de Lie opère sur $\mathcal{P}_{2l}$ par dérivation:

$$W_+(a^u b^v c^w) = 2ua^{u-1}b^{v+1}c^w - va^u b^{v-1}c^{w+1}$$
$$W_-(a^u b^v c^w) = -va^{u+1}b^{v-1}c^w + 2wa^u b^{v+1}c^{w-1}.$$

Dans le plan des (u, w), on a donc

$$W_+(e_{u,w}) = \alpha e_{u,w+1} + \beta e_{u-1,w}$$
$$W_-(e_{u,w}) = \alpha' e_{u,w-1} + \beta' e_{u+1,w},$$



où α, β, α' et β' ne sont nuls que s'ils sont coefficients d'un $e_{u',w'}$ avec $(u', v') \notin T$, où

$$T = \{(u, w) \in \mathbf{N}^2 \mid u + w \leq 2l\}.$$

Par applications successives de W_+ et W_- à partir de $e_{l,l} = (x^2 + y^2)^l = a^l b^l$ qui est produit de deux harmoniques sphériques, on obtient visiblement tous les monômes zonaux $e_{k,k}$ $(0 \leq k \leq l)$: le vecteur $a^l c^l$ est donc un vecteur cyclique de $\mathcal{P}_{2l}$, ce qui prouve le résulat.

3. Cas des tores plats

THÉORÈME. *Soit X un tore de dimension 2, muni d'une métrique plate, et λ_0 une valeur propre non nulle du laplacien, de multiplicité N, alors λ_0 vérifie SAH relativement à l'ensemble de toutes les métriques riemanniennes sur X si et seulement si $N \leq 6$.*

Cela fournit des contre-exemples à la conjecture d'Arnold, car on sait que N peut être supérieur à 6. Je ne sais pas ce qu'il en est pour l'hypothèse WAH.

Preuve. Soit $X = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, toute métrique sur X s'écrit $\varphi^*(g)$, où φ est un difféomorphisme de X et

$$g = e^h(A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2)$$

avec $\int_X e^h\,dx\,dy = 0$.

On est donc amené à considérer, pour $g_0 = A_0\,dx^2 + 2B_0\,dx\,dy + C_0\,dy^2$, une valeur propre $\lambda_0 \neq 0$ du laplacien. Soit

$$P = \{\mu = (m, n) \in \mathbf{Z}^2 \mid g_0^*(\mu) = \lambda_0\}$$

alors l'espace propre E_0 est engendré par les exponentielles $e_\mu(x, y) = \exp(2\pi i(mx + ny))$ où $\mu \in P$. Soit

$$d\Phi : C_0^\infty(X, \mathbf{C}) \oplus (\mathbf{C}\,dx^2 \oplus \mathbf{C}\,dx\,dy \oplus \mathbf{C}\,dy^2) \mapsto \mathcal{Q}(E_0) \otimes \mathbf{C}$$

la complexifiée de la différentielle de Φ en g_0, où $C_0^\infty(X, \mathbf{C}) = \{f \in C^\infty(X, \mathbf{C}) \mid \int_X f = 0\}$.

On a, d'après le §1:

$$[d\Phi(f \oplus 0)]_{\mu,\mu'} = C\int_X f e_\mu e_{\mu'}$$

avec $\mu, \mu' \in P$, et

$$[d\Phi(0 \oplus (\alpha\,dx^2 + 2\beta\,dx\,dy + \gamma\,dy^2))]_{\mu,\mu'}$$
$$= C\int_X \left[\alpha \frac{\partial e_\mu}{\partial x}\frac{\partial e'_\mu}{\partial x} + \beta\left(\frac{\partial e_\mu}{\partial x}\frac{\partial e'_\mu}{\partial y} + \frac{\partial e_\mu}{\partial y}\frac{\partial e'_\mu}{\partial x}\right) + \gamma \frac{\partial e_\mu}{\partial y}\frac{\partial e'_\mu}{\partial y}\right] dx\,dy.$$

Donc, si $\mu + \mu' \neq 0$, $\quad {}^t d\Phi(e_\mu \circ e_{\mu'}) = C^{te} e_{\mu+\mu'} \oplus \ldots$ si $\mu + \mu' = 0$,

$${}^t d\Phi(e_\mu \circ e_{-\mu}) = 0 \oplus C^{te}(m^2 \oplus 2mn \oplus n^2) \text{ où } \mu = (m, n).$$

Comme les $\mu + \mu'$ sont 2 à 2 distincts lorsque $\{\mu, \mu'\}$ sont distincts, on voit que l'injectivité ${}^t d\Phi$ se réduit au fait que les vecteurs (m^2, mn, n^2) sont linéairement indépendants pour les différentes valeurs de μ à symétrie près ($\mu \mapsto -\mu$). Ce qui est le cas si et seulement s'il y a moins de 3 telles paires, i.e. si $N \leq 6$.

4. Cas des graphes

Donnons d'abord quelques définitions: les graphes que nous allons considérer sont des graphes finis, non orientés et connexes; S sera l'ensemble des sommets et A, l'ensemble des arêtes, est un sous-ensemble de l'ensemble des parties à 2 éléments de S.

On se donne une mesure $\mu = \sum_{i \in S} V_i \, \delta(i)$ $(V_i > 0)$, $\mu_0 = \sum_{i \in S} \delta(i)$ sera appellée la mesure canonique. Un *laplacien combinatoire* Δ sur Γ est défini par la donnée de μ et d'une forme quadratique

$$q(x_i) = \sum_{a \in A} c_a (d_a x)^2 \quad \text{où} \quad d_a x = x_i - x_j \quad \text{si} \quad a = \{i, j\};$$

Δ est alors donné par:

$$(\Delta x)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{\{i,j\} \in A} c_{\{i,j\}} (x_i - x_j)$$

Un *opérateur de Schrödinger* combinatoire est un opérateur de la forme $H = \Delta + V$, où V est diagonale.

Par la transformation unitaire $U(x_i) = \sqrt{V_i}\, x_i$ de $L^2(S, \mu)$ sur $L^2(S, \mu_0)$, on ramène un tel opérateur à un opérateur H de matrice symétrique $(H) = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} < 0$ si $\{i, j\} \in A$, $a_{i,j} = 0$ si $\{i, j\} \notin A$ et $i \neq j$. Ainsi nous considérons soit des laplaciens sur $L^2(S, \mu)$, soit des opérateurs de Schrödinger sur $L^2(S, \mu_0)$.

Soit C_N le *graphe complet* à N sommets, i.e. tel que tout couple de sommets distincts est l'ensemble des extrémités d'une arête; C_N a donc $N(N-1)/2$ arêtes.

On désigne aussi par E_N le *graphe en étoile* à N branches ($N+1$ sommets et N arêtes). On a les:

THÉORÈME 1. *Si* $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$ *et* $\mu = \sum_{i=1}^{N} V_i \, \delta(i)$ *sont donnés, il existe un laplacien combinatoire sur* (C_N, μ) *ayant ce spectre avec multiplicités.*

De plus la partie $\mathrm{Sp}^*(\Delta) = \mathrm{Sp}(\Delta) - \{0\}$ *vérifie SAH relativement aux déformations de* Δ *à* μ *fixé.*

On a le même résultat, avec $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$, *pour les opérateurs de Schrödinger* H *sur* $L^2(C_N, \mu_0)$ *avec SAH pour le spectre entier.*

THÉORÈME 2. *Soit* $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{N+1}$, *il existe* μ *et* Δ *sur* (E_N, μ) *ayant ce spectre et* $\mathrm{Sp}^*(\Delta)$ *vérifie SAH relativement aux déformations de* Δ (μ *variable*).

Remarque. Soit Δ_0 sur (E_N, μ_0) associé à $q_0(x_i) = \sum_{i=1}^{N} (x_0 - x_i)^2$, alors le spectre de Δ_0 est $0 < 1 = 1 = \cdots = 1 < (N+1)$ et la valeur propre 1 ne vérifie pas WAH relativement aux déformations de μ_0 et de Δ_0 si $N \geq 5$.

Les applications de ces résultats élémentaires sont à la construction de spectres prescrits, mais aussi à de curieux critères de non-plongement de graphes dans une surface (voir [CV2], [CV3] et [CV4]).

Par exemple, si un graphe Γ admet un opérateur de Schrödinger combinatoire de spectre $\lambda_1 < \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k+2} < \ldots$ où λ_2 est de multiplicité k et vérifie WAH relativement aux déformations de H, alors Γ n'est planaire que si $k \leq 3$.

Preuve du théorème 1.

Hypothèse SAH. Soit $\Phi : \mathbf{R}_+^A \mapsto \mathcal{Q}(E_0)$, où

$$A = \{\text{arêtes de } C_N\}, \qquad E_0 = \{(x_i) \in L^2(S, \mu) \mid \langle (x_i) \mid 1 \rangle = 0\},$$

définie par

$$\Phi(c_{i,j}) = \sum_{i,j} c_{i,j}(x_i - x_j)^2 |_{E_0}.$$

A cause des dimensions, il suffit de vérifier l'injectivité. Cela est laissé au lecteur.

Le cas de Schrödinger est analogue.

Existence: elle se montre par récurrence sur le nombre N et la notion de *suspension* d'un graphe. Si Γ est un graphe fini à N sommets $\{1, 2, \ldots, N\}$, muni d'une mesure $\mu = \sum_{i=1}^N V_i \, \delta(i)$ et d'une forme quadratique

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} c_a (d_a x)^2 \quad (c_a > 0),$$

on construit pour tout $V_0 > 0$ et $a > 0$ un graphe $S\Gamma$ de sommets $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$, en joignant chaque sommet de Γ au nouveau sommet 0 par une arête. On l'équipe de la mesure $S\mu = V_0 \, \delta(0) + \mu$ et de la forme quadratique

$$Sq(x_0, x_1, \ldots, x_N) = a \sum_{i=1}^N V_i (x_0 - x_i)^2 + q(x_1, \ldots, x_N).$$

Les valeurs propres non nulles de $S\Gamma$, muni de ce laplacien combinatoire sont les $\lambda_j + a$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$, λ_j valeurs propres de Γ et la valeur propre $\Lambda = a(1 + (\sum_{i=1}^N V_i)/V_0)$.

Soit à réaliser pour $S\Gamma$ le spectre

$$\Lambda_1 = 0 < \Lambda_2 \leq \cdots \leq \Lambda_{N+1}.$$

On choisit a tel que $a(1+(\sum_{i=1}^{N} V_i)/V_0)=\Lambda_2$. On doit alors avoir pour

$$2\leq j\leq N, \qquad \lambda_j=\Lambda_{j+1}-a>0, \quad (\text{car } \Lambda_2>a).$$

On raisonne alors par récurrence pour construire Γ ayant $0<\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_N$ comme spectre.

Preuve du théorème 2. Il est facile de vérifier que les valeurs propres non nulles sont les solutions de

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{c_i}{(\lambda-(c_i/V_i))}=1,$$

et donc

$$0<\frac{c_1}{V_1}<\lambda_2<\frac{c_2}{V_2}<\cdots<\frac{c_N}{V_N}<\lambda_{N+1}$$

si les c_i/V_i sont 2 à 2 distincts et ordonnés.

On se donne la suite $0<\lambda_2<\lambda_3<\cdots<\lambda_{N+1}$ et on choisit a_i tels que $0<a_1<\lambda_2<a_2<\cdots<a_N<\lambda_{N+1}$. Les λ_i sont alors les solutions de $\sum_{i=1}^{N} c_i/(\lambda-a_i)=1$ et donc les $(-c_i)$ sont les résidus en $\lambda=a_i$ de $R(\lambda)=\prod_{i=2}^{N+1}(\lambda-\lambda_i)/(\lambda-a_i)$. Il est facile de vérifier que les c_i ainsi définis sont >0 et on pose $V_i=c_i/a_i$. L'application $(V_i, c_i)\mapsto(\lambda_j)_{j\geq 2}$ est une submersion, car le procédé précédent donne un relèvement analytique local où les c_i/V_i sont fixés, d'où SAH.

Pour la deuxième partie, il suffit de compter les dimensions: à cause de l'invariance par dilatation, on peut supposer $V_0=1$ et on a

$$\#\,\text{paramètres}=2N; \qquad \dim(\mathcal{Q}(E_0))=N(N-1)/2$$

et donc, si

$$N\geq 6, \qquad \dim\mathcal{Q}(E_0)>\#\,\text{paramètres}.$$

On ne peut avoir une application essentielle, donc WAH n'est pas vérifiée.

RÉFÉRENCES

[AD] V. Arnold, *Modes and quasi-modes,* Functional Anal. Appl., *6* (1972), 94–101.

[C–C] B. Colbois et Y. Colin de Verdière, *Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante,* Comment. Math. Helv., *63* (1988).

[CV1] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien*, Comment. Math. Helv., *61* (1986), 254–270.

[CV2] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectres de variétés riemanniennes et spectres de graphes*, Proc. ICM. Berkeley, (1986).

[CV3] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Constructions de Laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée*, soumis aux Annales de l'E.N.S., (1987).

[CV4] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité*, soumis à J. of combinatorial theory, (1987).

Université de Grenoble I
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
F-38402 Saint Martin d'Hères

Reçu le 27 octobre 1986