Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 58 (1983)

Artikel: Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnold et de Moser sur le tore de dimension 2.

Autor: Herman, Michael R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44609

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 58 (1983) 453–502 0010–2571/83/003453–50$01.50 + 0.20/0
© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnold et de Moser sur le tore de dimension 2

MICHAEL R. HERMAN

1. Introduction et notations

1.1. Pour $r>0$ on considère le polydisque

$$D_r^n=\{(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n \mid |z_i|\leq r,\ 1\leq i\leq n\},$$

où, si $z\in\mathbb{C}$, $|z|^2=z\bar{z}$, ainsi que le polycercle

$$\mathbb{T}_r^n=\{(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n \mid |z_i|=r,\ 1\leq i\leq n\},$$

qui est difféomorphe à $\mathbb{T}^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, et on désigne la mesure de Haar normalisée sur $\mathbb{T}_r^n$ par m ou $d\theta$ ($\mathbb{T}^1$ sera toujours identifié au cercle unité $\mathbb{T}_1^1$ de $\mathbb{C}$ par le difféomorphisme $t\to e^{2\pi it}$).

1.2. Soit X un espace compact métrisable non vide et m une mesure de probabilité sur X. On se donne une application continue g de X dans X et une application continue A de X dans une algèbre de Banach $(\mathcal{B},\|\ \|)$ où $\|\ \|$ est une norme d'algèbre de $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}$.

Au couple (g, A) on associe l'application fibrée (aussi appelée produit gauche, produit croisé ou skew produit)

$$\bar{G}:(x,y):X\times\mathcal{B}\to(g(x),A(x)y)\in X\times\mathcal{B}$$

au dessus de $g:X\to X$. On a, si $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\bar{G}^k(x,y)=(g^k(x),A_g^k(x)y),\qquad A_g^k(x)=A(g^{k-1}(x))\cdots A(x).$$

On pose

$$\lambda_+(g,A)=\liminf_{k\to+\infty}\frac{a_k}{k}\quad\text{où}\quad a_k=\int_X \operatorname{Log}\|A_g^k(x)\|\,dm(x),\qquad \lambda_+(g,A)\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}.$$

(L'intégrale étant ici et dans la suite l'intégrale inférieure.) (on peut avoir $\lambda_+(g, A) = -\infty$). On note aussi $\lambda_+(g, A) = \lambda_+(X, g, A)$ pour indiquer que $g : X \to X$.

La valeur de $\lambda_+(g, A)$ ne change pas si on remplace la norme de $\mathscr{B}$ par une norme d'espace de Banach équivalente. Ceci implique $\lambda_+(g, A) = \lambda_+(g, A \otimes 1)$, où $(A \otimes 1)(x) = A(x) \otimes 1 \in \mathscr{B} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et $\mathscr{B} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est l'algèbre de Banach compléxifié de $\mathscr{B}$, sur laquelle on peut par exemple choisir pour norme sur $\mathbb{C}$ $\|x \otimes \lambda\| = \|x\| \, |\lambda|$.

1.3. Si l'application g préserve la mesure m (i.e. $g_* m = m$) alors la suite (a_k) est sous additive (i.e. $a_{k+p} \leq a_k + a_p$ pour tout entier $k \geq 1$ et $p \geq 1$) et on a

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{k} = \operatorname*{Inf}_{k \geq 1} \frac{a_k}{k}$$

et de plus la suite $(2^{-p} a_{2^p})_{p \geq 1}$ est décroissante. Sous la même hypothèse, par le théorème ergodique sous-additif [3] la suite de fonction $((1/k) \operatorname{Log} \|A_g^k(x)\|)_{k \geq 1}$ converge, si $k \to +\infty$, m-presque partout vers une fonction Ψ, presque partout invariante par g et vérifiant $\int_X \Psi(x) \, dm = \lambda_+(g, A)$.

Si $g_* m = m$, l'application $(g, A) \to \lambda_+(g, A) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est semi-continue supérieurement si sur les couples (g, A) on met la topologie de la convergence uniforme. Dans la littérature $\lambda_+(g, A)$ s'*appelle l'exposant de Lyapounov maximal.*

1.4. Il y a un cas que nour allons décrire où, pratiquement par définition, on a $\lambda_+(g, A) > 0$.

On se place dans la situation suivante: on suppose que $\mathscr{B}_1$ est un espace de Banach de norme notée $\| \ \|_1$ et A une application continue de X dans l'algèbre $\mathscr{L}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_1)$ des opérateurs $\mathbb{R}$-linéaires continus de $\mathscr{B}_1$ dans $\mathscr{B}_1$ avec la topologie de la norme. On fait agir (g, A) sur $X \times \mathscr{B}_1$ par $G(x, y) = (g(x), A(x)y)$. Si m est une mesure de probabilité sur X on définit $\lambda_+(G) = \lambda_+(\bar{G})$.

DÉFINITION. *On dit que l'application fibrée G a une structure partiellement hyperbolique si le fibré trivial $X \times \mathscr{B}_1 \to X$ est la somme directe de 2 fibrés continus E^S et E^u (si $x \in X$, E_x^s désigne la fibre en $x \in X$ de E^s) et s'il existe des nombres l_1 et l_2 vérifiant, $l_1 > 1$, $l_1 > l_2 > 0$, et $C > 1$ tels que, quels que soient $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on ait:*

- *pour tout $x \in X$, $\dim(E_x^u) \neq 0 \neq \dim(E_x^s)$;*
- *si $v_x \in E_x^u$, $\|G^n(v_x)\|_1 \geq C^{-1} l_1^n \|v_x\|_1$,*
- *si $w_x \in E_x^s$, $\|G^n(w_x)\|_1 \leq C l_2^n \|w_x\|_1$.*

On dit que l'application fibrée G a une structure hyperbolique quand de plus on peut choisir $l_2<1$.

Remarques. 1) Cette définition implique que les fibrés E^u et E^s sont sous-invariants par G (i.e. $G(E^u)\subset E^u$ $G(E^s)\subset E^s$).

2) Si on se restreint aux G qui sont des *homéomorphismes fibrés*, le fait que G ait une *structure partiellement hyperbolique* (resp. *hyperbolique*) est une propriété *stable* par perturbation de G dans la topologie la convergence uniforme [18, p. 100–1].

1.5. *Résumé de l'article*

Nous nous proposons de donner une méthode pour constuire sur $\mathbb{T}^n_{r_0}\times\mathbb{C}^2$ ou $\mathbb{T}^n_{r_0}\times\mathbb{R}^2$ des examples explicites d'applications fibrées G $\mathbb{R}$-analytiques vérifiant $\lambda_+(\mathbb{T}^n_{r_0}, G)>0$ mais n'ayant pas de structure hyperbolique. Millionščikov a suggéré en 1969 la possibilité d'exemples au-dessus d'une rotation irrationnelle de $\mathbb{T}^1$ [13] (voir aussi [10] et [19]) (mais de tels exemples ne sont ni explicites, ni précis en ce qui concerne les rotations qu'on peut choisir).

Au §2 nous donnons une méthode abstraite pour minorer, sur des exemples d'applications fibrées $G: D^n_{r_0}\times\mathbb{C}^p\to D^n_{r_0}\times\mathbb{C}^p$ holomorphes l'exposant $\lambda_+(G)$. Cette méthode est basée sur l'utilisation des propriétés des fonctions plurisousharmoniques. En 2.8 et 2.9 nous inclurons une généralisation aux groupes compacts abéliens dont les groupes duaux sont totalement ordonnables.

Au §3 nous étudions des exemples où la méthode du §2 s'applique immédiatement.

En 3.2 nous démontrons un corollaire (immédiat) du théorème de C. L. C. Siegel, tel qu'il a été généralisé par E. Zehnder [20], sur les formes normales d'une application holmorphe au voisinage d'un point fixe: le théorème de Siegel fibré au-dessus d'une rotation.

Les exemples 3.3 et 3.5 montrent que le théorème de Siegel fibré est un théorème local et ceci indépendamment de toute condition arithmétique (il est immédiat de voir que le théorème de Siegel est local ainsi que le montre l'exemple 3.4).

En 3.7 nous donnons un exemple au-dessus d'un difféomorphisme d'Anosov ayant des exposants mais pas de structure hyperbolique.

Au §4 nous donnons des exemples de difféomorphismes fibrés $\mathbb{R}$-analytiques F de $\mathbb{T}^1\times\mathbb{R}^2$ $F=(R_\alpha, A)$ où $R_\alpha(\theta)=\theta+\alpha$ et $A:\theta\in\mathbb{T}^1\to A(\theta)\in SL(2,\mathbb{R})$. Ces exemples sont encore une application de la méthode abstraite du §2.

En 4.1 nous retrouvons l'exemple que nous avons construit dans [5] et je pense que le §2 est la version abstraite induite par cet exemple, qui n'a pas de structure hyperbolique puisque $\theta\to A(\theta)$ n'est pas homotope à une matrice constante unité (cf 4.2).

En 4.5 et 4.7 nous donnons des exemples où l'application $\theta \in \mathbb{T}^1 \to A(\theta) \in SL(2, \mathbb{R})$ est homotope à la matrice constante unité.

Pour s'assurer qu'on peut choisir, dans l'exemple 4.5, F sans structure hyperbolique on montre que $\lambda_+(R_\alpha, \tilde{R}_\beta \cdot A) > 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{T}^1$ et $\beta \in \mathbb{T}^1$, où

$$\tilde{R}_\beta = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\beta & -\sin 2\pi\beta \\ \sin 2\pi\beta & \cos 2\pi\beta \end{pmatrix}$$

et on choisit β de façon ad hoc en utilisant la théorie du nombre de rotation fibrée. On peut même fixer arbitrairement dans $(\mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \times \mathbb{T}^1$ le vecteur de rotation du difféomorphisme induit par F sur $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ ayant des exposants et pas de structure hyperbolique (voir 4.6).

Nos exemples one l'avantage d'être $\mathbb{R}$-analytiques et de ne dépendre d'aucune condition arithmétique sur le vecteur de rotation.

4.13 montre que ces exemples n'ont pas en général des propriétés analogues à celles des contre-exemples de Denjoy sur le cercle.

L'exemple 4.14 a des propriétés analogues à celles des exemples suggérés par Millionščikov [13], exemples à propos desquels le lecteur se rapportera à R. A. Johnson [10, 3.13 et §5] pour des démonstrations et quelques propriétés. Le lecteur consultera aussi [8] et [9].

Les §§4.14 à 4.16 sont très semblables à certains des résultats de R. Johnson [10] bien que l'auteur de ces lignes les ait obtenus indépendamment. Dans l'annexe 4.17 nous avons, pour la commodité du lecteur, inclus une proposition essentiellement due à R. Johnson.

Au §5 nous définissons et démontrons quelques propriétés du nombre de rotation fibré pour des homéomorphismes de la forme $F : (x, \theta) \in X \times \mathbb{T}^1 \to (g(x), h(x)(\theta)) \in X \times \mathbb{T}^1$, où $x \to h(x) \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ est homotope à l'application constante identité et X est un espace compact métrique. La raison de l'esistence en est presque la même que pour le nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle et la démonstration que nous en proposons est presque celle que nous avons donnée pour les homéomorphismes du cercle [4, II]. Nous étudions aussi les propriétés analogues à celles qu'on a pour le cercle [4, II et III]. Pour d'autres généralisations aux homéomorphismes de $\mathbb{T}^n$ homotope à l'Id le lecteur se rapportera [4, XIII] (la situation est infiniment plus compliquée).

Le théorème d'Arnold et de Moser [4, Appendice] a des corollaires fibrés 5.11, 5.12 et 5.14. Le corollaire 5.12 est l'analogue de la proposition [4, A.2.3] pour les difféomorphismes du cercle. Le corollaire 5.14 (presque immédiat) du théorème d'Arnold et de Moser affirme que, pour les matrices fibrées à valeurs dans $PSL(2, \mathbb{R})$ au-dessus de translations diophantiennes de $\mathbb{T}^{n-1}$, la conjugaison fibrée de 5.12 se fait par des matrices fibrées. Pour des généralisations à des matrices de plus de 2 variables et un affaiblissement des conditions diophantien-

nes, le lecteur se rapportera à J. Moser [14] et en classe C^∞ à [6]. Le lecteur peut aussi consulter H. Rüssmann [17].

Les exemples 4.6 et 4.12 montrent que le théorème d'Arnold et de Moser sur $\mathbb{T}^n$, $n \geq 2$ est en un certain sens un théorème local, et ceci indépendamment de toute condition d'analycité ou d'approximation par les rationnels du vecteur de rotation, ce qui contraste avec le cas du cercle [4, IX].

Au §6.1 nous étudions la dépendance plurisousharmonique en fonction de paramètres complexes de $\lambda_+(g, A)$. En 6.2 et 6.3 nous donnons des applications dont 6.2 nous semble inattendue.

Dans l'exposé des exemples nous avons évité une trop grande généralité et un caractère exhaustif bien que nos méthodes soient tout à fait générales. Le principe est qu'ayant la minoration du §2, on peut ensuite faire des modifications tout en gardant la minoration. La minoration du Scolie de 4.1 est en général instable par perturbation, et on peut montrer dans l'exemple 4.1 par une perturbation C^0 que l'exposant tombe à 0.

L'existence du nombre de rotation fibré pour certains homéomorphismes fibrés de $X \times \mathbb{T}^1$ a été trouvée indépendamment de l'auteur de cet article par R. Johnson (un peu avant) [11], par une méthode très semblable. En fait la méthode est la même que celle de [2] et [4, II]. Comme notre démonstration est plus générale et que nous avons besoin de certaines des propriétés de 5.9 pour 5.12 et 4.12 nous avons inclus notre démonstration.

Les exemples de 4.7 confirment très simplement et généralisent une conjecture de G. André et S. Aubry [1, 4.4]. J. Avron et B. Simon annoncent dans [A] une démonstration rigoureuse de l'argument esquissé par G. André et S. Aubry [1, 4.4].

Une partie des résultats a été annoncée au séminaire de théorie Ergodique de l'Université Paris VI en Janv. et Février 1980 (i.e. essentiellement le §2 et 4.1) ainsi qu'au séminaire de théorie ergodique tenu aux Plans sur Bex en Mars 1980.

Je voudrais remercier A. Chenciner, A. Fathi, J. P. Thouvenot et J. C. Yoccoz pour des discussions fructueuses. Je voudrais aussi remercier très vivement l'Université de Warwick pour sa très grande hospitalité pendant mon séjour en Juin et Juillet 1979 durant lequel ce travail a été en grande partie effectué.

Je remercie R. Johnson de m'avoir signalé une erreur au §4.14 de la version préliminaire. Je remercie M. Chaperon de m'avoir aidé à relire le manuscrit, ainsi que C. Harmide de l'avoir tapé avec dextérité et grand soin et A. Fathi de m'aoir aidé à relire la version préléminaire.

1.6. *Notations*

Si X est un espace compact métrique, on note $C^0(X) = C^0(X, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur X à valeurs réelles avec la norme $\|\varphi\|_{C^0} = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$. Si

Y est un espace topologique, $C^0(X, Y)$ désigne les applications continues de X dans Y avec la topologie compacte ouverte. Si Ψ est une application de X dans Y le graphe de Ψ est l'esemble $\{(x, \Psi(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$.

Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $SL(2, K)$ désigne le groupe des matrices 2×2 sur K déterminant 1.

Pour p un entier positif on désigne par $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ (resp. $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p)$) les applications $\mathbb{R}$-linéaires (resp. $\mathbb{C}$ linéaires) de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ (resp. $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}^p$). On supposera toujours que les espaces vectoriels $\mathbb{R}^p$ (resp. $\mathbb{C}^p$) sont munis de leurs bases canoniques, et on identifiera les espaces $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ et $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p)$ à des espaces de matrices. On considérera toujours $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

On désignera par $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ l'espace projectif sur $\mathbb{R}$ de dimension 1 (i.e. les droites de $\mathbb{R}^2$ passant l'origine). Le groupe $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/_{\{-e, e\}}$ où e est la matrice unité, agit canoniquement par transformations projectives sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. On supposera toujours que $SL(2, \mathbb{R})$ ou $PSL(2, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ par cette action. L'espace $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ est identifié à $\mathbb{T}^1$ par $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{T}^1/_{x \sim -x}$.

2. Théorème de minoration des exposants

2.1. On considère une application f holomorphe d'un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ vérifiant la condition suivante.

$$*_{r_0} \begin{cases} \text{a) Il existe } r_0 > 0 \text{ tel que } f \text{ soit holomorphe sur un voisinage de } D^n_{r_0}. \\ \text{b) } f(D^n_{r_0}) \subset D^n_{r_0} \text{ et } f(\mathbb{T}^n_{r_0}) \subset \mathbb{T}^n_{r_0}. \\ \text{c) } f(0) = 0. \end{cases}$$

Si f vérifie la condition $*'_{r_0}$ et

d) f laisse invariant la mesure de Haar sur $\mathbb{T}^n_{r_0}$ (i.e. $f_* m = m$),[1]

on dit que f vérifie la condition $*'_{r_0}$.

2.2. *Exemples d'applications vérifiant* $*'$

a) Pour tout n, l'application

$$(z_1, \ldots, z_n) \to (\beta_1 z_1, \ldots, \beta_n z_n) \qquad |\beta_i| = 1, 1 \leq i \leq n,$$

vérifie la condition $*'_r$ pour tout $r > 0$.

b) Si $n = 1$, l'application $z \to z^2$ vérifie $*'_1$.

[1] $f_* m$ désigne la mesure image directe de la mesure m par l'application continue f.

c) Si $n=2$, $(z_1, z_2) \to (z_1^2 z_2, z_1 z_2)$ vérifie $*_1'$, cette application sur $\mathbb{T}_1^2$ étant conjugúee à l'automorphisme de $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ défini par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Si $n=2$, $(z_1, z_2) \to (z_1(z_2-b)/(1-\bar{b}z_2), \beta z_2)$, où b et $\beta \in \mathbb{C}$, $|b|<1$, $|\beta|=1$, vérifie $*_1'$.

e) Si $n=2$, $b \in \mathbb{C}$, $0<|b|<1$ alors $(z_1, z_2) \to (z_1^2(z_2-b)/(1-\bar{b}z_2), z_1 z_2)$ vérifie $*_1$ mais pas $*_1'$.

2.3. On se donne f vérifiant la condition $*_{r_0}$ et une application holomorphe A d'un voisinage de $D_{r_0}^n$ dans une algèbre Banach sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}$, $\| \ \|$ étant une norme sur $\mathbb{C}$ de l'algèbre $\mathcal{B}$. Sur $\mathbb{T}_{r_0}^n$ on met la mesure de Haar m. On note encore f la restriction de f à $\mathbb{T}_{r_0}^n$. On considère l'application fibrée (f, A) de $\mathbb{T}_{r_0}^n \times \mathcal{B}$. Si $a \in \mathcal{B}$ on note le rayon spectral de a par

$$\mathrm{Rspec}\,(a) = \lim_{n \to +\infty} \|a^n\|^{1/n} = \operatorname*{Inf}_{n \geq 1} \|a^n\|^{1/n}.$$

THÉORÈME. *Sous les hypothèses ci-dessus on a*

$$\lambda_+(f, A) \geq \mathrm{Log}\,(\mathrm{Rspec}\,(A(0))).$$

Démonstration. La fonction $z \to (1/k)\,\mathrm{Log}\,\|A_f^k(z)\|$ est plurisousharmonique, voir [7, 2.6.1] (on se ramène au cas $n=1$ et on fait la même démonstration que [7, 1.6.6]). On a (cf. par exemple [12]):

$$\frac{a_k}{k} = \int_{\mathbb{T}_{r_0}^n} \frac{1}{k} \mathrm{Log}\,\|A_f^k(z)\| dm \geq \frac{1}{k} \mathrm{Log}\,\|A_f^k(0)\| = \frac{1}{k} \mathrm{Log}\,\|A^k(0)\|;$$

or

$$\operatorname*{Inf}_{k \geq 1} \frac{1}{k} \mathrm{Log}\,\|A^k(0)\| = \mathrm{Log}\,(\mathrm{Rspec}(A(0)))$$

et donc

$$\operatorname*{Inf}_{k \geq 1} a_k/k \geq \mathrm{Log}\,(\mathrm{Rspec}(A(0))). \quad \blacksquare$$

2.4. *Remarque.* Soit f l'exemple 2.2 a) et A une application holomorphe d'un voisinage de $D_{r_0}^n$ dans une algèbre de Banach $\mathcal{B}$. L'application (f, A) définit une famille d'applications fibrées dépendant d'un paramètre $0 \leq r \leq r_0$ de $\mathbb{T}_r^n \times \mathcal{B}$ dans lui-même. Soit l'application $r \in [0, r_0[\to \lambda_+(\mathbb{T}_r^n, f, A)$ aussi notée $\lambda_+(r, f, A)$. On a les propriétés suivantes (pour f et A fixés):

a) $r \to \lambda_+(r, f, A)$ est monotone non décroissante;
b) $r \to \lambda_+(r, f, A)$ est convexe en $\operatorname{Log} r$;
c) $r \in [0, r_0[\to \lambda_+(r, f, A)$ est continue;
d) $\lambda_+(0, f, A) = \operatorname{Log}(\operatorname{Rspec}(A(0)))$;
e) si $\lambda_+(r, f, A) = -\infty$ pour un $r > 0$ alors pour tout r, $\lambda_+(r, f, A) = -\infty$.

En effet, par la même démonstration que celle de 6.1, la fonction $z \in \mathbb{C} \to \lambda_+(|z|, f, A)$ est sousharmonique et il suffit d'appliquer [12.2.3].

2.5. Si dans 2.3 on suppose que $f : \mathbb{T}^n_{r_0} \to \mathbb{T}^n_{r_0}$ est totalement uniquement ergodique (i.e. pour $n \neq 0$, f^n est uniquement ergodique, pour un exemple cf. 2.2. a)), alors, par une démonstration analogue à celle de [5], on peut prouver 2.3 en n'utilisant que le principe du maximum.

2.6. La minoration de 2.3 est stable par parturbation de (f, A) vérifiant les conditions de 2.3 et en supposant de plus que $A(0)$ est un point de continuité de la fonction $\operatorname{Rspec} : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ (cette fonction est continue en tout point de $\mathcal{B}$ si $\mathcal{B}$ est une algèbre unitaire de dimension finie). On peut montrer que l'on n'a pas, en général, de minoration stable si l'on perturbe l'application fibrée (f, A) de $\mathbb{T}^n_{r_0} \times \mathcal{B}$ dans la topologie de la convergence uniforme.

2.7. Il serait intéressant de savoir si, dans le théorème 2.3, on peut évaluer la différence $\lambda_+(f, A) - \operatorname{Log}(\operatorname{Rspec}(A(0)))$ en utilisant la théorie du potentiel. Si $n = 1$, cette différence peut être envisagée, en un sens à préciser, comme une généralisation de la formule de Jensen (cf. 6.1).

2.8. *Groupes abéliens compacts dont les groupes duaux sont totalement ordonnables*

On suppose que $X = G$ est un groupe abélien compact métrique dont le groupe dual $\hat{G}$ soit sans torsion. Ceci équivaut à dire que G est connexe. On suppose la loi de groupe de $\hat{G}$ notée additivement.

Il suit de [16, 8.1.2] que $\hat{G}$ peut être considéré comme un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}$ (i.e. G est un groupe solénoïdal).

$\hat{G}$ peut donc être muni d'un ordre total P compatible avec sa structure de groupe: il existe un monoïde $P \subset \hat{G}$ vérifiant:

$$0 \in P, \qquad P + P \subset P, \qquad P \cap (-P) = \{0\}, \qquad P \cup (-P) = \hat{G}.$$

Ce que nous allons voir dépend de l'ordre P choisi sur $\hat{G}$ et on a souvent intérêt dans les exemples à choisir P de différentes façons.

On met sur G la mesure de Haar normalisée m. On suppose que $g : G \to G$ est une affinité continue P-positive: g est la composition d'une translation de G et

d'un endomorphisme continu P-positif : $\hat{g}(P) \subset P$, où $\hat{g} : \hat{G} \to \hat{G}$ est l'endomorphisme dual de g.

Si l'affinité g est surjective, alors g préserve la mesure de Haar m de G (un endomorphisme continu est surjectif si et seulement si $\hat{g}$ est injective).

EXEMPLES. · On convient que toute translation de G est P-positive.

· Soient $G = \mathbb{T}^2$, $\hat{g} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $(1, \lambda)$ une direction propre de $\hat{g}$.

On choisit $P = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m + \lambda n \geq 0\}$, voir [16. 8.1.7]. L'automorphisme g de $\mathbb{T}^2$ est P-positif.

2.9. Soit $\mathcal{B}$ un algèbre de Banach sur $\mathbb{C}$ avec la norme $\| \ \|$. On définit $H^\infty_{P,\mathcal{B}} \equiv H^\infty_P(G, m, \mathcal{B}) = \{\varphi \in L^\infty(G, m, \mathcal{B}) \mid \hat{\varphi}(x) = 0 \text{ si } x \notin P\}$. On vérifie que $H^\infty_{P,\mathcal{B}}$ est une algèbre de Banach et si φ et $\psi \in H^\infty_{P,\mathcal{B}}$, on a

$$\int \varphi\psi \, dm = \left(\int \varphi \, dm\right) \cdot \left(\int \psi \, dm\right).$$

(Il suffit d'utiliser la densité dans $H^\infty_{P,\mathcal{B}}$ des polynômes trigonométriques de $H^\infty_{P,\mathcal{B}}$, pour la topologie de L^2, propriété résultant d'arguments standards en considérant la convolution de $\varphi \in H^\infty_{P,\mathcal{B}}$ par des polynômes trigonométriques de G à valeurs réelles.)

On définit de façon analogue les espaces $H^\infty_{P,\mathcal{B}}$, $q \geq 1$. Pour plus de détails sur cette généralisation, due à Helson et Lowdenslager, des espaces d'Hardy le lecteur consultera [16, chap. 8].

PROPOSITION. *Si $\varphi \in H^1_{P,\mathcal{B}}$ alors on a*

$$\operatorname{Log} \|\hat{\varphi}(0)\| \leq \int_G \operatorname{Log} \|\varphi(x)\| \, dm(x).$$

Démonstration. Par [16, p. 205], si l'on pose $\Delta(\varphi) = \exp \int \operatorname{Log} \|\varphi(x)\| \, dm(x)$ alors

$$\Delta(\varphi) = \operatorname*{Inf}_{Q \in \Omega} \int |e^{Q(x)}|^2 \, \|\varphi(x)\| \, dm(x),$$

où Ω désigne l'ensemble des polynômes trigonométriques Q vérifiant $\hat{Q}(0) = 0$ et

$\hat{Q}(x)=0$ si $x \notin P$. On a pour tout $Q \in \Omega$

$$\|\hat{\varphi}(0)\| = \left\| \int e^{2Q}\varphi \, dm \right\| \leq \int |e^{Q}|^2 \|\varphi\| \, dm$$

et le résultat suit. ■

2.10. On se donne G un groupe abélien compact métrisable avec un ordre total P sur $\hat{G}$, $g : G \to G$ une affinité P-positive surjective et $A \in H_P^\infty(G, m, \mathscr{B})$. On a $A \circ g \in H_{P,\mathscr{B}}^\infty$ et $\widehat{A \circ g}(0) = \hat{A}(0)$.

Pour l'application fibrée (mesurable) (g, A) de $G \times \mathscr{B}$, la même démonstration que 2.3 donne en utilisant 2.9:

PROPOSITION. *Avec les hypothèses ci-dessus on a*

$$\lambda_+(g, A) \geq \mathrm{Log}\,(\mathrm{Rspec}\,(\hat{A}(0))).$$

Remarque. La condition $*_1'$ de 2.1 est satisfaite par des transormations f de $\mathbb{T}_1^n$ qui ne sont pas nécessairement des affinités du groupe $\mathbb{T}_1^n$, voir 2.2 d).

3. Exemples avec des matrices holomorphes

3.1. On se place sur $\mathbb{C}$ et on considère $f_\beta(z) = \beta z$, $|\beta| = 1$.

1) Soit $A : z \in \mathbb{C} \to e^z \in \mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$ alors par la formule de Jensen on a pour tout $r \geq 0$, $\lambda_+(\mathbb{T}_r^1, f_\beta, A) = 0$.

2) On met sur l'algèbre de Banach $\mathscr{B}$ sur $\mathbb{C}$ une norme $\| \ \|$ d'algèbre sur $\mathbb{C}$. Par exemple $\mathscr{B} = \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$. On considère une application polynomiale

$$A : \mathbb{C} \to \beta, \ A(z) = A_0 + zA_1 + \cdots + z^p A_p \quad \text{où les} \quad A_i \in \mathscr{B}$$

pour $i = 0, 1, \ldots, p$ et $p \geq 1$. *On Suppose que* A_p *vérifie* $\mathrm{Rspec}\,(A_p) \neq 0$.

PROPOSITION. *Sour les hypothèses ci-dessus, si* $r \to +\infty$, *alors on a*

$$\lambda_+(\mathbb{T}_r^1, f_\beta, A) \to +\infty.$$

Démonstration. On pose $C(Z) = Z^p A_0 + \cdots + A_p$ (i.e. on pose $Z = 1/z$ pour se placer au voisinage de $+\infty$) et on a $C(Z) = A(z)/z^p$). On a si $|Z| = r$, $|Z| = 1/r$ et

$$\operatorname{Log} \|A(\beta^{n-1}z) \cdots A(z)\| = \operatorname{Log} \|C(\bar{\beta}^{n-1}Z) \cdots C(Z)\| + np \operatorname{Log} r$$

et donc

$$\lambda_+(\mathbb{T}^1_r, f_\beta, A) = \lambda_+(\mathbb{T}^1_{1/r}, f_\beta, C) + p \operatorname{Log} r.$$

Par 2.3 $\lambda_+(\mathbb{T}^1_r, f_\beta, C) \geq \operatorname{Log}(\operatorname{Rspec}(A_p)) > -\infty$ et donc, si $r \to +\infty$, $\lambda_+(\mathbb{T}^1_r, f_\beta, A) \to +\infty$. ■

3) *Exemples de* $A : \mathbb{C} \to SL(2, \mathbb{C}) \subset \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ *vérifiant* 2)

· $z \to \begin{pmatrix} P(z) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, où P est un polynôme de degré $p \geq 1$.

· En composant des matrices de la forme $z \to \begin{pmatrix} 1 & P(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et des matrices $B \in SL(2, \mathbb{C})$ on obtient des applications polynomiales $A(z) = A_0 + \cdots + A_p z^p$ et quitte à considérer $BA(z)$ avec $B \in SL(2, \mathbb{C})$ choisi de façon adhoc, on peut supposer que la condition de 2) est vérifiée.

3.2. *Une application du théorème de Siegel: le théorème de Siegel fibré*

On se donne des entiers positifs k et p. On considère

$$f_\beta(z_1, \ldots, z_k) = (\beta_1 z_1, \ldots, \beta_k z_k), \qquad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k), \qquad |\beta_i| = 1 \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq k,$$

une application $A : D^k_r \to \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p)$ holomorphe sur l'intérieur de D^k_r, $r > 0$, telle que $A(0) \in GL(p, \mathbb{C})$ soit une matrice diagonale

$$A(0) = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\lambda}_p \end{pmatrix}$$

et on suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$\lambda A(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

satisfasse à la *condition diophantienne suivante*: il existe $C > 0$, $\gamma > 0$ tels que l'on

ait

$$|\lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_p^{i_p} \beta_1^{i_{p+1}} \cdots \beta_k^{i_{p+k}} - \lambda_j| \geq C\,|i|^{-\gamma}$$
$$|\lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_p^{i_p} \beta_1^{i_{p+1}} \cdots \beta_k^{i_{p+k}} - \beta_l| \geq C\,|i|^{-\gamma}$$

pour $1 \leq j \leq p$, $1 \leq l \leq k$ et $i = (i_1, \ldots, i_{p+k}) \in \mathbb{N}^{p+k}$ vérifiant $|i| = \Sigma i_j \geq 2$.

PROPOSITION. *Sous les conditions ci-dessus il existe* $0 < R_0 < r$ *dépendant seulement de* γ, C, *et* r, *une application holomorphe* $B : D^k_{R_0} \to GL(p, \mathbb{C})$, $B(0) = e =$ *la matrice unité, tel que si* $z \in D^k_{R_0}$ *on ait*

$$B(f_\beta(z))^{-1} A(z) B(z) = A(0).$$

Démonstration. On considère le $\mathbb{C}$-difféomorphisme local

$$F : (z, \eta) \in (\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^p, 0) \to (f_\beta(z), \lambda A(z)\eta) \in (\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^p, 0)$$

Par le théorème de C. L. C. Siegel, généralisé par E. Zehnder [20], il existe un unique germe de difféomorphisme holomorphe $h : (\mathbb{C}^{k+p}, 0) \to (\mathbb{C}^{k+p}, 0)$ vérifiant $Dh(0) = e$ et

$$h^{-1} \circ F \circ h(z, \eta) = (f_\beta(z), \lambda A(0)\eta)$$

si $\|\eta\| + \|z\|$ est assez petit. La série formelle de h est aussi unique (moyennant la condition $Dh(0) = e$), et on vérifie sans peine que, formellement,

$$h(z, \eta) = (z, B(z)\eta), \qquad B(0) = e.$$

Par l'unicité des séries formelles il suit qu'il existe R_0 tel que $B : D^k_{R_0} \to GL(p, \mathbb{C})$ soit une application holomorphe et vérifie les conclusions de la proposition. ■

3.3. *Un exemple*

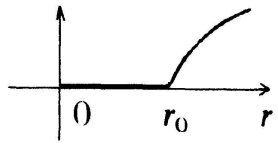
Soit $z \in \mathbb{C} \to A(z) = \begin{pmatrix} E + P(z) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ où $P(z) = a_1 z + \cdots + a_p z^p$, $a_p \neq 0$, $E \in \mathbb{R}$ et $|E| < 2$, $A(0)$ est conjugué à la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ avec $\alpha = e^{2\pi i a}$, où $a \in \mathbb{T}^1$ vérifie $2 \cos 2\pi a = E$. On vérifie que pour Lebesgue presque tout $E \in]-2, 2[$ et $\beta \in \mathbb{T}^1_1$ (i.e. $|\beta| = 1$) l'application fibrée (f_β, A) de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ satisfait à 3.2. Il en résulte, pour un tel choix et par 3.2, que la fonction $r \to \lambda_+(r, f_\beta, A)$ (*cf.* 2.4) a la

propriété suivante: il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\lambda_+(r, f_\beta, A) = 0, \quad \text{si} \quad 0 \leq r \leq r_0. \tag{1}$$

Par 3.1.2) *on a*

$$\lambda_+(r, f, A) \to +\infty, \quad \text{si} \quad r \to +\infty. \tag{2}$$



graphe de $\lambda_+(r, f_\beta, A)$

3.4. *Remarque.* La propriété (2) montre que le théorème de Siegel n'est pas un théorème global, ce qui *n'est pas étonnant du tout*:

EXEMPLE. Soient $F_1(z_1, z_2) = (\alpha_1 z_1 + z_2^2, \alpha_2 z_2)$, $F_2(z_1, z_2) = (z_1, z_2 + z_1^2)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $|\alpha_i| = 1$, $\alpha_1 \neq 1 \neq \alpha_2$. On pose $G = F_1 \circ F_2^{-1}$ qui est un difféomorphisme de $\mathbb{C}^2$ tel que $G(0) = 0$, $DG(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$. G possède 3 autres points fixes que 0 solutions de

$$F_1(z) = F_2(z) \quad \text{où} \quad z = (z_1, z_2) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} z_2^2 = (1 - \alpha_1) z_1 \\ z_1^2 = (-1 + \alpha_2) z_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow z_2 = 0 \quad \text{et} \quad z_2^3 = (\alpha_2 - 1)(1 - \alpha_1)^2.$$

Il en résulte que le difféomorphisme G n'est pas conjugué sur tout $\mathbb{C}^2$ à sa partie linéaire en 0!

3.5. *Nous allons donner un autre exemple où* 3.3(1) *se produit.*

1) *Soient* $f_\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forme $f_\beta(z) = \beta z$, $|\beta| = 1$, et $A(z) = A_0 + zA_1 \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p)$ où A_0 et A_1 sont des matrices constantes. Si β est une racine primitive $q^{\text{ème}}$ de l'unité on a

$$\operatorname{Tr}(A_{f_\beta}^q(z)) = \operatorname{Tr}(A_0^q) + \operatorname{Tr}(A_1^q) z^q \beta^{q(q-1)/2};$$

où Tr désigne la trace et $\beta^{q(q-1)/2} = \pm 1$. ($\operatorname{Tr}(A_{f_\beta}^q(z)) = P(z)$ où P est un polynôme de degré q dont le terme constant et celui de degré q sont ceux proposés; or $P(\beta z) = P(z)$ (puisque $\operatorname{Tr}(B_1 B_2) = \operatorname{Tr}(B_2 B_1)$), donc les autres termes du polynôme P sont nuls.)

2) On suppose que

$$A_{a,\lambda}(z)=\begin{pmatrix} 2\cos 2\pi a+\lambda z & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$a\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\lambda\in\mathbb{C}-\{0\}$, $|\lambda|\leq 1$. Si $\beta=e^{2\pi i p/q}$ où p et q sont premiers entre eux avec q impair, on a

$$\mathrm{Tr}\,(A^q_{f_\beta}(z))=2\cos 2q\pi a+\lambda^q z^q. \tag{+}$$

3) PROPOSITION. *On fixe $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda\neq 0$, $|\lambda|\leq 1$. Il existe un G_δ dense $G_1\subset \mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^1_1$ tel que, si $(a,\beta)\in G_1$, alors $\lambda_+(1,f_b,A_{a,\lambda})=0$.*

Démonstration. Par 1.3, la fonction $(a,\beta)\to\lambda_+(1,f_\beta,A_{a,\lambda})$ est semi-continue supérieurement. On veut montrer que, pour tout $\varepsilon>0$, l'ouvert $U_\varepsilon=\{(a,\beta)\mid\lambda_+(1,f_\beta,A_{a,\lambda})<\varepsilon\}$ est dense. Il suivra que $\bigcap_{\substack{n\geq 1\\ n\in\mathbb{N}}} U_{1/n}$ est un G_δ dense. Pour voir que U_ε est dense il suffit de montrer qu'il existe un entier $N>0$ tel que si $a=p_1/q$, $\beta=e^{2\pi i p/q}$, où $(p_1,q)=1$, $(p,q)=1$, q est impair et $q\geq N$, alors

$$0\leq\lambda_+(1,f_\beta,A_{p_1/q,\lambda})<\varepsilon.$$

On a

$$\mathrm{Tr}\,(A^q_{f_\beta}(z))=2+\lambda^q z^q,$$

donc le maximum des modules des valeurs propres de $A^q_{f_\beta}(z)$ sur $\mathbb{T}^1_1$ est majoré par $c_q=1+(|\lambda|^q)/2+(|\lambda|^q+\frac{1}{4}|\lambda|^{2q})^{1/2}$ (puisque l'équation des valeurs propres de $A^q_{f_\beta}(z)$ est $Y^2-(2+\lambda^q z^q)Y+1=0$). Or

$$\lambda_+(1,f_\beta,A_{p_1/q,\lambda})\leq\frac{1}{q}\,\mathrm{Log}\,c_q.$$

Donc, si $q\to+\infty$, comme $|\lambda|\leq 1$, $1/q\,\mathrm{Log}\,c_q\to 0$. ■

4) PROPOSITION. *Il existe un G_δ dense $G_2\subset\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^1_1$ tel que si $(a,\beta)\in G_2$ alors pour tout $r>0$*

$$\Phi_r(a,\beta)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\operatorname*{Max}_{|z|\leq r}\|(A_{a,\lambda})^n_{f_\beta}(z)\|\right)=+\infty.$$

5) *Remarque.* Si $(a, \beta) \in G_2$ et $a \neq 0$ ou $\frac{1}{2}$ alors, sur tout voisinage de 0, le difféomorphisme holomorphe de $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2, 0)$ $F(z, \eta) = (\beta z, A(z)\eta)$ n'est pas holomorphiquement équivalent à sa partie linéaire, qui est, pour $a \neq 0$ ou $\frac{1}{2}$, conjuguée à une matrice unitaire.

Démonstration de 4). Par la monotonie de $\Phi_r(a, \beta)$ (voir 2.4a)), il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{1/n} = \{(a, \beta) \mid \Phi_{1/n}(a, \beta) = +\infty\}$ est un G_δ dense et de poser $G_2 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} H_{1/n}$. L'application $(a, \beta) \to \Phi_{1/n}(a, \beta)$ est semi-continue inférieurement et donc $H_{1/n}$ est un G_δ. $H_{1/n}$ est dense puisqu'il contient tous les $a = p_1/q$, $\beta = e^{2\pi i p/q}$, $(p_1, q) = 1$, $(p, q) = 1$, q impair, car pour un tel couple il existe un z_0 arbitrairement petit tel $(A_{a,\lambda})^q_{f_\beta}(z_0)$ soit une matrice hyperbolique. ■

6) Si on choisit $(a, \beta) \in G_1 \cap G_2$, alors la fonction $r \to \lambda_+(r, f_\beta, A_{a,\lambda})$ vérifie pour tout $0 \leq r \leq 1$, $\lambda_+(r, f_\beta, A_{a,\lambda}) = 0$. Si $r \to +\infty$, comme $\lambda \neq 0$ par 3.1.2), $\lambda_+(r, f_\beta, A_{a,\lambda}) \to +\infty$. Comme $(a, \beta) \in G_2$, si $a \neq 0$, ou $\frac{1}{2}$, alors la remarque 5) s'applique.

7) Ce que nous venons de faire reste valable sur $\mathbb{T}^1_r$ tant $r \leq 1/|\lambda|$. Si $r > 1/|\lambda|$ il existe un ouvert U dense de (a, λ, β) tel que si $(a, \lambda, \beta) \in U$ alors $(f_\beta, A_{a,\lambda})$ agissant sur $\mathbb{T}^1_r \times \mathbb{C}^2$ ait une structure hyperbolique. (En effet, si $z \in \mathbb{C}$ et $N > 0$ vérifie $|\lambda z|^N > 4$ et si β est une racine primitive $q^{\text{ème}}$ de l'unité avec $q \geq N$, alors par (+) on a, pour tout $a \in \mathbb{T}^1$, $|\mathrm{Tr}\,(A_{a,\lambda})^q_{f_\beta}(z)| > 2$. Ceci implique que la matrice $(A_{a,\lambda})^q_{f_\beta}(z)$ est une matrice hyperbolique sur $\mathbb{C}$ et de plus ses directions invariantes dépendent holomorphiquement de z pour $|\lambda z|^N > 4$. Il suffit alors d'appliquer la remarque 2) de 1.4.)

9) On peut démontrer le théorème de Siegel fibré pour $(f_\beta, A_{a,\lambda})$, très simplement de la façon suivante. On pose $\alpha = e^{2\pi i a}$ et on cherche une application holomorphe

$$z \to v(z) = \begin{pmatrix} \eta_1(z) \\ \eta_2(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

telle que l'on ait

$$\begin{pmatrix} \eta_1(\beta z) \\ \eta_2(\beta z) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2\cos 2\pi a + \lambda z & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1(z) \\ \eta_2(z) \end{pmatrix}$$

avec $\eta_1(0) = \bar{\alpha}$ et $\eta_2(0) = 1$. Soit

$$\eta_2(\beta z) = \alpha \eta_1(z)$$

et

$$\bar{\alpha}\eta_1(\beta z)+\alpha\eta_1(\bar{\beta}z)-(\alpha+\bar{\alpha})\eta_1(z)=\lambda z\eta_1(z).$$

Si on écrit $\eta_1(z)=\sum_{k\geq 0} b_k z^k$ on a les relations de récurrences:

$$b_0=\bar{\alpha}$$

$$\lambda b_{n-1}=P_\alpha(\beta^n)b_n, \quad \text{so} \quad n\geq 1$$

avec $P_\alpha(z)=(z/\alpha)+(\alpha/z)-(\alpha+(1/\alpha))$. Si pour tout $n\geq 1$, $\beta^n\neq 1$ et $\beta^n\neq\alpha^2$ on peut résoudre et on obtient:

$$b_n=\frac{\lambda^n\bar{\alpha}}{P_\alpha(\beta)\cdots P_\alpha(\beta^n)}.$$

Pour étudier la convergence on remarque, que par la formule de Jensen, on a $\int_0^1 \operatorname{Log}|P_\alpha(e^{2\pi i\theta})|\,d\theta=0$ et il suit d'un théorème de Koksma [K] (on peut aussi adapter l'article d'Hardy et Littlewood [H]), que si $a\in\mathbb{T}^1$ est fixé, alors pour Lebesgue presque tout $\beta\in\mathbb{T}_1^1$, si $n\to+\infty$, $(1/n)\operatorname{Log}|P_\alpha(\beta)\cdots P_\alpha(\beta^n)|\to 0$.

Il en résulte que pour, Lebesgue presque tout $(a,\beta)\in\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}_1^1$, (avec $\alpha\neq\pm 1$ et β n'est pas une racine de l'unité) il existe 2 applications holomorphes sur $\{z\mid |z|<|\lambda|^{-1}\}$, $z\to v_i(z)\in\mathbb{C}^2$, $i=1,2$, telles que a matrice $H(z)=(v_1(z),v_2(z))$ (i.e. ayant les vecteurs colonnes $v_1(z)$ et $v_2(z)$) vérifie

$$A_{a,\lambda}(z)H(z)=H(\beta z)\begin{pmatrix}\bar{\alpha} & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H(0)=\begin{pmatrix}\bar{\alpha} & \alpha\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Il en résulte que $\det H(z)=\det H(\beta z)$ et donc comme $\alpha\neq\pm 1$ et que β n'est pas une racine de l'unité, on a $\det H(z)=\det H(0)\neq 0$. On obtient finalement, si $|z|<|\lambda|^{-1}$, $H^{-1}(\beta z)A_{a,\lambda}(z)H(z)=\begin{pmatrix}\bar{\alpha} & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$.

Remarques. 1. Si $a=0$ ou $\frac{1}{2}$ (i.e. si $\alpha=\pm 1$) alors pour Lebesgue presque tout $\beta\in\mathbb{T}_1^1$ il existe un nombre $0<R_0<|\lambda|^{-1}$ et des matrices $H_0(z)$ et $H_{1/2}(z)$ holomorphes inversibles sur $\{z\mid |z|<R_0\}$, et $c\in\mathbb{C}^*$ telles que l'on ait

$$H_a^{-1}(\beta z)A_{a,\lambda}(z)H_a(z)=\begin{pmatrix}\alpha & c\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} \quad \text{si} \quad a=0,\tfrac{1}{2}.$$

(La démonstration est presque la même. On détermine d'abord un vecteur holomorphe $v_1(z)=\begin{pmatrix}\eta_1(z)\\ \eta_2(z)\end{pmatrix}$ comme ci-dessus, puis on considère la matrice holomorphe $H_a(z)=(v_1(z), v_2(z))$ où $v_2(z)=\begin{pmatrix}0\\ 1/\eta_1(z)\end{pmatrix}$. On a

$$H_a^{-1}(\beta z)A_{a,\lambda}(z)H_a(z)=\begin{pmatrix}\alpha & c_a(z)\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$$

pour $|z|<R_0$ et $a=0, \frac{1}{2}$ où $c_a(z)$ est une fonction holomorphe sur $\{z \mid |z|<R_0\}$. La remarque suit facilement en conjugant par des matrices de la forme $z\to\begin{pmatrix}1 & d_a(z)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.)

2. Pour Lebesgue presque tout a et β, par la démonstration ci-dessus le théorème de Siegel est valable sur $\{z \mid |z|<|\lambda|^{-1}\}$. Par 3.1, si $r>1/|\lambda|$, on a $\lambda_+(\mathbb{T}_r^1, f_\beta, A_{a,\lambda})>0$.

3.6. *Une exemple avec une matrice non inversible en un point*

On considère $f_\beta(z)=\beta(z)$, $|\beta|=1$, $z\in\mathbb{C}$ et

$$z\to A(z)=\begin{pmatrix}E & -1+z\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad E\in\mathbb{R}, \quad E>2.$$

On a par 2.3, pour tout $r>0$, $\lambda_+(\mathbb{T}_r^1, f_\beta, A)>0$. Si on considère l'application fibrée (f_β, A) sur $\mathbb{T}_1^1\times\mathbb{C}^2$ alors $\det(A(z))=1-z$ s'annule en $z=1$. Par la formule de Jensen on a, si $0\le r\le 1$, $\int_{\mathbb{T}_r^1}\operatorname{Log}|1-z|\,dm=0$ et donc si $0<r\le 1$ l'application fibrée (f_β, A) sur $\mathbb{T}_r^1\times\mathbb{C}^2$ a 4 exposants de Lyapounov sur $\mathbb{R}$ non nuls: 2 sont égaux à $\lambda_+(\mathbb{T}_r^1, f_\beta, A)$ et 2 *à* $-\lambda_+(\mathbb{T}_r^1, f_\beta, A)$. (Il suffit de considérer

$$z\to\frac{1}{|\det A(z)|^{1/2}}A(z)=B(z), \qquad z\neq 1,$$

de noter que $B(z)\in SL(2,\mathbb{C})$, $\operatorname{Log}\|B^{\pm 1}\mid\mathbb{T}_1^1\|\in L^1(m)$ et d'appliquer [15] en utilisant le fait que $B(z)$ est une matrice définie sur $\mathbb{C}$.)

3.7. *Un exemple avec un difféomorphisme d'Anosov*

Soit $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$, $f(z_1, z_2)=(z_1^2z_2, z_1z_2)$ (voir 2.2. c)) $f(1,1)=(1,1)$. Soit

$$A(z_1, z_2)=\begin{pmatrix}E-\lambda z_1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{C}), \quad \text{où} \quad E\in\mathbb{R}, \qquad E>2.$$

On a $\operatorname{Log}(\operatorname{Rspec}(A(0)))>0$. On suppose que E est fixé, et que $\lambda\in\mathbb{R}$ vérifie $|E-\lambda|\leq 2$. La matrice

$$A(1,1)=\begin{pmatrix} E-\lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est donc elliptique (i.e. conjugué à une matrice unitaire) si $|\lambda-E|<2$ et parabolique si $E-\lambda=\pm 2$.

Le difféomorphisme fibré (f, A) sur $\mathbb{T}_1^2\times\mathbb{C}^2$ par 2.2a) et 2.3 vérifie $\lambda_+(f, A)>0$ mais le diffémorphisme fibré n'a pas de structure hyperbolique puisque $f(1,1)=(1,1)$ et que $A(1,1)$ est une matrice de $SL(2,\mathbb{R})$ elliptique ou parabolique.

Remarque. Pour $E-\lambda=\pm 2$, le difféomorphisme fibré (f, A) ne laisse pas invariant un scindement continu (non trivial) du fibré (trivial) $\mathbb{T}_1^2\times\mathbb{C}^2$. On peut construire d'autres exemples (f, B_λ) de difféomorphismes fibrés de $\mathbb{T}_1^2\times\mathbb{R}^2$ qui ne laissent invariant aucun scindement continu (non trivial) du fibré $\mathbb{T}_1^2\times\mathbb{R}^2$ et qui vérifient $\lambda_+(f, B_\lambda)>0$. Pour cela on choisit f un difféomorphisme d'Anosov comme ci-dessus, B_λ comme en 4.1 avec $\lambda>1$ et on raisonne comme en 4.2.

3.8. *Un exemple d'application dans $SL(2,\mathbb{C})$ sans structure hyperbolique*

On considère $f_\beta:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f_\beta(z)=\beta z$ avec $\beta=e^{2\pi i\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, et

$$z\in\mathbb{C}\to A(z)=\begin{pmatrix} E+\lambda z & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{C})$$

où $E\in\mathbb{R}$, $E>2$ et $\lambda\in\mathbb{C}^*$.

On suppose que β est choisit pour que 3.2 s'applique à (f_β, A), (pour Lebesgue presque tout α cela sera le cas). Il en résulte qu'il existe $r_0>0$, tel que pour $0<r\leq r_0$, on ait:

$$\lambda_+(\mathbb{T}_r^1, f_\beta, A)=\operatorname{Log}\mu>0 \quad \text{avec} \quad \mu=\operatorname{Rspec}(A(0));$$

$f_\beta\times A$ agissant sur $D_{r_0}^1\times\mathbb{C}^2$ a une structure hyperbolique.

Par 3.1, si $r\to+\infty$, $\lambda_+(\mathbb{T}_r^1, f, A)\to+\infty$.

PROPOSITION. *Sous les hypothèses ci-dessus il existe $r_1>0$, tel que le difféomorphisme fibré $f_\beta\times A$ de $\mathbb{T}_{r_1}^1\times\mathbb{C}^2$ n'ait pas de structure hyperbolique mais vérifie par* 2.3: $\lambda_+(\mathbb{T}_{r_1}^1, f, A)\geq\operatorname{Log}\mu$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Si pour tout $r>0$, le difféomorphisme fibré $f\times A$ de $\mathbb{T}^1_r\times\mathbb{C}^2$ avait une structure hyperbolique cette structure dépendrait continument de r et même analytiquement. Cette structure hyperbolique sur $\mathbb{T}^1_r\times\mathbb{C}^2=E^s_r\oplus E^u_r$ serait complexe (i.e. les fibrés continues E^s_r et E^u_s seraient des fibrés complexes, puisque A est une matrice définie sur $\mathbb{C}$, dans la définition de 1.4, on peut multiplier les vecteurs v_x et w_x par $\lambda\in\mathbb{C}^*$). Les fibrés E^s_r et E^u_r comme fibrés continues complexes dépendraient $\mathbb{R}$-analytiquement de $r>0$ (cela résulte de la démonstration [18 p. 100–101] en complexifiant le paramètre r). Il en résulterait que la fonction $r\to\lambda_+(r, f_\beta, A)$ est $\mathbb{R}$-analytique ce qui est absrude. ■

4. Exemples avec $SL(2,\mathbb{R})$

4.1. a) on se place sur $\mathbb{T}^1$ et on considère la rotation (ou translation) $R_\alpha(\theta)=\theta+\alpha$. Soit $B_\lambda:\mathbb{T}^1\to SL(2,\mathbb{R})$ la matrice

$$B_\lambda(\theta)=\begin{pmatrix}\cos 2\pi\theta & -\sin 2\pi\theta\\ \sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\lambda}\end{pmatrix},\quad \text{où}\quad \lambda\in\mathbb{R}\quad\text{et}\quad \lambda\geq 1.$$

On considère sur $\mathbb{T}^1\times\mathbb{R}^2$ le difféomorphisme fibré associé à (R_α, B_λ). Nous allons démontrer à nouveau le théorème 3.1. de [5]. On met sur $\mathbb{T}^1$ la mesure de Haar notée m ou $d\theta$.

PROPOSITION. *On a* $\lambda_+(R_\alpha, B_\lambda)\geq \operatorname{Log}((\lambda/2)+(1/2\lambda))$.

Démonstration. On pose $\beta=e^{2\pi i\alpha}$, $\cos 2\pi\theta=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$, $\sin 2\pi\theta=\dfrac{1}{2i}(z-z^{-1})$, pour $z=e^{2\pi i\theta}$, $|z|=1$. On se place sur $\mathbb{T}^1_1$ dans $\mathbb{C}$. Soit

$$\frac{A_\lambda(z)}{z}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(z+z^{-1}) & -\frac{1}{2i}(z-z^{-1})\\ \frac{1}{2i}(z-z^{-1}) & \frac{1}{2}(z+z^{-1})\end{pmatrix}\Lambda=\frac{1}{z}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(z^2+1) & -\frac{1}{2i}(z^2-1)\\ \frac{1}{2i}(z^2-1) & \frac{1}{2}(z^2+1)\end{pmatrix}\Lambda$$

avec $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\lambda}\end{pmatrix}$.

On considère l'application fibrée (f_β, A_λ) de $\mathbb{T}^1_1 \times \mathbb{C}^2$, où $f_\beta(z) = \beta z$. On met sur $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ une norme d'algèbre sur $\mathbb{C}$. Pour $z = e^{2\pi i\theta}$, on a

$$\|A_\lambda(\beta^{n-1}z) \cdots A_\lambda(z)\| = \|B_\lambda(\theta + (n-1)\alpha) \cdots B_\lambda(\theta)\|$$

d'où

$$\lambda_+(R_\alpha, B_\lambda) = \lambda_+(\mathbb{T}^1_1, f_\beta, A_\lambda).$$

Par 2.3 on a $\lambda_+(\mathbb{T}^1_1, f_\beta, A_\lambda) \geq \operatorname{Log}(\operatorname{Rspec}(A_\lambda(0))) = \operatorname{Log}(\lambda/2 + 1/2\lambda)$. ■

b) Par la même démonstration que ci-dessus et en se plaçant aussi au voisinage de $+\infty$ comme en 3.1.2) on a le

Scolie. Soit $\mathscr{B}$ une algèbre de Banach sur $\mathbb{C}$ (par exemple $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$) et $A : \mathbb{T}^1 \to \mathscr{B}$ un polynôme trigonométrique de la forme

$$A(\theta) = \sum_{|k| \leq n} A_k e^{2\pi i k\theta} \quad \textit{ou} \quad A_k \in \mathscr{B}.$$

Pour l'application fibré (R_α, A) de $\mathbb{T}^1 \times \mathscr{B}$, on a

$$\lambda_+(R_\alpha, A) \geq \operatorname{Log} a_n,$$

où

$$a_n = \operatorname{Max}(\operatorname{Rspec}(A_n), \operatorname{Rspec}(A_{-n})).$$

c) Une généralisation de b) est la suivante: on se place sous les hypothèses de 2.10, et l'on considère un polynôme trigonométrique $A : G \to \mathscr{B}$ de la forme

$$A(g) = \sum_{k=0}^{n} A_k \chi_k(g) \quad \text{si} \quad g \in G, \qquad A_k \in \mathscr{B} \quad \text{et pour} \quad 0 \leq k \leq n, \qquad \chi_k \in \hat{G}.$$

On suppose que χ_0 est le minimum de l'esemble $\{\chi_0, \ldots, \chi_n\}$ pour l'ordre total P sur $\hat{G}$. Comme $\bar{\chi}_0 A \in H^\infty_{p,\mathscr{B}}$, on a, par 2.10, la

PROPOSITION. $\lambda_+(g, A) \geq \operatorname{Log}(\operatorname{Rspec}(A_0))$.

4.2. PROPOSITION. *Soit $B : \mathbb{T}^1 \to SL(2, \mathbb{R})$ une application continue non homotope à la matrice constante unité alors l'homéomorphisme $F = (R_\alpha, B) : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2$ n'a pas de structure hyperbolique (voir partiellement hyperbolique).*

Démonstration. Si F laisse invariant 2 fibrés E^u et E^s sur $\mathbb{T}^1$ de some directe le fibré trivial, alors F agit comme homéomorphisme sur $\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, le fibré en espaces projectifs associé un fibré trivial $\mathbb{T}^1\times\mathbb{R}^2$, et laisse invariant les fibrés projectifs associés à E^u et E^s. Comme les fibrés projectifs associés aux fibrés de rang 1 E^u ou E^s sont triviaux, il en résulte que le difféomorphisme fibré

$$\begin{array}{ccc} F:\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ R_\alpha:\ \mathbb{T}^1 & \longrightarrow & \mathbb{T}^1 \end{array}$$

laisse invariante l'image d'une section continue du fibré $\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)\to\mathbb{T}^1$, p_1 étant la première projection. Ceci n'est pas possible car le difféomorphisme F de $\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)\approx\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^1$ est homotope à $(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{T}^2\to(\theta_1,\theta_2+2k\theta_1)\in\mathbb{T}^2$ avec $k\in\mathbb{Z}-\{0\}$. L'existence d'une section continue invariante par F n'est pas compatible avec l'action de $F_*:H_1(\mathbb{T}^2,\mathbb{Z})\circlearrowleft$ en homologie $\left(\text{i.e. }\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2k & 1\end{pmatrix}\right)$. ■

4.3 *Remarques.* 1) Les fibrés E^u et E^s ne sont pas nécessairement triviaux puisque, si ξ est le fibré de rang 1 non trivial sur $\mathbb{T}^1$, (i.e. un ruban de Möbius), alors $\xi\oplus\xi=\mathbb{T}^1\times\mathbb{R}^2$. Pour tout $\theta\in\mathbb{T}^1$, on définit $B_\lambda(v_\theta,w_\theta)=(\lambda v_\theta,(1/\lambda)w_\theta)$ si $(v_\theta,w_\theta)\in\xi_\theta\oplus\xi_\theta$, où ξ_θ est la fibre de ξ en $\theta\in\mathbb{T}^1$ et $\lambda\neq 0$ un nombre fixé. B_λ est homotope à une matrice constante.

2) Si l'homéomorphisme fibré $F:\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)\circlearrowleft$ est de la forme $F=(R_\alpha,B)$ où B est une application continue de $\mathbb{T}^1$ dans $PSL(2,\mathbb{R})=SL(2,\mathbb{R})/\{-e,e\}$, laisse invariant les graphes de 2 fonctions continues distinctes $\Psi_i:\mathbb{T}^1\to\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ pour $i=1,2$, alors il existe $H(\theta,y)=(\theta,l(\theta)y)$, où $l:\mathbb{T}^1\to PSL(2,\mathbb{R})$ est une application continue, tel que l'on ait

$$H^{-1}\circ F\circ H(\theta,y)=(\theta+\alpha,K(\theta)y),\ \text{où}$$

$$K(\theta)=\begin{pmatrix}\varphi(\theta) & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\varphi(\theta)}\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\varphi\in C^0(\mathbb{T}^1,\mathbb{R}_+^*).$$

En effet, si Ψ_1 est homotope à une constante, alors il en va de même de Ψ_2 et il suffit d'amener pour tout θ les éléments $\Psi_1(\theta)$ et $\Psi_2(\theta)$ de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ sur respectivement les points de coordonnées projectives $(1,0)$ et $(0,1)$ et si nécessaire multiplier les matrices par $-e$. Si Ψ_1 est de degré $k\neq 0$, il suffit de remplacer F par $S_k^{-1}\circ F\circ S_k$, où S_k est défini en 5.16, pour se ramener au cas ou Ψ_1 est homotope

à une constante. Si F est de classe C^r ainsi que les fonctions Ψ_i, alors on peut supposer que H et K sont aussi de classe C^r.

4.5. *Une exemple d'application dans $Sl(2,\mathbb{R})$ homotope à l'identité*

On se donne $\varepsilon>0$ petit, $\eta>0$ et λ tel que $\lambda\varepsilon>2+\eta$. Soit

$$B(\theta)=\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}\cos 2\pi\theta & -\sin 2\pi\theta\\ \sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\lambda}\end{pmatrix}.$$

On considère (R_α, B) agissant sur $\mathbb{T}^1\times\mathbb{R}^2$. Par le scolie de 4.1 on a, pour tout $\alpha\in\mathbb{T}^1$, $\lambda_+(R_\alpha, B)\geq \operatorname{Log}(\varepsilon\lambda/2+\varepsilon/2\lambda)$. Si $\varepsilon>0$ est assez petit, l'application $\theta\in\mathbb{T}^1\to C(\theta)=B(\theta)/(\det B(\theta))^{1/2}\in SL(2,\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}$-analytique et homotope à la matrice constante unité. On a

$$\lambda_+(R_\alpha, C)=\lambda_+(R_\alpha, B)-\frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{Log}(\det B(\theta))\,d\theta,$$

si $\varepsilon\to 0$, $\frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{Log}(\det B(\theta))\,d\theta\to 0$ et donc si ε est assez petit $\lambda_+(R_\alpha, C)>0$. On a mieux: si $\beta\in\mathbb{T}^1$, on pose

$$\tilde{R}_\beta=\begin{pmatrix}\cos 2\pi\beta & -\sin 2\pi\beta\\ \sin 2\pi\beta & \cos 2\pi\beta\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad(\tilde{R}_\beta B)(\theta)=\tilde{R}_\beta B(\theta),$$

on vérifie comme en 4.1 que $\lambda_+(R_\alpha, \tilde{R}_\beta B)\geq \operatorname{Log}(\varepsilon\lambda/2+\varepsilon/2\lambda)$. Si $\varepsilon\lambda>2+\eta$, pour $\varepsilon>0$ assez petit, l'application $\mathbb{T}^1\ni\theta\to\tilde{R}_\beta C(\theta)\in SL(2,\mathbb{R})$ est de classe C^ω, homotope à la matrice constante $\theta\to e$ et on a pour tout $\alpha\in\mathbb{T}^1$ et $\beta\in\mathbb{T}^1$

$$\lambda_+(R_\alpha, \tilde{R}_\beta C)>0 \tag{1}$$

4.6. PROPOSITION. *Soit $\alpha\in\mathbb{T}^1-(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$; pour tout $\beta\in\mathbb{T}^1$, il existe une matrice $\mathbb{T}^1\ni\theta\to C_\beta(\theta)\in SL(2,\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-analytique, homotope à la matrice constante unité et vérifiant*:

a) $\lambda_+(R_\alpha, C_\beta)>0$.

b) *Le difféomorphisme induit sur $\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ par le difféomorphisme fibré (R_α, C_β) de $\mathbb{T}^1\times\mathbb{R}^2$ a pour vecteur de rotation (α,β)* (cf. 5.16).

c) *Le difféomorphisme de $\mathbb{T}^1\times\mathbb{R}^2$, $F=(R_\alpha, C_\beta)$ n'a pas de structure hyperbolique.*

Démonstration. On se fixe α. On a par définition (voir 5.16) $\rho(R_\alpha, \tilde{R}_b C) = (\alpha, \rho_f(R_\alpha, \tilde{R}_b C))$. Comme l'application $b \in \mathbb{T}^1 \to \rho_f(\tilde{R}_b C)$ est continue et monotone croissante de degré 1, elle est surjective (voir 5.9.3)). Il existe donc b_1 tel que $\rho_f(R_\alpha, \tilde{R}_{b_1} C) = \beta$. On choisit de façon plus précise b_1: on pose $I_\beta = \{b_1, \rho_f(\tilde{R}_{b_1} C) = \beta\}$; I_β est un intervalle $[a_1, a_2](a_1 \leq a_2)$. Soit

$$b_1 \in I_\beta \quad \text{si} \quad \beta \notin \mathbb{Z}\alpha \bmod 1; \qquad b_1 = a_1 \text{ ou } a_2 \quad \text{si} \quad \beta \in \mathbb{Z}\alpha \bmod 1.$$

On pose $C_\beta = \tilde{R}_{b_1} C$.

La propriété a) est vérifiée par (1), b) par construction. Si $\beta \notin \mathbb{Z}\alpha \bmod 1$ la propriété c) résulte de 5.17. Si $\beta \in \mathbb{Z}\alpha (\bmod 1)$ alors (R_α, C_β) n'a pas de structure hyperbolique car l'ensemble des b tels que le difféomorphisme fibré $(R_\alpha, \tilde{R}_b C)$ ait une structure hyperbolique est ouvert et vérifie $\rho_f(R_\alpha, \tilde{R}_b C) \in \mathbb{Z}\alpha \bmod 1$. Or nous avons choisi $b_1 \notin \operatorname{Int} I_\beta$. ■

4.7. *Un autre exemple d'application dans $SL(2, \mathbb{R})$ homotope à l'identité*

Soit $p(\theta) = \sum_{|k| \leq n} a_k e^{2\pi i k\theta}$ un polynôme trigométrique de degré fixé n, $n \geq 1$ et $a_k \in \mathbb{C}$. On suppose que $|a_{-n}| > 1$. Soit l'application

$$\theta \in \mathbb{T}^1 \to A(\theta) = \begin{pmatrix} p(\theta) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Si p est à valeurs réelles (i.e. si $\bar{a}_k = a_{-k}$ pour tout entier k) alors $A(\theta) \in SL(2, \mathbb{R})$ et réciproquement. Par le scolie de 4.1, on a pour le difféomorphisme fibré (R_α, A) de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{C}^2$ $\lambda_+(R_\alpha, A) \geq \operatorname{Log} |a_{-n}|$.

(Si $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ on peut donner de ce fait la démonstration encore plus élémentaire, suivante: on vérifie san peine que, si $p \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \|A^p_{R_\alpha}(\theta)\| \, d\theta \geq \left\| \begin{pmatrix} a^p_{-n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| \quad \text{d'où} \quad \lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \operatorname{Log} \|A^p_{R_\alpha}\|_{C^0(\mathbb{T}^1)} \geq \operatorname{Log} |a_{-n}|$$

et donc, par [5, 2.5] $\lambda_+(\mathbb{T}^1, R_\alpha, A) \geq \operatorname{Log} |a_{-n}|$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on peut raisonner comme dans [5, 3.2].)

4.8. Soit une fonction continue $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ et $E \in \mathbb{R}$ alors on pose

$$A_E : \theta \in \mathbb{T}^1 \to A_E(\theta) = \begin{pmatrix} E + \varphi(\theta) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

On considère l'homéomorphisme fibré (R_α, A_E) de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2$. On fixe $\alpha \in \mathbb{T}^1$.

PROPOSITION. *Il existe $E_0>0$ tel que, si $|E|>E_0$, (R_α, A_E) ait une structure hyperbolique.*

Démonstration. On suppose que $E>0$, le cas $E<0$ étant analogue. On cherche les variétés invariantes de (R_α, A_E) en coordonnées projectives $\begin{pmatrix}\Psi(\theta)\\ 1\end{pmatrix}$, $\Psi\in C^0(\mathbb{T}^1,\mathbb{R})$, $\Psi>0$ (si $E<0$ on suppose que $\Psi<0$). On a l'equation

$$\Psi\circ R_\alpha+\frac{1}{\Psi}=E+\varphi. \tag{2}$$

On pose $\lambda_E+1/\lambda_E=E$ pour E grand>2. On cherche $\Psi_1=\lambda_E(1+\eta_1)$ avec $\|\eta_1\|_{C^0}\leq\frac{1}{2}$ (et dépendant de E). L'équation que vérifie η_1 est:

$$\eta_1\circ R_\alpha-\frac{\eta_1}{\lambda_E^2(1+\eta_1)}=\frac{1}{\lambda_E}\varphi.$$

Si $E\to+\infty$, $\lambda_E\to+\infty$, il suit pour E assez grand que l'application

$$\Phi_E:\eta:\to\frac{1}{\lambda_E}\varphi\circ R_{-\alpha}+\frac{\eta\circ R_{-\alpha}}{\lambda_E^2(1+\eta\circ R_{-\alpha})}$$

envoie la boule $\{\|\eta\|_{C^0}\leq\frac{1}{2}\}$ dans elle même et est une contraction lipschitzienne: on a $\|\Phi_E(a_1)-\Phi_E(a_2)\|_{C^0}\leq k\,\|a_1-a_2\|$ avec $k<1$. Il existe donc un point fixe η_1 de Φ_E. On détermine ainsi Ψ_1 vérifiant (2) où $\Psi_1=\lambda_E(1+\eta_1)$ avec $\|\eta_1\|_{C^0}<\frac{1}{2}$.

Par la même méthode on détermine une autre solution Ψ_2 de l'équation (2)

$$\Psi_2=\frac{1}{\lambda_E}(1+\eta_2)\quad\text{avec}\quad\|\eta_2\|_{C^0}\leq\frac{1}{2}.$$

Si on pose $v_i(\theta)=\begin{pmatrix}\Psi_i(\theta)\\ 1\end{pmatrix}$ pour $i=1, 2$, on a

$$A_E(\theta)v_i(\theta)=\Psi_i(\theta)v_i(\theta+\alpha).$$

Soient $H(\theta, y)=(\theta, l(\theta)y)$, où $l(\theta)=(v_1(\theta), v_2(\theta))$ (matrice ayant pour vecteurs colonnes v_1 et v_2; si $|E|$ est assez grand on a $\det(l(\theta))\neq 0$ pour tout θ), et $F_E(\theta, y)=(\theta+\alpha, A_E(\theta)y)$. On a pour $|E|$ assez grand

$$H^{-1}\circ F_E\circ H(\theta, y)=(\theta+\alpha, K_E(\theta)y),$$

où

$$K_E(\theta)=\begin{pmatrix}\Psi_1(\theta) & 0\\ 0 & \Psi_2(\theta)\end{pmatrix} \tag{3}$$

avec, si $E>E_0$, $\Psi_i>0$ et si $E<-E_0$, $\Psi_i<0$ pour $i=1, 2$. ■

4.9. PROPOSITION. *Si* $E>0$ *et si* $\Psi>0$ *vérifie* (2) *alors on pose*

$$M=\operatorname{Max}\left(\|\Psi\|_{C^0}, \left\|\frac{1}{\Psi}\right\|_{C^0}\right) \quad \textit{et on a} \quad \frac{1}{M}+M\leq E+\|\varphi\|_{C^0}.$$

Démonstration. On suppose que $M=\|\Psi\|_{C^0}$, l'autre cas étant analogue. Soit θ_0 tel que $M=\Psi\circ R_\alpha(\theta_0)$. On a l'inégalité

$$E+\varphi(\theta_0)=\Psi\circ R_\alpha(\theta_0)+\frac{1}{\Psi(\theta_0)}\geq M+\frac{1}{M},$$

et donc

$$M+\frac{1}{M}\leq E+\operatorname*{Max}_{\theta}\varphi(\theta). \quad ■$$

4.10. *Remarque.* 4.8 et 4.9 restent valables si l'on considère

$$A_E(x)=\begin{pmatrix}E+\varphi(x) & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

avec $\varphi\in C^0(X,\mathbb{R})$, où X est un espace compact métrique, et si l'on remplace $R_\alpha:\mathbb{T}^1\to\mathbb{T}^1$ par un homéomorphisme $g:X\to X$.

4.11. On considère (R_α, A_E) comme en 4.8 et on suppose de plus $\alpha\notin\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On relève $E\to A_E\in C^0(\mathbb{T}^1, SL(2,\mathbb{R}))$ en $E\to\tilde{A}_E\in C^0(\mathbb{T}^1, D^\omega(\mathbb{T}^1))$. On suppose que $SL(2,\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ par l'action standard, (voir 1.6). Soit $\rho_f(R_\alpha, \tilde{A}_E)\in\mathbb{R}$ le nombre de rotation fibré (voir §5); on a, si φ et $\alpha\in\mathbb{T}^1-(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ sont fixés:

a) $E\to\rho_f(R_\alpha, \tilde{A}_E)$ est une fonction continue et non-décroissante (elle est non décroissante puisque $E_1<E_2\Rightarrow\tilde{A}_{E_1}(x)<\tilde{A}_{E_2}(x)$ pour tout $x\in\mathbb{T}^1$).

b) La fonction $\rho_f(R_\alpha, \tilde{A}_E)$ est constante si $|E|>E_0$ (où E_0 est défini en 4.8), et

on a

$$\rho_f(R_\alpha, \tilde{A}_E) = p \in \mathbb{Z} \quad \text{so} \quad E \geq E_0$$

$$\rho_f(R_\alpha, \tilde{A}_E) = p - 1 \quad \text{si} \quad E \leq -E_0.$$

(Ceci résulte de 4.8, en utilisant 5.9.3) et en remarquant que le chemin $E \to A_E$ est homotope, les extrémitées restant la même composante connexe par arc de l'esemble $\{B \in C^0(\mathbb{T}^1, SL(2, \mathbb{R})) \mid (R_\alpha, B)$ agissant sur $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2$ a une structure hyperbolique$\}$ au voisinage de $E = +\infty$ et $E = -\infty$, au chemin $E \to \begin{pmatrix} E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.12. Soit

$$A_E(\theta) = \begin{pmatrix} E + p(\theta) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où $E \in \mathbb{R}$, $p(\theta) = \sum_{|k| \leq n} a_k e^{2\pi i k\theta}$ est un polynôme trigonométrique réel, de degré $n \geq 1$ et vérifiant $\operatorname{Log} |a_{-n}| > 0$ $(n \geq 1)$; par 4.7, pour tout E, on a

$$\lambda_+(R_\alpha, A_E) \geq \operatorname{Log} |a_{-n}|.$$

L'application $\theta \in \mathbb{T}^1 \to \begin{pmatrix} E + p(\theta) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est évidemment $\mathbb{R}$-analytique et homotope à la matrice constante $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donc à e.

En utilisant 4.11 on démontre une proposition analogue à 4.6. Ces exemples montrent que les corollaires du théorème d'Arnold et de Moser 5.12 et 5.14 ne sont pas globaux et ceci nonobstant des conditions d'analycité ou d'approximations par les rationnels du vecteur de rotation contrairement au théorème fondamental de [4] pour les difféomorphismes du cercle. Ces exemples sont à rapprocher du caractère local du théorème de Siegel (cf. 3.3). Le lecteur se rapportera aussi à 5.19.

Ces exemples ne sont pas analogues aux contre-exemples de Denjoy sur le cercle (cf. [4, X]):

4.13. PROPOSITION. *Soit* (R_α, C_β) *vérifiant les conditions* a) *et* b) *de* 4.6 *et tel que* $\rho(R_\alpha, C_\beta) = (\alpha, \beta)$ *ou* α *et* β *sont irrationnels et rationnellement indépendants. On fait agir* $F = (R_\alpha, C_\beta)$ *sur* $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. *Alors il n'existe pas d'application continue* $H : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{T}^2$ *homotope à l'Id telle que le diagramme*

suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} F:\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \\ {\scriptstyle H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H} \\ R_{(\alpha,\beta)}:\ \mathbb{T}^2 & \longrightarrow & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

Remarque. Ceci implique que le difféomorphisme F de $\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ n'est pas topologiquement conjugué à une translation de $\mathbb{T}^2$.

Démonstration. Supposons, que H existe. Par le théorème d'Osedelec (voir par exemple [15]), puisque $\lambda_+(R_\alpha, C_\beta)>0$, il existe une application $d\theta$-mesurable $s_+:\mathbb{T}^1\to\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ telle que le diagramme suivant soit commutatif $d\theta$-presque partout (p_1 désigne la 1 ère projection)

$$\begin{array}{ccc} F:\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow\uparrow{\scriptstyle Id\times s_+} & & {\scriptstyle p_1}\downarrow\uparrow{\scriptstyle Id\times s_+} \\ R_\alpha:\quad \mathbb{T}^1 & \longrightarrow & \mathbb{T}^1 \end{array}$$

(Le graphe de s_+ est la direction invariante ($d\theta$ presque partout) associée à l'exposant de Lyapounov maximal $\lambda_+(R_\alpha, C_\beta)$; il existe une section $Id\times s_-$ associée à $-\lambda_+(R_\alpha, C_\beta)$, et on a $d\theta$-presque partout $s_+\neq s_-$ (voir [5.6] et [8]).)

Si on relève $H:\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)\to\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^1$ en $\tilde{H}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ de la forme $\tilde{H}(\theta_1,\theta_2)=(\theta_1+\eta_1(\theta_1,\theta_2),\ \theta_2+\eta_2(\theta_1,\theta_2))$ avec $\eta_i\in C^0(\mathbb{T}^2,\mathbb{R})$, on doit avoir

$$\eta_1\circ\tilde{F}=\eta_1.$$

Ceci implique que $\eta_1=$constante. En effet par [8] ou 4.17, F laisse invariant un unique ensemble minimal $M\neq\emptyset$. Ceci force η_1 à être égale à une constante. (On a $\eta_{1|M}=$constante qu'on peut supposer égale à 0. Soient $\varepsilon>0$ et $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de M tel que tout $x\in\mathcal{V}$ vérifie $|\eta_1(x)|<\varepsilon$; puisque M est l'unique ensemble minimal de F, on a $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F^i(\mathcal{V})=\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. Donc $\|\eta_1\|_{C^0}<\varepsilon$ mais comme $\varepsilon>0$ est arbitraire le résultat suit.)

Il en résulte que H est fibré: il existe $c\in\mathbb{T}^1$ tel qu'on ait le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H:\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ R_c:\quad \mathbb{T}^1 & \longrightarrow & \mathbb{T}^1 \end{array}$$

Si H existe, il existe donc une application $\tilde{s}$, $d\theta$-mesurable, telle que le diagramme suivant soit commutatif, $d\theta$-presque partout:

$$\begin{array}{ccc} R_{(\alpha,\beta)}:\mathbb{T}^2 & \longrightarrow & \mathbb{T}^2 \\ p_1 \downarrow\uparrow Id\times\tilde{s} & & Id\times\tilde{s}\uparrow\downarrow p_1 \\ R_\alpha:\mathbb{T}^1 & \longrightarrow & \mathbb{T}^1 \end{array}$$

d'où

$$e^{2\pi i\tilde{s}(\theta+\alpha)} \underset{d\theta-\text{p.p.}}{=} e^{2\pi i\beta}e^{2\pi i\tilde{s}(\theta)};$$

mais ceci implique que $\beta\in\mathbb{Z}\alpha(\text{mod } 1)$; or, nour avons supposé que α et β sont irrationnels et rationnellement indépendants, et nous aboutissons ainsi à une absurdité. ■

4.14. On se donne (R_α, A_E) satisfaisant aux conditions de 4.7 et on suppose de plus que $\alpha\in\mathbb{T}^1-(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Soit E_1 le plus grand nombre réel tel que:

a) $\rho_f(R_\alpha, \tilde{A}_{E_1})\in\mathbb{Z}$ où $\tilde{A}_{E_1}$ est un relèvement de A_{E_1} à $D^0(\mathbb{T}^1)$;

b) le difféomorphisme fibré $\bar{F}_{E_1}=(R_\alpha, A_{E_1})$ de $\mathbb{T}^1\times\mathbb{R}^2$ n'ait pas de structure hyperbolique. On peut aussi définir E_1 ainsi: si $E\in]E_1, +\infty[$, $\bar{F}_E$ a une structure hyperbolique et $\bar{F}_{E_1}$ vérifie b).

Un tel nombre E_1 existe par 4.8, 4.11 et par le fait que l'ensemble des nombres $E\in\mathbb{R}$ vérifiant b) est fermé (cf. 1.4 remarque 2). On note F_E le difféomorphisme induit par $\bar{F}_E$ sur $\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$.

PROPOSITION. *Le difféomorphisme F_{E_1} possède un unique ensemble minimal $M\neq\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ $(M\neq\emptyset)$; M est l'adhérence du graphe d'une fonction semi-continue $s:\mathbb{T}^1\to\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ telle que le diagramme suivant soit commutatif*:

$$\begin{array}{ccc} F_{E_1}:\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \\ p_1 \downarrow\uparrow Id\times s & & Id\times s\uparrow\downarrow p_1 \\ R_\alpha: \quad \mathbb{T}^1 & \longrightarrow & \mathbb{T}^1 \end{array}$$

Démonstration. Soit E_2 très grand $(E_2>2\|p\|_{C^0})$, pour que le difféomorphisme fibré $\bar{F}_{E_2}=(R_\alpha, A_{E_2})$ ait une structure hyperbolique telle que les directions invariantes $\begin{pmatrix}(\Psi_{E_2})_1\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\Psi_{E_2})_2\\ 1\end{pmatrix}$ vérifient $(\Psi_{E_2})_i>0$ (voir 4.8). On a donc l'inégalité

4.9, $M_{E_2}+1/M_{E_2}\leq E_2+\|p\|_{C^0}$, où

$$M_{E_2}=\operatorname*{Max}_{i=1,2}\left(\operatorname{Max}\left(\|(\Psi_{E_2})_i\|_{C^0},\left\|\frac{1}{(\Psi_{E_2})_i}\right\|_{C^0}\right)\right).$$

Soit E_3 le plus grand nombre réel $\leq E_2$ tel que (R_α, A_{E_3}) possède une structure hyperbolique dont les directions invariantes ne soient pas de la forme $\begin{pmatrix}(\Psi_{E_3})_i\\ 1\end{pmatrix}$ avec $0<(\Psi_{E_3})_i<+\infty$.

Je dis que le nombre E_3 (*s'il existe*) *vérifie* $E_3<E_1$. En effet, pour $E>E_3$, les directions invariantes existene et sont de la forme $\begin{pmatrix}(\Psi_E)_i\\ 1\end{pmatrix}$, $0<(\Psi_E)_i<+\infty$, $i=1,2$, et vérifient $M_E+1/M_E\leq E_2+\|p\|_{C^0}$. Ceci implique que $M_E\leq C_2$, $1/M_E\geq C_2^{-1}$, où $C_2\geq 1$ est une constante et en particulier $C_2^{-1}\leq(\Psi_E)_i\leq C_2$. On arrive a une contradiction puisque les directions invariantes varient continument avec E que le difféomorphisme fibré (R_α, A_E) a une structure hyperbolique (voir [18]). On a bien montré $E_3<E_1$.

Si $E_1<E\leq E_2$, on conclut que les directions invariantes de $\bar{F}_E$ restent dans le cône projectif positif $C=\{(a,1)\in\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)\mid 1/C_2\leq a\leq C_2\}$ (on utilise sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ les coordonnées projectives).

Par 4.8 et 4.17 (voir aussi [8]) puisque $\bar{F}_{E_1}$ vérifie $\lambda_+(\bar{F}_{E_1})>0$ et, par le choix de E_1, n'a pas de structure hyperbolique, F_{E_1} laisse invariant un unique ensemble minimal M et toute mesure de probabilité ν de $\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ invariante par F_{E_1} vérifie support $(\nu)=M$.

On a $M\subset\mathbb{T}^1\times C$.

En effet, soit μ_E une mesure de probabilité de $\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ invariante par F_E $(E_1<E\leq E_2)$ et ergodique. Puisque $\alpha\in\mathbb{T}^1-(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, support$(\mu_E)$ est une direction invariante de F_E dans $\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ et donc support$(\mu_E)\subset\mathbb{T}^1\times C$. Soit $(e_i)_{i\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $E_1<e_i\leq E_2$, $e_i\to E_1$ si $i\to+\infty$ et que la suite $(\mu_{e_i})_i$ tende vaguement vers la mesure de probabilité μ. Si $i\to+\infty$, $F_{e_i}\to F_{E_1}$ uniformément, et la mesure μ est donc invariante par F_{E_1} (voir 5.6). Soit φ une fonction ≥ 0 de classe C^∞, nulle sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $\mathbb{T}^1\times C$ dans $\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. Comme $\mu_{e_i}(\varphi)=0$, si $e_i\to E_1$, on a $\mu(\varphi)=0$ et done support$(\mu)\subset\mathcal{V}$; comme $\mathcal{V}$ est arbitraire, il en résulte que support$(\mu)\subset\mathbb{T}^1\times C$. Or, support$(\mu)=M$ et on a bien démontré que $M\subset\mathbb{T}^1\times C$.

On définit, si $\theta\in\mathbb{T}^1$, $l_-(\theta)=\operatorname{Inf}\{a>0\mid(\theta,(a,1))\in M\}$ et $l_+(\theta)=\sup\{a>0\mid(\theta,(a,1))\in M\}$. On pose $s:\theta\to(l_-(\theta),1)$.

Comme M est fermé, la fonction l_- est semi-continue inférieurement, et l_+ est semi-continue supérieurement. Puisque F_E préserve l'ordre sur chaque fibre séparément de la fibration $\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)\to\mathbb{T}^1$, et que $\bar{F}_E(\theta,(0,1))=(\theta+\alpha,(-1,0))$ l'ensemble $gr(s)=\{(\theta,s(\theta))\mid\theta\in\mathbb{T}^1\}$ est invariant par F_{E_1} et on a $gr(s)\subset M$.

L'unique ensemble minimal M de F_E est donc l'adhérence de $gr(s)$. L'ensemble M est aussi l'adhérence de $\{\theta, (l_+(\theta), 1) \mid \theta \in \mathbb{T}^1\}$. ■

Remarque. On a $M \subset M_1 = \{(\theta, (b, 1)) \mid l_-(\theta) \leq b \leq l_+(\theta)\}$. L'ensemble M_1 est fermé, sans point intérieur dans $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ et est invariant par F_{E_1}.

La mesure de Lebesgue de M_1 est positive. En effet, par le théorème d'Osedelec il existe, puisque $\lambda_+(F_{E_1}) > 0$, 2 directions invariantes $d\theta$-mesurables distinctes ($d\theta$-presque partout) graphes de s_+ et s_-, supports des deux mesures de probabilités de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ μ_+ et μ_- invariantes par F_{E_1} et ergodiques [5]. On a $\text{support}(\mu_+) = \text{support}(\mu_-) = M$, voir 4.17. Pour $d\theta$-presque tout $\theta \in \mathbb{T}^1$ $s_+(\theta)$ et $s_-(\theta)$ limitent sur $\{\theta\} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, 2 intervalles invariants par F_{E_1} donc l'un est contenu dans M_1.

La mesure de Lebesgue de M_1 est bien positive par le théorème de Fubini, car si M_1 était de mesure de Lebesgue nulle pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}^1$, l'ensemble $M_1 \cap (\{\theta\} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2))$ serait de mesure de Lebesgue nulle et donc ne contiendrait pas un intervalle presque partout.

Question. Est ce que $M = M_1$?

4.15. *Remarques.* 1. On vérifie sans peine que:

- les fonctions $l_\pm$ satisfont $1/C_2 \leq l_\pm \leq C_2$ (ce qui implique que $l_\pm^{\pm 1} \in L^\infty(d\theta)$);
- $l_+(\theta) \neq l_-(\theta)$ $d\theta$-presque partout;
- les fonctions $l_\pm$ sont solutions de l'équation

$$l_\pm(\theta + \alpha) + \frac{1}{l_\pm(\theta)} = \varphi(\theta) + E_1, \quad \text{pour tout} \quad \theta \in \mathbb{T}^1. \tag{2}$$

Si $E > E_1$ l'équation (2) à 2 solutions continues mais pour $E = E_1$ les solutions $l_\pm$ ne sont pas continues.

2. Chacun de 2 ensembles $\{(\theta, (l_\pm(\theta), 1)) \mid \theta \in \mathbb{T}^1\}$ est $d\theta$-presque partout égal à une des directions invariantes données par le théorème d'Osedelec (resp. aux graphes de s_+ et s_-) et on a

$$\int_0^1 \operatorname{Log} l_+(\theta)\, d\theta = -\int_0^1 \operatorname{Log} l_-(\theta)\, d\theta = \lambda_+(R_\alpha, A_{E_1}) > 0.$$

(Cela résulte de ce que pour F_{E_1} les seules directions invariantes $d\theta$-mesurables sont presque partout égales aux graphes de s_+ ou s_-; voir aussi [10. §3.6].)

4.16. On se place dans les mêmes conditions que 4.10 et on suppose de plus

que l'espace X est connexe et que l'homéomorphisme g de X est minimal et uniquement ergodique. On définit pour $\bar{F}_E = (g, A_E)$ de façon analogue à 4.14 un unique nombre E_1.

PROPOSITION. *L'homéomorphisme F_{E_1} induit par (g, A_{E_1}) sur $X \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ laisse invariant un ensemble minimal $M \neq \emptyset$ possédant les propriétés suivantes:*

· *$M \subset X \times C$, où C est le cône $\{(a, 1) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \mid 1/C_2 \leq a \leq C_2\}$ avec un $C_2 > 1$;*

· *M est l'adhérence du graphe d'une application $\theta \in X \to s(\theta) = (l_-(\theta), 1) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, où $1/C_2 \leq l_- \leq C_2$, et la fonction l_- est semi-continue inférieurement;*

· *la fonction l_- vérifie*

$$l_-(g(\theta)) + \frac{1}{l_-(\theta)} = \varphi(\theta) + E_1 \quad \textit{pour tout} \quad \theta \in X; \tag{2}$$

· *si $E > E_1$ l'équation*

$$\Psi \circ g + \frac{1}{\Psi} = \varphi + E \tag{2}$$

possède 2 solutions continues strictement positives.

Remarque. La fonction l_- peut être continue ainsi que le montre l'exemple $A_{E_1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. En utilisant 4.10, la démonstration est presque identique à celle de 4.14. Comme on ne suppose pas $\lambda_+(g, A_{E_1}) > 0$, on n'est pas sûr que l'homéomorphisme F_{E_1} laisse invariant un unique ensemble minimal; néanmoins, par la même démonstration que 4.14, on obtient une mesure de probabilité μ invariante par F_{E_1} et vérifiant support$(\mu) \subset X \times C$. L'ensemble fermé support(μ) est invariant par F_{E_1}, et il suffit de considérer un ensemble minimal $M \neq \emptyset$, $M \subset$ support(μ) le reste du raisonnement étant analogue. ■

4.17. *Annexe*

Dans cet annexe nous allons démontrer des résultats essentiellement dûs à R. Johnson [8]:

PROPOSITION. *Soit g un homéomorphisme minimal et uniquement ergodique de l'espace compact métrique X. On suppose que $A \in C^0(X, SL(2, \mathbb{R}))$ vérifie*

· $\lambda_+(g, A) > 0$;

· *L'homéomorphisme fibré* (g, A) *agissant sur* $X \times \mathbb{R}^2$ *n'a pas de structure hyperbolique. Il en résulte que l'homéomorphisme F induit par* (g, A) *sur* $X \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ *laisse invariant un unique ensemble minimal* $M \neq \emptyset$ *et que toute mesure de probabilité* μ *de* $X \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ *invariante par F vérifie support*$(\mu) = M$.

Remarque. L'homéomorphisme F peut être minimal; pour la construction d'un exemple voir [5].

Démonstration. Puisque $\lambda_+(g, A) > 0$, par [5], l'homéomorphisme F laisse invariant seulement 2 mesures de probabilités ergodiques μ_+ et μ_-. On pose support$(\mu_\pm) = K_\pm$. Soit $M = \emptyset$ un unsemble minimal invariant par F. Par le théorème de Markov–Kakutani, il en résulte qu'il existe une mesure de probabilité ν invariante par F, ergodique et vérifiant support$(\nu) \subset M$ (et donc support $(\nu) = M$ puisque M est un ensemble minimal de F). On a $M = K_+$ ou k_- puisque $\nu = \mu_+$ ou μ_-. On suppose que $M = K_+$, l'autre cas étant analogue, on veut montrer que $K_+ = K_-$.

On raisonne par l'absurde. Si $K_+ \neq K_-$ on a $\mu_-(K_+) = 0$ (puisque F est μ_--ergodique et que les ensembles compacts K_+ et K_- sont invariants par F). Il en résulte que l'homéomorphisme $F \mid K_+$ est uniquement ergodique l'unique mesure de probabilité invariante étant μ_+.

Par [5] ou [8], si $(x, v) \in K_+ \subset X \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, alors, si $n \to \pm\infty$, $(1/n) \operatorname{Log} \|A_g^n(x)v\| \to \lambda_+(g, A)$ en posant, pour $n < 0$, $A_g^n = (\tilde{A}^{-1})_{g^{-1}}^n$ et $\tilde{A}^{-1}(x) = A^{-1}(g^{-1}(x))$. Puisque l'homéomorphisme g de X est minimal, pour tout $x \in X$, il existe $v \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ tel que $(x, v) \in K_+$, et on a donc

① si $n \to -\infty$, $\quad \|A_g^n(x)v\| \to 0$.

Maintenant on utilise le résultat suivant[1] (du à R. Mañé, J. Selgrade, R. J. Sacker et G. R. Sell): puisque (g, A) n'a pas de structure hyperbolique et que l'homéomorphisme g est minimal il existe $(y, u) \in X \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ tel que

② $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A_g^n(u)u\| < +\infty$

et donc $(y, u) \notin K_+$.

LEMME. *Quels que soient* $B \in SL(2, \mathbb{R})$, *et* $u, v \in \mathbb{R}^2$ *vérifiant* $\|u\| = \|v\| = 1$ *et* $\|u \wedge v\| \neq 0$, *si* $\|Bv\| < 1/C$, *avec* $C > 0$, *alors on a* $\|Bu\| \geq C \|u \wedge v\|$.

Démonstration du lemme. Il suffit d'écrire $\|Bu\| \, \|Bv\| \geq \|Bu \wedge Bv\| = \|u \wedge v\|$. ■

---

[1] Voir par exemple, R. Mañé, [M].

Fin de la démonstration de la proposition. Par ①, ② et le lemme, on arrive à une absurdité si $K_+ \neq K_-$. La proposition résulte facilement de ce fait. ■

5. Nombre de rotation fibré et quelques propriétés; application à des corollaires du théorème d'Arnold et de Moser

5.1. Soient X un espace compact métrique ($\neq \emptyset$) et g un homéomorphisme de X. Soit $x \in X \to h(x) \in \text{Homéo}_+(\mathbb{T}^1)$ une application continue, où $\text{Homéo}_+(\mathbb{T}^1)$ désigne le groupe topologique des homéomorphismes de $\mathbb{T}^1$ préservant l'orientation avec la topologie compacte ouverte.

On définit l'homéomorphisme F de $X \times \mathbb{T}^1$ par $F(x, \theta) = (g(x), h(x)(\theta))$. F est un homéomorphisme fibré, le diagramme suivant étant commutatif:

$$\begin{array}{ccc} F: X \times \mathbb{T}^1 & \longrightarrow & X \times \mathbb{T}^1 \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ g: \quad X & \longrightarrow & X \end{array}$$

$(p_1(x, \theta) = x)$.

On veut définir le nombre de rotation fibré; pour cela on suppose que l'application $x \in X \to h(x) \in \text{Homéo}_+ (\mathbb{T}^1)$ est homotope à l'application constante égale à l'idendité de $\mathbb{T}^1$. On peut donc relever l'application $x \to h(x)$ à $x \in X \to \tilde{h}(x) \in D^0(\mathbb{T}^1)$ avec $D^0(\mathbb{T}^1) = \{h \in \text{Homéo}_+ (\mathbb{R}) \mid h(x+1) = h(x) + 1, \text{ si } x \in \mathbb{R}\}$. On définit l'homéomorphisme $\tilde{F}$ de $X \times \mathbb{R}$ par $\tilde{F}(x, \theta) = (g(x), \tilde{h}(x)(\theta))$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $Id \times R_\lambda$ est l'application de $X \times \mathbb{R}$ définie par $(Id \times R_\lambda)(x, \theta) = (x, \theta + \lambda)$.

Si $\tilde{F}_1$ et $\tilde{F}_2$ sont 2 relèvements de F à $X \times \mathbb{R}$ alors $\tilde{F}_1 \circ \tilde{F}_2^{-1}(x, \theta) = (x, \theta + \chi(x))$ où $\chi : X \to \mathbb{Z}$, est une application continue. Il en résulte que si l'espace X est connexe alors $\tilde{F}_1 = (Id \times R_p) \circ \tilde{F}_2$, avec $p \in \mathbb{Z}$.

5.2. On définit le nombre de rotation dans la direction de la fibre comme une fonction de $(x, \theta) \in X \times \mathbb{R}$ par

$$\bar{\rho}_f(\tilde{F})(x, \theta) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} (p_2 \circ \tilde{F}^n(x, \theta) - \theta) \in \mathbb{R}$$

avec $p_2(x, \theta) = \theta$. (On note ρ_f pour ρ_{fibre}). La fonction $\bar{\rho}_f(\tilde{F})$ a les propriétés:

a) Elle est $\mathbb{Z}$-périodique en θ.

b) Si $p \in \mathbb{Z}$, $\bar{\rho}_f((Id \times R_p) \circ \tilde{F}) = p + \bar{\rho}_f(\tilde{F})$.

Il suit que si l'espace X est connexe alors la foction $(x, \theta) \to \bar{\rho}_f(F)(x, \theta)$ (mod 1) ne dépend pas du relèvement $\tilde{F}$ de F.

c) Si pour tout x, $\tilde{h}_1(x) \leq \tilde{h}_2(x)$ (i.e. pour tout θ $\tilde{h}_1(x)(\theta) \leq \tilde{h}_2(x)(\theta)$), où $\tilde{h}_i \in C^0(X, D^0(\mathbb{T}^1))$ pour $i = 1, 2$) alors, pour tout (x, θ), on a

$$\bar{\rho}_f(g, \tilde{h}_1)(x, \theta) \leq \bar{\rho}_f(g, \tilde{h}_2)(x, \theta).$$

d) $\bar{\rho}_f(\tilde{F})(x, \theta) = \bar{\rho}_f(\tilde{F})(\tilde{F}(x, \theta))$.

Remarques. 1) On peut remplacer $\mathbb{T}^1$ par $\mathbb{T}^n$ en supposant que l'application $x \in X \to h(x) \in \text{Homéo}(\mathbb{T}^n)$ est homotope à l'application constante égale à l'Identité de $\mathbb{T}^n$ et en posant si $x \to \tilde{h}(x) \in D^0(\mathbb{T}^n)$ est un relèvement de h et $\tilde{F}: (x, \theta) \in X \times \mathbb{R}^n \to (g(x), \tilde{h}(x)(\theta)) \in X \times \mathbb{R}^n$,

$$\bar{\rho}_f(\tilde{F})(x, \theta) = \limsup_{k \to +\infty} \frac{1}{k} (p_2 \circ \tilde{F}^k(x, \theta) - \theta) \in \mathbb{R}^n$$

avec $p_2(x, \theta) = \theta$ et la lim sup étant la limite supérieure de chaque composante.

Le lecteur peut se rapporter à [4, XIII 1 et 2].

2) Il est nécessaire de supposer que $x \to h(x)$ est homotope à l'application constante identité de $\mathbb{T}^n$ ainsi que le montrent les exemples suivants:

a) $X = \{1 \text{ point}\}$, $x \to h(x) = A \in \text{Homéo}(\mathbb{T}^2)$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $X = \mathbb{T}^1$, $x \in \mathbb{T}^1 \to h(x) \in \text{Homéo}_+(\mathbb{T}^1)$ avec $g(x) = x + \alpha$, $\alpha \neq 0$ et $h(x)(\theta) = \theta + x$.

Ces exemples montrent que le facteur $1/k$ est ridicule.

5.3. Soit $\tilde{F}: X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}$ comme en 5.1

PROPOSITION. *Soit $x \in X$ fixé.*

a) *Quels que soient θ_1 et θ_2, on a $\bar{\rho}_f(\tilde{F})(x, \theta_1) = \bar{\rho}_f(\tilde{F})(x, \theta_2)$.*

b) *Si pour un $\theta_1 \in \mathbb{R}$, la limite $\lim_{n \to \infty} (1/n)(p_2 \circ \tilde{F}^n(x, \theta_1) - \theta_1)$ $(= \bar{\rho}_f(\tilde{F})(x, \theta_1))$ existe, alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la limite $\lim_{n \to +\infty} (1/n)(p_2 \circ \tilde{F}(x, \theta) - \theta)$ existe et elle est $= \bar{\rho}_f(\tilde{F})(x, \theta) = \bar{\rho}_f(\tilde{F})(x, \theta_1)$.*

Démonstration. Soit $p_2 \circ \tilde{F}^n(x, \theta) = h_g^n(x)(\theta)$, où $h_g^n(x) = h(g^{n-1}(x)) \circ \cdots \circ h \in D^0(\mathbb{T}^1)$; si $l \in D^0(\mathbb{T}^1)$ on a $l(\theta) = \theta + \varphi(\theta)$ $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ avec

$$\text{Max } \varphi - \text{Min } \varphi < 1 \quad [4, \text{II}.2.2],$$

d'où

$$\frac{1}{n} |h_g^n(x)(\theta_1) - h_g^n(x)(\theta_2) - (\theta_1 - \theta_2)| < \frac{1}{n}. \quad \blacksquare$$

Remarque. Cette proposition n'est pas correcte si on remplace $\mathbb{T}^1$ par $\mathbb{T}^n$ (voir [4, chap XIII 1.3]).

5.4. Le théorème suivant ne serait pas correct si l'homéomorphisme g n'est pas uniquement ergodique mais seulement minimal (voir à ce propos [4, XIII 1.3]).

THÉORÈME. *On suppose que l'homéomorphisme* g *de* X *est uniquement ergodique, d'une unique mesure de probabilité invariante* μ *sur* X. *Soit* $\tilde{F} = (g, \tilde{h})$ *un homéomorphisme de* $X \times \mathbb{R}$ *comme en* 5.1. *Alors, si* $n \to +\infty$, *la suite de fonction* $((1/n)(p_2 \circ \tilde{F}^n(x, \theta) - \theta))_{n \geq 1}$ *converge uniformément vers une fonction constante*; *cette constante est notée* $\rho_f(\tilde{F})$.

Rappels d'exemples d'homéomorphismes uniquement ergodiques:

Si $X = \mathbb{T}^{n-1}$ et si $g = R_\alpha$ est une translation minimale de $\mathbb{T}^{n-1}$, alors g est un homéomorphisme uniquement ergodique de $\mathbb{T}^{n-1}$, l'unique mesure de probabilité invariante étant la mesure de Haar de $\mathbb{T}^{n-1}$. Plus généralement pour un groupe abélien compact, une translation est minimale si et seulement si elle est uniquement ergodique.

Pour démontrer le théorème nous avons besoin du lemme suivant:

LEMME. *Soit* Y *un espace compact,* G *un homéomorphisme de* Y. *Soit* ψ *une fonction continue de* Y, $\psi \in C^0(Y, \mathbb{R})$ *telle qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que, pour toute mesure de probabilité* v *de* Y *invariante par* G, *on ait* $\int_Y \psi \, dv = \lambda$. *Alors, si* $n \to +\infty$, *la suite*

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ G^i\right)_{n \geq 1}$$

converge uniformément vers λ.

Démonstration du lemme. Il suffit de voir que ψ appartient à la fermeture pour la topologie de la convergence uniforme de l'ensemble des fonctions $\{\lambda + \eta - \eta \circ G \mid \lambda \in \mathbb{R},\ \eta \in C^0(Y)\}$, Or cela résulte du théorème de Hahn–Banach, en utilisant le fait qu'une mesure de Radon sur Y est invariante par G si et seulement si elle est nulle sur l'espace $\{\eta - \eta \circ G \mid \eta \in C^0(Y)\}$ et que toute mesure de Radon v invariante par G s'écrit de facon unique $v = v_+ - v_-$, où v_+ et v_- sont des mesures positives étrangères invariantes par G (l'invariance venant de l'unicité de la décomposition de Jordan). ■

Démonstration du théorème de 5.4. On écrit $\tilde{F}(x, \theta) = (g(x), \theta + \varphi(x, \theta))$ avec

$\varphi(x, \theta) \in C^0(X \times \mathbb{T}^1)$. On a

$$\tilde{F}(x, \theta) = \left(g^n(x), \theta + \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ F^i(x, \theta)\right)$$

et donc

$$\frac{1}{n}(p_2 \circ \tilde{F}^n(x, \theta) - \theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ F^i(x, \theta).$$

Soient v_i, $i = 1, 2, 2$ mesures de probabilitiés invariantes par F sur $X \times \mathbb{T}^1$. Chaque mesure v_i se projecte par p_1 sur l'unique mesure μ invariante par g.

Il résulte du théorème ergodique de Birkhoff et de 5.3 qu'il existe un ensemble $B \subset \mathbb{T}^1$ de μ-mesure 1 tel que, quels que soient $x \in B$ et $\theta \in \mathbb{T}^1$, on ait

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ F^i(x, \theta) \to c \in \mathbb{R}$$

où c est indépendant de $(x, \theta) \in B \times \mathbb{T}^1$. Comme l'ensemble $B \times \mathbb{T}^1$ est de v_1 et v_2 mesure 1 on a

$$\int_{X \times \mathbb{T}^1} \varphi \, dv_1 = \int_{X \times \mathbb{T}^1} \varphi \, dv_2 = c$$

et le théorème résulte du lemme. ■

5.5. *Topologies*

Sur l'espace des applications continues de X dans $D^0(\mathbb{T}^1)$ (noté par $C^0(X, D^0(\mathbb{T}^1))$) et sur le groupe des homéomorphismes de X (noté Homéo (X)) on met la topologie de convergence uniforme. Puisque X est compact métrique ces espaces sont métrisables. Sur le sous ensemble de Homéo (X) $Ue(X) = \{g \in \text{Homéo}\,(X) \mid g$ est uniquement ergodique$\}$ on met la topologie induite.

5.6. Soit Y un espace compact métrique; rappelons que, si l'on munit l'espace des fonctions continues sur Y, $C^0(Y)$, de la topologie de la convergence uniforme et l'espace des mesures de probabilités sur Y (noté $M(Y)$) de la topologie vague (ou topologie faible induite par la dualité $\sigma(M(Y), C^0(Y))$), alors l'espace $M(Y)$ est compact, métrisable, et on a le lemme immédiat:

LEMME. *Les applications suivantes sont continues*:

$$(\mu, \varphi) \in M(Y) \times C^0(Y) \to \int_X \varphi \, d\mu \in \mathbb{R};$$

$$(\mu, g) \in M(Y) \times \text{Homéo}\,(Y) \to g_* \mu \in M(Y).$$

5.7. *Continuité du nombre de rotation fibré*

PROPOSITION. *L'application*

$$\tilde{F} = (g, \tilde{h}) \in Ue(X) \times C^0(X, D^0(\mathbb{T}^1)) \to \rho_f(\tilde{F}) \in \mathbb{R}$$

est continue.

Démonstration. Il suffit de montrer que, toute suite $(\tilde{F}_i)_{i \geq 1}$, convergeant vers $\tilde{F}$ a une sous-suite $(F_{n_i})_{i \geq 0}$, $0 < n_i < n_{i+1}$, telle que si $i \to +\infty$, $\rho_f(\tilde{F}_{n_i}) \to \rho_f(\tilde{F})$. On écrit $\tilde{F}_i = (g_i, Id + \varphi_i)$ et $\tilde{F} = (g, Id + \varphi)$, où φ_i et φ sont dans $C^0(X \times \mathbb{T}^1, \mathbb{R})$. On note F_i(resp. F) l'homéomorphisme induit sur $X \times \mathbb{T}^1$ par $\tilde{F}_i$ (resp. $X \times \mathbb{T}^1$), et ν_i une mesure de probabilité sur $X \times \mathbb{T}^1$ invariante par F_i. Soit $(\nu_{n_i})_{i \geq n}$ une sous-suite de la suite $(\nu_i)_i \subset M(X \times \mathbb{T}^1)$ convergeant vaguement vers $\nu \in M(Y)$; on a, par 5.6, $F_* \nu = \nu$ puisque $F_{n_i} \to F$ uniformément. Par la démonstration de 5.4,

$$\rho_f(\tilde{F}_{n_i}) = \int_{X \times \mathbb{T}^1} \varphi_{n_i} \, d\nu_{n_i}, \qquad \rho_f(\tilde{F}) = \int \varphi \, d\nu$$

mais, par le lemme de 5.6, si $i \to +\infty$,

$$\int \varphi_{n_i} \, d\nu_{n_i} \to \int \varphi \, d\nu. \quad \blacksquare$$

5.8. *Remarques.* 1. Il n'est pas difficile de voir (par des arguments similaires à 5.7) que l'application $\tilde{F} \to \bar{\rho}_f(\tilde{F})$ est continue pour la topologie uniforme au point $(g_1, \tilde{h}_1) \in Ue(X) \times C^0(X, D^0(\mathbb{T}^1))$ si on définit $\bar{\rho}_f(\tilde{F})$ comme un fonction de $F = (g, \tilde{h}) \in \text{Homéo}\,(X) \times C^0(X, D^0(\mathbb{T}^1))$ ainsi que nous l'avons fait en 5.2 (on peut aussi remplacer la lim sup par la lim inf).

2. Si l'homéomorphisme g préserve une mesure de probabilité fixée μ de X (mais on ne suppose pas que g est uniquement ergodique) si $\tilde{h} = Id + \varphi \in C^0(X, D^0(\mathbb{T}^1))$ et si $\tilde{F} = (g, h)$, alors, quand $n \to +\infty$, $(1/n)(p_2 \circ \tilde{F}^n(x)(\theta) - \theta)$ tend pour μ-presque tout x et tout θ vers une fonction $\Psi \in L^\infty(X, \mu)$, g invariante (cf.

5.4). De plus l'application

$$\tilde{F}=(g,\tilde{h})\in\{f\in\text{Homéo }(X)\mid f_*\mu=\mu\}\times C^0(X,D^0(\mathbb{T}^1))\to\int_X \Psi\,d\mu\in\mathbb{R}$$

est continue par la même démonstration que 5.7.

5.9. *Propriétés*

On se donne $\tilde{F}=(g,\tilde{h})\in Ue(X)\times C^0(X,D^0(\mathbb{T}^1))$ On écrit $\tilde{F}(x,\theta)=(g(x),\tilde{h}(x)(\theta))=(g(x),\ \theta+\varphi(x,\theta))$ où $\varphi\in C^0(X\times\mathbb{T}^1)$. On désigne par F l'homéomorphisme induit par $\tilde{F}$ sur $X\times\mathbb{T}^1$.

On a les propriétés suivantes pour la fonction continue $\tilde{F}\to\rho_f(\tilde{F})\in\mathbb{R}$:

1) Si $p\in\mathbb{Z}$, $\rho_f((Id\times R_p)\circ\tilde{F})=p+\rho_f(\tilde{F})$.

Si l'espace X est connexe, on pose $\rho_f(F)=\rho_f(\tilde{F})(\text{mod }1)$ et cela ne dépend pas du relèvement $\tilde{F}$ de F. Les propriétés suivantes ont alors des analogues immédiats pour $\rho_f(F)\in\mathbb{T}^1$.

Si l'espace X n'est pas connexe on pose $\rho_f(F)=\rho_f(\tilde{F})\text{ mod }D$, où $D\subset\mathbb{R}$ est le sous-groupe $\rho_f(g\times N)$ avec $N=\{Id_{\mathbb{R}}+\chi\mid\chi\in C^0(X,\mathbb{Z})\}$. Si $H=g\times(Id+\chi)$, avec $Id+\chi\in N$ on a $\rho_f(H)=\int_X\chi(x)\,d\mu(x)$.

Par la démonstration de 5.4 on vérifie que $\rho_f(\tilde{F})\text{ mod }D$ ne dépend pas du relèvement $\tilde{F}$ de F.

Le groupe D est dénombrable car l'esemble N l'est (puisque avec la topologie de la convergence uniforme N est discret et séparable l'espace X étant compact métrisable). On a toujours $\mathbb{Z}\subset D$ et D est le $\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{R}$ engendré les valeurs $\mu(U_i)$ où U_i sont les ensembles compacts ouverts de X.

2) Si pour tout $x\in X$ on a $\tilde{h}_1(x)\leq\tilde{h}_2(x)$, où $h_i\in C^0(X,D^0(\mathbb{T}^1))$ pour $i=1,2$, alors $\rho_f(g,\tilde{h}_1)\leq\rho_f(g,\tilde{h}_2)$.

3) Il en résulte que la fonction suivante

$$\lambda\to\rho_f((Id\times R_\lambda)\circ\tilde{F})=k(\lambda)\in\mathbb{R}$$

est continue, monotone non décroissante, et vérifie $k(\lambda+1)=k(\lambda)+1$.

4) Si $\rho_f(\tilde{F})=\alpha\in\mathbb{R}$, alors l'homéomorphisme de $X\times\mathbb{R}$ $(g,R_\alpha)^{-1}\circ\tilde{F}$ a un point fixe. (Cela résulte de ce que $\int_{X\times\mathbb{T}^1}\varphi\,d\nu=\alpha$, où ν est une mesure de probabilité invariante par l'homéomorphisme F de $\mathbb{T}^1\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. La fonction φ s'annule donc en au moins un point.)

5) Soit $H(x,\theta)=(x,l(x)(\theta))$, où $l\in C^0(X,D^0(\mathbb{T}^1))$. La même démonstration que [4, II et XIII. 1] donne $\rho_f(H\circ(g\times R_\alpha)\circ H^{-1})=\alpha$.

6) Soit g un homéomorphisme de X totalement uniquement ergodique (i.e.

pour tout $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, g^n est uniquement ergodique) alors

$$\rho_f(\tilde{F}^n) = n\rho_f(\tilde{F}).$$

7) Soit $\tilde{F} = H \circ (g \times R_\alpha) \circ H^{-1}$ avec $H(x, \theta) = (x, l(x)(\theta))$. Par 5) $\rho_f(\tilde{F}) = \alpha$. On a la

PROPOSITION. $\rho_f((Id \times R_\lambda) \circ \tilde{F}) = \alpha \Leftrightarrow \lambda = 0$.

Démonstration. Si $\tilde{F}_1 = (g, \tilde{h}_1) \in Ue(X) \times C^0(X, D^0(\mathbb{T}^1))$ vérifie $\rho_f(\tilde{F}_1) = \alpha$ et si $\tilde{F} = H \circ (g \times R_\alpha) \circ H^{-1}$, alors $\tilde{F}_1 \circ \tilde{F}^{-1}$ a un point fixe. En effet par 4) l'homéomorphisme $H^{-1} \circ \tilde{F}_1 \circ \tilde{F}^{-1} \circ H$ de $X \times \mathbb{R}$ a un point fixe et donc aussi $\tilde{F}_1 \circ \tilde{F}^{-1}$. Si l'on avait $\rho_f((Id \times R_\lambda) \circ \tilde{F}) = \alpha$ pour un $\lambda \neq 0$, l'homéomorphisme $Id \times R_\lambda$ de $X \times \mathbb{R}$ aurait un point fixe et donc $\lambda = 0$. ■

8) Soient $g \in Ue(X)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $\bar{0}^0(g \times R_\alpha) =$ la fermeture pour la C^0-topologie dans $Ue(X) \times C^0(X, D^0(\mathbb{T}^1))$ de l'ensemble $\{H^{-1} \circ (g \times R_\alpha) \circ H \mid H(x, \theta) = (x, l(x)(\theta)),\ l \in C^0(X, D^0(\mathbb{T}^1))\}$.

PROPOSITION. *Pour tout* $\tilde{F}_1 = (g, \tilde{h}) \in Ue(X) \times C^0(X, D^0(\mathbb{T}^1))$ *vérifiant* $\rho_f(\tilde{F}_1) = \alpha$ *et tout* $\tilde{F} \in \bar{0}^0(g \times R_\alpha)$, *l'homéomorphisme* $\tilde{F}_1 \circ F^{-1}$ *de* $X \times \mathbb{R}$ *a un point fixe.*

Démonstration. Si l'on fixe $\tilde{F}_1$, alors pour tout H, par 4) $\tilde{F}_1 \circ (H \circ (g \times R_\alpha) \circ H^{-1})^{-1}$ a un point fixe; or, l'ensemble des $F = (g, \tilde{h})$ avec g fixé et $\tilde{h} \in C^0(X, D^0(\mathbb{T}^1))$ tel que $\tilde{F}_1 \circ \tilde{F}^{-1}$ n'ait pas de point fixe sur $X \times \mathbb{R}$ est ouvert pour la C^0-topologie. ■

COROLLAIRE. *Si* $\tilde{F} \in \bar{0}^0(g \times R_\alpha)$ *alors* $\rho_f((Id \times R_\lambda) \circ \tilde{F}) = \alpha \Leftrightarrow \lambda = 0$.

Remarque. La proposition ci-dessus n'est pas valable si on remplace $\mathbb{T}^1$ par $\mathbb{T}^n$.

EXEMPLE. $X = \mathbb{T}^1$, $g = R_\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $\tilde{h}(x) \in \text{Homéo}\,(\mathbb{T}^2)$, $\tilde{h}(x)(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \varphi_1(z),\ \theta_2 + \varphi_2(x))$, où $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$, $\int_0^1 \varphi_i(x)\,dx = 0$, pour $i = 1, 2$ et les fonctions φ_1 et φ_2 n'ont pas de 0 commun.

5.10. *Le groupe* $G^\infty(\mathbb{T}^n)$

On considère le sous-groupe $G^\infty(\mathbb{T}^n)$ de groupe des difféomorphismes de $\mathbb{T}^n$, $n \geq 2$, défini par $G^\infty(\mathbb{T}^n) = \{(R_\alpha \times h) \mid \alpha \in \mathbb{T}^{n-1},\ h \in C_0^\infty(\mathbb{T}^{n-1}, \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1))\}$, où, si

$\alpha \in \mathbb{T}^{n-1}$, $R_\alpha : \theta \in \mathbb{T}^{n-1} \to \theta + \alpha \in \mathbb{T}^{n-1}$, et où $C_0^\infty(\mathbb{T}^{n-1}\, \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1))$ désigne l'ensemble des applications de classe C^∞ de $\mathbb{T}^{n-1}$ dans $\mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$ homotopes à l'application constante $\theta \in \mathbb{T}^{n-1} \to Id_{\mathbb{T}^1}$ (i.e. $h \in C^\infty$ veut dire que $(x, \theta) \in \mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{T}^1 \to h(x, \theta) \in \mathbb{T}^1$ est de classe C^∞). $\mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$ désigne le groupe topologique des difféomorphismes de classe C^∞ préservant l'orientation avec la C^∞-topologie. On met sur $G^\infty(\mathbb{T}^n)$ la topologie C^∞.

On définit aussi le sous-groupe de Homéo $(\mathbb{T}^n)$ $G^0(\mathbb{T}^n) = \{(R_\alpha \times h) \mid \alpha \in \mathbb{T}^{n-1}, h \in C_0^0(\mathbb{T}^{n-1}, \mathrm{Homéo}_+(\mathbb{T}^1))\}$ et on met sur $G^0(\mathbb{T}^n)$ la C^0-topologie. On rappelle la définition:

DÉFINITION. $(\alpha, \beta) \in \mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{T}^1$ *satisfait à une condition diophantienne s'il existe* $C > 0$, $\gamma > 0$ *tel que, pour tout* $(k_0, k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}^n - \{0\})$, *on ait* $|k_0 + k_n\tilde{\beta} + \sum_{i=1}^{n-1} k_i\tilde{\alpha}_i| \geq C\,|k|^{-\gamma}$, *où* $|k| = \sup_{1 \leq i \leq n} |k_i|$ *et* $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \mathbb{R}^n$ *est un relèvement de* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{T}^n$ *à* $\mathbb{R}^n$.

On rapelle que Lebesgue-presque-tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{T}^n$ satisfait à une condition diophantienne.

Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{T}^n$ satisfait à une condition diophatienne, alors la translation R_α de $\mathbb{T}^{n-1}$ est minimale et donc uniquement ergodique.

5.11. *Corollaire due théorème d'Arnold et de Moser*

On a le corollaire suivant du théorème d'Arnold et de Moser, théorème qui est démontré dans [4, Appendice] (voir aussi [6]).

COROLLAIRE 1. *Soit* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{T}^1$ *satisfaisant à une condition diophantienne. Il existe un voisinage* $\mathcal{V}_{\alpha,\beta}$ *de* (R_α, R_β) *dans* $G^\infty(\mathbb{T}^n)$ *et une application continue pour la* C^∞*-topologie (et même de classe* C^∞ *au sens d'Hamilton)* $S_{\alpha,\beta}$: $\mathcal{V}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{T}^1 \times G^\infty(\mathbb{T}^n)$ *telle que* $S_{\alpha,\beta}(F) = (\lambda, H)$ *vérifie* $H(0) = 0$ *et* $F = R_{(0,\lambda)} \circ H \circ (R_\alpha \times R_\beta) \circ H^{-1}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer [4, A] et [4, IV.5.1] pour s'assurer que $H \in G^\infty(\mathbb{T}^n)$. Cela résulte aussi de la démonstration de [4, A] ou de [6]. (On peut aussi raisonner directement et montrer que H est fibré exactement comme dans la démonstration de 4.13.) ■

Remarque. Si F définit un difféomorphisme $\mathbb{R}$-analytique de $\mathbb{T}^n$ il en est de même de H (voir [4, A]).

5.12. COROLLAIRE 2. *Soient* (α, β) *satisfaisant à une condition diophantienne et* $F = (R_\alpha, h) \in \mathcal{V}_{\alpha,\beta}$ *(voisinage du corollaire* 1). *On suppose que* $\rho_f(F) = \beta$ *(ici* $X = \mathbb{T}^{n-1}$, $g = R_\alpha$); *il existe alors* $H = Id_{\mathbb{T}^{n-1}} \times l$ *avec* $l \in C_0^\infty(\mathbb{T}^{n-1}, \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1))$ *tel que l'on ait* $F = H \circ (R_\alpha \times R_\beta) \circ H^{-1}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer 5.11 et 5.9.7). ■

5.13. Soit $G_L^\infty(\mathbb{T}^n) = \mathbb{T}^{n-1} \times C_0^\infty(\mathbb{T}^{n-1}, PSL(2,\mathbb{R}))$: on suppose $PSL(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)) \cong \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$, cette inclusion venant de l'action canonique de $PSL(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. L'indice 0 dans C_0^∞ indique que l'on ne considère que les applications de classe C^∞ homotopes à l'application constante $x \in \mathbb{T}^{n-1} \to e$.

L'application

$$\beta \in \mathbb{T}^1 \to \begin{pmatrix} \cos 2\pi\beta & -\sin 2\pi\beta \\ \sin 2\pi\beta & \cos 2\pi\beta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$$

donne l'application $\beta \to R_{2\beta} \in \mathbb{T}^1 \subset PSL(2,\mathbb{R}) \subset \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$. $G_L^\infty(\mathbb{T}^n)$ est canoniquement un sous-groupe de $G^\infty(\mathbb{T}^n)$, et on utilise l'indice L pour linéaire. On définit aussi le sous-groupe de $G^0(\mathbb{T}^n)$, $G_L^0(\mathbb{T}^n) = \mathbb{T}^{n-1} \times C_0^0(\mathbb{T}^{n-1}, PSL(2,\mathbb{R}))$.

5.14. COROLLAIRE 3. *Soit* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{T}^1$ *satisfaisant à une condition diophantienne et* $(R_\alpha, A) \in \mathcal{V}_{\alpha,\beta} \cap G_L^\infty(\mathbb{T}^n)$ *(voisinage du corollaire* 1) *vérifiant* $\rho_f(R_\alpha, A) = \beta$. *Alors il existe* $H \in G_L^\infty(\mathbb{T}^n)$ *tel que l'on ait*
(+) $F = H \circ (R_\alpha \times R_\beta) \circ H^{-1}$.

1*ère Démonstration.* Par 5.12, il existe $H_1 \in G^\infty(\mathbb{T}^n)$ vérifiant (+); on veut voir que $H_1 \in G_L^\infty(\mathbb{T}^n)$; or H_1 est unique si on impose que: $H_1(0) = 0$ et il suffit de voir qu'il existe $H_2 \in G_L^0(\mathbb{T}^n)$ (i.e. de classe C^0) vérifiant (+). Il existe $C > 1$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{T}^{n-1}$ et tout entier $n \geq 0$, on ait

$$\|A_{R_\alpha}^n(x)\| \leq C,$$

où $A_{R_\alpha}^n(x) = A(R_{(n-1)\alpha}(x)) \cdots A(x)$ et $\| \ \|$ est la fonction induite sur $PSL(2,\mathbb{R})$ par la norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, elle même induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$: si $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2$. En effet le difféomorphisme H_1 est de classe C^1 et donc

$$\sup_n \left\| \frac{1}{\det DF^n} \right\|_{C^0(\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2))} < +\infty$$

puisque $\tilde{F} = H_1 \circ (R_\alpha \times R_\beta) \circ H_1^{-1}$ (cf. [4, IV 1]). DF^n désigne la dérivée de F^n. Or

$$\left\| \frac{1}{\det DF^n} \right\|_{C^0} = \|A_{R_\alpha}^n\|_{C^0(\mathbb{T}^{n-1})}^2.$$

(On utilise le fait que, si $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$, $v = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$ pour un $\theta \in \mathbb{T}^1$ et

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}),$$

alors

$$① \quad \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2\pi} \operatorname{Arctg}\left(\frac{a \cos 2\pi\theta + b \sin 2\pi\theta}{c \cos 2\pi\theta + d \operatorname{din} 2\pi\theta}\right)\right) = \frac{1}{\|Bv\|^2}.)$$

Par un théorème de Cameron (la démonstration étant analogue à celle de [9-§2.5]) il existe $H_3 \in G_L^0(\mathbb{T}^n)$ (on peut supposer que H_3 est homotope à l'identité) tel que $H_3 \circ F \circ H_3^{-1} = (R_\alpha, A_1)$, où $A_1(x) = e^{2\pi i \varphi(x)}$ et $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^{n-1}, \mathbb{R})$. Par l'invariance du nombre de rotation fibré (cf. 5.9.5)), on a $\int_{\mathbb{T}^{n-1}} \varphi(x)\, dx = \beta$. Par [4, XIII 5.3], il existe $\eta \in C^0(\mathbb{T}^{n-1}, \mathbb{R})$ tel que $H_4(x, \theta) = (x, e^{2\pi i(\theta + \eta(x))})$ vérifie

$$H_4 \circ H_3 \circ F \circ H_3^{-1} \circ H_4^{-1}(x, \theta) = (x + \alpha, e^{2\pi i(\theta + \beta)})$$

et

$$H_2 = H_4 \circ H_3 \in G_L^0(\mathbb{T}^n) \quad \text{vérifie donc} \quad (+). \quad \blacksquare$$

Remarque. On a montré en plus: *si* $F \in G_L^\infty(\mathbb{T}^n)$ *vérifie* $(+)$ *avec un* $H \in G^\infty(\mathbb{T}^n)$ *alors* $H \in G_L^\infty(\mathbb{T}^n)$ (et on a seulement utilisé le fait que $R_\alpha \times R_\beta$ est une translation minimale de $\mathbb{T}^n$).

2ème démonstration si le voisinage $\mathcal{V}_{\alpha,\beta}$ *est assez petit.* Pour tout $\eta > 0$, si le voisinage $\mathcal{V}_{\alpha,\beta}$ est assez petit, on peut supposer qu'il existe $H_1 \in G^\infty(\mathbb{T}^n)$ vérifiant $(+)$ et $\|H_1 - Id_{\mathbb{T}^n}\|_{C^1} < \eta$. (Cela résulte de la continuité de l'applications $S_{\alpha,\beta}$ de 5.11). Puisque H_1 est de classe C^∞, on a:

a) La suite $(\bar{R}_{-n\beta} \cdot \bar{A}^n_{R_\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $C^\infty(\mathbb{T}^{n-1}, SL(2, \mathbb{R}))$ est bornée dans la C^∞-topologie, où

$$\bar{R}_{n\beta} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi n\bar{\beta} & -\sin 2\pi n\bar{\beta} \\ \sin 2\pi n\bar{\beta} & \cos 2\pi N\beta \end{pmatrix},$$

avec $\bar{\beta} \in \mathbb{T}^1$ vérifiant $2\bar{\beta} = \beta$, $\bar{A}^n_{R_\alpha}(x) = \bar{A}(R_{(n-1)\alpha}(x)) \cdots \bar{A}(x)$ et $x \to \bar{A}(x)$ est un relèvement de $x \to A(x) \in PSL(2, \mathbb{R})$ voisin de $\bar{R}_\beta$. (C'est possible puisque $x \to A(x)$ est homotope à l'application $x \to e$.) Pour voir ceci, il suffit d'écrire la matrice $A^n_{R_\alpha}$ en coordonnées polaires, en utilisant ① et [4, IV 1 et XIII 1.4].

b) Si η est assez petit, on a

$$\sup_{n\geq 1} \|\bar{R}_{-n\beta}\bar{A}^n_{R_\alpha} - e\|_{C^0(\mathbb{T}^{n-1})} < \tfrac{1}{2},$$

où e est la matrice unité de $SL(2,\mathbb{R})$.

Soient $\bar{B}_n = (1/n)\sum_{i=0}^{n-1} \bar{R}_{-n\beta} \circ \bar{A}^n_{R_\alpha}$, $n \geq 1$; par a) la suite $(\bar{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est d'adhérence compacte pour la C^∞-topologie dans l'espace de Fréchet-Montel $C^\infty(\mathbb{T}^{n-1}, \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2))$; soit $\bar{B}$ une valeur d'adhérence de cette suite (i.e. telle qu'il existe une suite $0 < n_i < n_{i+1}$ d'entiers telle que, si $i \to +\infty$, $\bar{B}_{n_i} \to \bar{B}$ dans la C^∞-topologie). Par b), on a $\|\bar{B} - e\|_{C^0} < \frac{1}{2}$ et donc $\bar{B} \in C^\infty(\mathbb{T}^{n-1}, GL_+(2,\mathbb{R}))$. Si $x \in \mathbb{T}^n$,

$$\bar{B}_n(R_\alpha(x)) \cdot A(x) = \bar{R}_\beta \cdot \bar{B}_n(x) + \frac{1}{n}\bar{R}_\beta(\bar{R}_{+n\beta} \cdot \bar{A}^n_{R_\alpha}(x) - e)$$

et donc, si $n_i \to +\infty$,

$$\bar{B}(R_\alpha(x)) \cdot \bar{A}(x) = \bar{R}_\beta \cdot \bar{B}(x).$$

Il en résulte qu'il existe $c > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{T}^{n-1}$, on ait $\det \bar{B}(x) = c$. Si B désigne l'image de $\bar{B}$ dans $C^\infty(\mathbb{T}^{n-1}, PSL(2,\mathbb{R}))$, alors $H = Id \times B \in G^\infty_L(\mathbb{T}^n)$ vérifie $(+)$. ■

5.15 *Remarques.* 1. Le voisinage $\mathscr{V}_{\alpha,\beta}$ est induit par un voisinage dans la $C^{2\gamma+\varepsilon}$-topologie et sa taille ne dépend que de la constante $C > 0$, où γ et C sont les constantes de la condition diophantienne 5.10 (cf. [4, A.2.5]).

2. On peut affaiblir la condition diophantienne sur (α, β) (cf. 3.2 [14] et [6]).

5.16. *Vecteur de rotation*

Soit $F = (R_\alpha, h) \in G^0(\mathbb{T}^n)$, agissant sur $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{T}^1$. Si R_α est une translation minimale de $\mathbb{T}^{n-1}$, *on définit le vecteur de rotation de* F par

$$\rho(F) = (\alpha, \rho_f(F)) \in \mathbb{T}^n.$$

Cette définition est compatible avec celle de 5.2 remarques 1) et de [4, XIII.1]. L'existence et la valeur de $\rho(F)$ sont invariantes par conjugaison par un homéomorphisme de $\mathbb{T}^n$ homotope à l'identité [4, XIII 1].

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{T}^{n-1}$, on définit le module $\mathscr{M}_\alpha$ des fréquences comme le $\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{T}^1$ engendré par $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Si $k=(k_1,\ldots,k_{n-1})\in\mathbb{Z}^{n-1}$, on définit le difféomorphisme $S_k:(x,\theta)\in\mathbb{T}^{n-1}\times\mathbb{T}^1\to(x,\theta+\langle k,x\rangle)\in\mathbb{T}^n$ avec $\langle k,x\rangle=\sum k_ix_i$ si $x=(x_1,\ldots,x_{n-1})$. On a $S_k\in\mathbb{T}^{n-1}\times C^\omega(\mathbb{T}^{n-1},PSL(2,\mathbb{R}))$, mais pour $k\neq 0$, $S_k\notin G^0(\mathbb{T}^n)$. On définit des automorphismes extérieurs des groupes $G^0(\mathbb{T}^n)$ et $G^0_L(\mathbb{T}^n)$ par $F\to S_k\circ F\circ S_k^{-1}$, et on a

$$\rho(S_k\circ F\circ S_k^{-1})=\left(\alpha,\rho_f(F)+\sum_{i=1}^{n-1}k_i\alpha_i\right)$$

et un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$k\in\mathbb{Z}^{n-1}\to\rho_f(S_k\circ F\circ S_k^{-1})-\rho_f(F)\in\mathcal{M}_\alpha.$$

5.17. *Vecteur de rotation et structure hyperbolique*

Soit $F=(R_\alpha,f)\in G^0(\mathbb{T}^n)$, où R_α est une translation minimale. *On suppose que l'homéomorphisme F de $\mathbb{T}^{n-1}\times\mathbb{T}^1$ laisse invariant le graphe d'une application continue $\Psi:\mathbb{T}^{n-1}\to\mathbb{T}^1$.* Par exemple, F est l'homéomorphisme induit sur $\mathbb{T}^{n-1}\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ par l'homéomorphisme fibré $(R_\alpha,\bar{A})\in\mathbb{T}^{n-1}\times C^0(\mathbb{T}^{n-1},SL(2,\mathbb{R}))$ agissant sur $\mathbb{T}^{n-1}\times\mathbb{R}^2$ et possédant une structure hyperbolique (cf. 4.2 et 4.3).

PROPOSITION. *Soit F comme ci-dessus Si $\rho(F)=(\alpha,\beta)\in\mathbb{T}^n$ alors $\beta\in\mathcal{M}_\alpha$.*

Démonstration. Si Ψ est homotope à une application constante alors $\beta=0$. On se ramène à ce cas en considérant $S_k\circ F\circ S_k^{-1}$ (cf. 5.16). ■

5.18. Soient R_α une translation minimale de $\mathbb{T}^{n-1}$ et $\beta\in\mathbb{T}^1$. On pose $F^0_{\alpha,\beta}=\{F\in G^0(\mathbb{T}^n)\mid\rho(F)=(\alpha,\beta)\}$ et $F^0_{\alpha,\beta}=F^\infty_{\alpha,\beta}\cap G^\infty(\mathbb{T}^1)$. Par la continuité de la fonction ρ_f les ensembles $F^0_{\alpha,\beta}$ et $F^\infty_{\alpha,\beta}$ sont fermés (pour la C^0-topologie).

Il n'est pas difficile de voir que les groupes topologiques $G^0(\mathbb{T}^n)$, $G^0_L(\mathbb{T}^n)$, $G^0_L(\mathbb{T}^n)$ et $G^\infty_L(\mathbb{T}^n)$ sont connexes par arcs et métrisables.

PROPOSITION. *L'ensemble $F^\infty_{\alpha,\beta}$ est connexe pour la C^∞-topologie.*

Démonstration. Soient $L^\infty_\alpha=\{(R_\gamma\times f)\in G^\infty(\mathbb{T}^n)\mid\gamma=\alpha,\ f(0)(0)=0\}$ et $H^\infty_\alpha=\{(R_\gamma\times f)\in G^\infty(\mathbb{T}^n)\mid\gamma=\alpha\}$, on a $L^\infty_\alpha\subset H^\infty_\alpha$.

En remontant à $\mathbb{T}^{n-1}\times\mathbb{R}$ on vérifie que L^∞_α est connexe par arcs. Soit l'application continue, surjective (cf. 5.9.3); $p_2:H^\infty_\alpha\to L^\infty_\alpha$, $(R_\alpha\times f)\to(Id\times R_{-f(0)})\circ(R_\alpha\times f)$. Si on identifie H^∞_α à $\mathbb{T}^1\times L^\infty_\alpha$, par l'application $(\lambda,F)\to(Id\times R_\lambda)\circ F$ alors p_2 est la 2ème projection. Il suit, que puisque $\mathbb{T}^1$ est un espace

compact métrique, que si F est un ensemble fermé de H_α^∞ alors l'ensemble $p_2(F)$ est fermé dans L_α^∞.

Si l'ensemble fermé $F_{\alpha,\beta}^\infty$ n'est pas connexe alors $F_{\alpha,\beta}^\infty = F_1 \coprod F_2$ où F_i, $i = 1,2$, sont des ensembles fermés disjoints de H_α^∞. Or, les ensembles $p_2(F_i)$ $i = 1, 2$, sont fermés et vérifient $p_2(F_1) \cup p_2(F_2) = L_\alpha^\infty$ et donc $p_2(F_1) \cap p_2(F_2) \neq \emptyset$. Soit $y \in p_2(F_1) \cap p_2(F_2)$, par 5.9.3), $p_2^{-1}(y)$ est un segment (pouvant être réduit à un point) et il en résulte par l'absurde que $F_{\alpha,\beta}^\infty$ est connexe. ■

Remarque. Par la même démonstration les ensembles $F_{\alpha,\beta}^0$, $F_{\alpha,\beta}^\infty \cap G_L^\infty(\mathbb{T}^n)$ sont connexes.

QUESTIONS. *Si* $\beta \notin \mathbb{Q}\alpha + \mathbb{Q} \bmod 1$ (*resp. si* $\beta \notin \mathbb{Z}\alpha \bmod 1$) *et si* $f \in F_{\alpha,\beta}^0$ (*resp.* $f \in F_{\alpha,\beta}^0 \cap G_L^0(\mathbb{T}^n)$) *est-ce-que* $\rho_f((Id \times R_\lambda) \circ F) = \beta$ *implique* $\lambda = 0$?

Pour de réponses partielles positives à ces questions cf. 5.9. 7) et 8). Des résponses positives à ces questions impliquent respectivement que si $\beta \notin \mathbb{Q}\alpha + \mathbb{Q}$ mod 1 (resp. $\beta \notin \mathbb{Z}\alpha$ mod 1) alors $F_{\alpha,\beta}^0 \subset H_\alpha^0$ (resp. $F_{\alpha,\beta}^0 \cap G_L^0(\mathbb{T}^n) \subset H_\alpha^0 \cap G_L^0(\mathbb{T}^n)$) est le graphe d'une fonction continue de L_α^0 dans $\mathbb{R}$ (resp. de $L_\alpha^0 \cap G_L^0(\mathbb{T}^n)$ dans $\mathbb{R}$) (cf. [4, III]).

Il suit de 5.17, que si $\beta \in \mathbb{Z}\alpha$ mod 1 alors $G_L^0(\mathbb{T}^n) \cap F_{\alpha,\beta}^0$ a un intérieur non vide dans $G_L^0(\mathbb{T}^n)$ (i.e. il contient l'ouvert de ceux qui agissant sur $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}^2$ ont une structure hyperbolique). Il en résulte que $F_{\alpha,\beta}^\infty$ a aussi un intérieur non vide dans $G^\infty(\mathbb{T}^n)$ (en utilisant le fait qu'un tore invariant par un difféomorphisme de classe C^∞, normalement hyperbolique, est stable par perturbation C^∞ du difféomorphisme).

En utilisant les revêtements finis il en résulte que si $\beta \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\alpha$ mod 1 alors $F_{\alpha,\beta}^\infty$ a un intérieur non vide dans $G^\infty(\mathbb{T}^n)$ (si $(R_\alpha, f) \in G^\infty(\mathbb{T}^n)$, et $(R_\alpha, \tilde{f})$ est un relèvement à $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}$, pour $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$ les revêtements d'ordre q s'obtiennent par $(R_\alpha, \tilde{f}_q)$ où

$$(R_\alpha, \tilde{f}_q)(\theta, y) = \left(\theta + \alpha, \frac{1}{q} f(\theta)(qy) + \frac{p}{q}\right)\Big).$$

5.19. On reprend les notations de 5.18. On pose

$$0_{\alpha,\beta}^\infty = \{F \circ (R_\alpha \times R_\beta) \circ F^{-1} \mid F \in G^\infty(\mathbb{T}^n)\} \quad \text{et} \quad 0_{\alpha,\beta,L}^\infty = 0_{\alpha,\beta}^\infty \cap G_L^\infty(\mathbb{T}^n).$$

Par 5.9.5), on a $0_{\alpha,\beta}^\infty \subset F_{\alpha,\beta}^\infty$ (de plus $0_{\alpha,\beta}^\infty$ est connexe).

Si (α, β) satisfait à une condition diophantienne il suit de 5.11, par conjugaison C^∞, que l'ensemble $0_{\alpha,\beta}^\infty$ est ouvert dans $F_{\alpha,\beta}^\infty$ pour la C^∞-topologie.

PROPOSITION. *Si* (α, β) *satisfait à une condition diophantienne alors l'ensemble* $0^\infty_{\alpha,\beta}$ *n'est pas fermé dans* $F^\infty_{\alpha,\beta}$ *pour la* C^∞*-topologie.*

Démonstration. Par l'absurde. Si $0^\infty_{\alpha,\beta}$ était fermé dans $F^\infty_{\alpha,\beta}$ alors il serait ouvert et fermé et donc par 5.18, $0^\infty_{\alpha,\beta} = F^\infty_{\alpha,\beta}$. Ceci contredit 4.6 et 4.13. ■

Par la remarque de 5.14, si $R_\alpha \times R_\beta$ est une translation minimale de $\mathbb{T}^n$, alors on a

$$0^\infty_{\alpha,\beta,L} = \{F \circ (R_\alpha \times R_\beta) \circ F^{-1} \mid F \in G^\infty_L(\mathbb{T}^n)\}.$$

Par la même démonstration on a la proposition.

PROPOSITION. *Si* (α, β) *satisfait à une condition diophantienne alors l'ensemble* $0^\infty_{\alpha,\beta,L}$ *n'est pas fermé dans* $F^\infty_{\alpha,\beta} \cap G^\infty_L(\mathbb{T}^n)$ *pour la* C^∞*-topologie.*

Remarque. Si α ne satisfait pas à une condition diophantienne alors l'ensemble $0^\infty_{\alpha,\beta,L}$ n'est pas fermé ni ouvert dans $F^\infty_{\alpha,\beta} \cap G^\infty_L(\mathbb{T}^n)$ (cf. [4, XIII 5]).

6. Complément: dépendance plurisousharmonique de paramètres complexes

6.1. Soient X est un espace compact métrique, μ une mesure de probabilité sur X, et $g : X \to X$ une application borélienne préservant la mesure μ.

On suppose que $r > 0$, $p \in \mathbb{N}^*$ et que l'application $A : D^p_r \times X \to \mathcal{B}$ est borélienne, où $\mathcal{B}$ est une algèbre de Banach sur $\mathbb{C}$ avec la norme $\| \ \|$. On suppose que la fonction $(\eta, x) \to \|A(\eta, x)\|$ est bornée sur $D^p_r \times X$ et que, pour tout $x \in X$, l'application $\eta \to A(\eta, x)$ est holomorphe sur l'intérieur de D^p_r (notée Int (D^p_r)). Pour η fixé on note par $A_\eta : X \to \mathcal{B}$ l'application $x \to A(\eta, x)$.

La mesure μ sur X étant donnée et η fixé pour l'application fibré (g, A_η) de $X \times \mathcal{B}$ comme en 1.2 et 1.3 on définit $\lambda_+(g, A_\eta) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

PROPOSITION. *Sour les hypothèses ci-dessus la fonction* $\eta \in \mathrm{Int}\, D^p_r \to \lambda_+(g, A_\eta) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *est plurisousharmonique.*

Démonstration. On pose $b_k(\eta, x) = 1/2^k \operatorname{Log} \|(A_\eta)^{2^k}_g(x)\|$ pour $k \in \mathbb{N}$. Pour $x \in X$ fixé, $\eta \to b_k(\eta, x)$ est une fonction plurisousharmonique. La fonction $\eta \to a_k(\eta) = \int_X b_k(\eta, x)\, d\mu(x)$ est aussi plurisousharmonique: soient $N \in \mathbb{N}$ et $x \in X$ fixé la fonction $\eta \to b_{k,N}(\eta, x) = \sup(b_k(\eta, x), -N)$ est une fonction plurisousharmonique bornée en module, et donc, par [12, 2.2.1], $\eta \to a_{k,N}(\eta) = \displaystyle\int_X b_{k,N}(\eta, x)\, d\mu$ est une

fonction plurisousharmonique. La suite de fonctions $(b_{k,N})_{N\geq 0}$ est décroissante et donc $\eta \to a_k(\eta) = \mathrm{Inf}_{N\geq 0}\,(a_{k,N}(\eta))$ est une fonction plurisousharmonique (voir [7, 1.6.2]). Il en est finalement de même par 1.3 de la fonction $\eta \to \mathrm{Inf}_k\, a_k(\eta) = \lambda_+(g, A_\eta)$. ■

Remarque. Si $p = 1$, par la décomposition de Riesz la fonction $\eta \to \lambda_+(g, A_\eta)$ est sur $\mathrm{Int}\, D_r^1$ la somme d'une fonction harmonique et de la fonction

$$\int \mathrm{Log}\,|\eta - x|\, dv(x)$$

où v est une mesure de Radon positive ou nulle. Cette décomposition de Riesz peut, en un certain sens, être considérée comme une version "abstraite" de la formule de Thouless.

6.2. *Exemple d'application*

On se donne X, g, μ comme en 6.1 et une application borélienne $B : X \to SL(2, \mathbb{R})$ telle que les fonctions $x \in X \to \|B(x)\|$ et $x \to \|B^{-1}(x)\|$ soient bornées où $\|\ \|$ est une norme de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

Comme la décomposition d'Iwasawa est un difféomorphisme $\mathbb{R}$-analytique de $SL(2, \mathbb{R})$ sur NAK on peut écrire de façon unique

$$B(x) = \begin{pmatrix} \lambda(x) & b(x) \\ 0 & 1/\lambda(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\pi\varphi(x)) & -\sin(2\pi\varphi(x)) \\ \sin(2\pi\varphi(x)) & \cos(2\pi\varphi(x)) \end{pmatrix}$$

où $\varphi : X \to \mathbb{T}^1$ est une application borélienne, les fonctions $x \to \lambda(x)$, $x \to 1/\lambda(x)$, $x \to b(x)$ sont boréliennes bornées et pour tout $x \in X$, $\lambda(x) > 0$. De plus, si X est une variété $\mathbb{R}$-analytique, les fonctions φ, λ, b sont aussi dérivables que l'est l'application $x \to B(x)$. On écrit

$$T(x) = \begin{pmatrix} \lambda(x) & b(x) \\ 0 & 1/\lambda(x) \end{pmatrix}$$

et si $\alpha \in \mathbb{T}^1$,

$$B_\alpha(x) = B(x) \begin{pmatrix} \cos 2\pi\alpha & -\sin 2\pi\alpha \\ \sin 2\pi\alpha & \cos 2\pi\alpha \end{pmatrix}.$$

Si $T(x) \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur un ensemble de μ-mesure positive, on a

$$\delta(B) = \int_X \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(\tfrac{1}{4}[(\lambda(x) + 1/\lambda(x))^2 + b^2(x)])\, d\mu(x) > 0.$$

On considère l'application fibré (g, B_α) de $X \times \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, on met sur X la mesure μ et on a:

PROPOSITION. *Il existe un ensemble de $\alpha \in \mathbb{T}^1$ de mesure de Haar positive tel que l'on ait*:

$$\lambda_+(g, B_\alpha) \geq \delta(B).$$

Démonstration. On pose

$$A_\eta(x) = (T(x)C + \eta^2 e^{4\pi i\varphi(x)} T(x)\bar{C}) \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$$

où $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{C}$ est la matrice complexe conjuguée et $\eta \in \mathbb{C}$. On a si $\eta_\alpha = e^{2\pi i\alpha}$ (i.e. si $|\eta_\alpha| = 1$)

$$B_\alpha(x) = A_{\eta_\alpha}(x)/(\eta_\alpha e^{2\pi i\varphi(x)}) \quad \lambda_+(g, B_\alpha) = \lambda_+(g, A_{\eta_\alpha}).$$

Par 6.1 la fonction $\eta \in \mathbb{C} \to \lambda_+(g, A_\eta) \in \mathbb{R}$ est sousharmonique et donc pour η appartenant à un ensemble de mesure de Haar positive de $\mathbb{T}_1^1$ (i.e. $|\eta| = 1$) on a

$$\lambda_+(g, A_\eta) \geq \lambda_+(g, A_0) \equiv \lambda_+(g, TC).$$

On veut montrer $\lambda_+(g, TC) \geq \delta(B)$, pour cela on pose $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ et on a

$$L^{-1}T(x)CL = \begin{pmatrix} 0 & c(x) \\ 0 & d(x) \end{pmatrix}$$

où $d(x) = \frac{1}{2}(\lambda(x) + 1/\lambda(x) + ib(x)) = \mathrm{Tr}(T(x)C)$. Puisque L est une matrice constante on a

$$\lambda_+(g, L^{-1}TCL) = \lambda_+(g, TC)$$

et on vérifie que

$$\lambda_+(g, L^{-1}TCL) \geq \int_X \mathrm{Log}\,|d(x)|\, d\mu(x) = \delta(B). \quad \blacksquare$$

6.3. *Un autre exemple*

Soient X, μ, g et $A : X \to \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ vérifiant les conditions de 6.1.

Soit a un élément de l'algèbre de Lie de $SL(n, \mathbb{C})$. La proposition suivante résulte facilement de 6.1.

PROPOSITION. *Pour tout $r > 0$ il existe $\eta_r \in \mathbb{C}$ tel que l'on ait $|\eta_r| = r$ et $\lambda_+(g, A \cdot \exp(\eta_r a)) \geq \lambda_+(g, A)$.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. André et S. Aubry, *Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices*, Annals of the Israel Phys. Soc., *3* (1979), 133–164.

[2] M. M. Benderskii et L. A. Pastur, *On the spectrum of the one dimensional Schrödinger equation with random potential*, Math. U.S.S.R. Sbornik, *11* (1970), 245–256.

[3] Y. Derriennic, *Sur le théorème ergodique sous additif*, C.R. Acad. Sc. Paris, *281* (1975), 985–988.

[4] M. R. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. Math. I.H.E.S., *49* (1979), 5–233.

[5] ——, *Construction d'un difféomorphisme minimal d'entropie topologique non nulle*, Ergod, Th. and Dynam. Sys., *1* (1981), 65–76.

[6] ——, *Démonstration du théorème des courbes invariantes, manuscrit, à paraître*, et "théorèmes des fonctions implicites dans les espaces de Fréchet et quelques applications aux systèmes dynamiques" cours à l'E.N.S. à paraître à Astérisque.

[7] L. Hörmander, *Complex analysis in several variables*, D. Van Nostrand, New York (1966).

[8] R. A. Johnson, *Ergodic theory and linear differential equations*, J. Diff. Equations, *28* (1978), 23–34.

[9] ——, *On a Floquet theory for two-dimensional almost periodic linear systems*, J. Diff. Equations, *37* (1980), 184–205.

[10] ——, *The recurrent Hill's equation*, J. Diff. Equations, *46* (1982), 165–193.

[11] —— et J. Moser, *The rotation number for almost periodic potentials*, Com. in Math. Phy., *84* (1982), 403–438.

[12] P. Lelong, *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n-variables)*, Presse Univ. de l'Univ. de Montréal (1968).

[13] V. Millionščikov, *Proof of the existence... quasi-periodic coefficients* Diff. Equations, *5* (1969), 1475–8; voir aussi, *Proof of the existence of irregular systems of linear differential equations with almost periodic coefficients*, Diff. Equations, *4* (1968), 203–205.

[14] J. Moser, *Convergent series expansions for quasi periodic motions* Math. Annalen, *169* (1967), 136–176.

[15] D. Ruelle, *Ergodic theory of differentiable dynamical systems*, Publ. Math. I.H.E.S., *50* (1979), 27–58.

[16] W. Rudin, *Fourier Analysis on groups*, J. Wiley et Sons, New-York (1962).

[17] H. Rüssmann, *On the one-dimensional Schrödinger equation with a quasi-periodic potential*, Annals of the New-York Acad Sci., *357* (1980), 90–107.

[18] M. Shub, *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Société Math. Fr., Astérisque n°56 (1978).

[19] R. E. Vinograd, *A problem by N. P. Erugin*, Diff. Equations, *11* (1974), 474–478.

[20] E. Zenhder, *A simple proof of a generalisation of a theorem of C. L. Siegel*, Springer Lect. notes in Math. n°579, Springer Verlag (1977), 855–866.

[A] J. AVRON and B. SIMON, *Singular continous spectrum for a class of almost periodic Jacobi matrices*, Bull. Amer. Math. Soc., 6 (1982), 81–83.

[H] G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *Notes on the theory of series XXIV. A curious power series*, Proc. Cambridge Philos. Soc., *42* (1946), 85–90.

[K] J. F. KOKSMA, *A Diophantine property of some summable functions*, J. Indian Math. Soc. (N.S.), *15* (1951), 87–96.

[M] R. MAÑÉ, *Quasi-Anosov diffeomorphisms and hyperbolic manifolds*, Transactions A.M.S., *229* (1977), 351–370.

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
F91 128 Palaiseau, France

Resu le 29 septembre 1982