Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 54 (1979)

Artikel: Une famille infinie de noeuds fibrés cobordants à zero et ayant même polynôme d'Alexander.

Autor: Van, Quach Thi Cam / Weber, Claude

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41595

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 562–566 Birkhäuser Verlag, Basel

Une famille infinie de noeuds fibrés cobordants à zéro et ayant même polynôme d'Alexander

QUACH THI CAM VAN et CLAUDE WEBER

1. Introduction

Dans [5], H. Morton a construit une infinité de noeuds fibrés dans S^3, ayant même polynôme d'Alexander, répondant ainsi par la négative à une question posée par Burde et Neuwirth. H. Morton utilise la théorie des tresses.

Dans cet article, nous construisons de façon très élémentaire une famille de noeuds K_m, $(m=0, 1, 2, 3, \cdots)$, fibrés dans S^3, tous distincts, ayant pour polynôme d'Alexander $\Delta(t)^2$, où $\Delta(t)=1-t+t^2$.

Ces noeuds ont en plus la propriété d'être tous "ribbon" et sont donc tous cobordants à zéro.

Les modules d'Alexander de ces noeuds sont distincts sur $\mathbf{Z}T=\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ car leurs deuxièmes idéaux d'Alexander sont distincts. En revanche, pour $m \geqslant 1$, ils ont tous même module d'Alexander sur $\mathbf{Q}T$. Ainsi, pour $m \geqslant 1$, les noeuds K_m ont même chaîne de polynômes: $\Delta_1=\Delta^2$, $\Delta_2=1$, et des chaînes d'idéaux distinctes.

Considérons la forme de Seifert associée à la surface minimale de K_m. Par [3], nous pouvons associer à chacune de ces formes un $(4q+1)$-noeud simple dans $S^{4q+3}(q \geqslant 1)$, qui est fibré puisque la forme de Seifert est unimodulaire. On obtient ainsi, pour $m \geqslant 1$, une famille infinie de noeuds simples fibrés de dimension $(4q+1)$, ayant tous $\Delta(t)^2$ pour polynôme minimal de la monodromie. Comme ce polynôme n'est pas semi-simple, notre résultat est en accord avec [1].

2. Construction du noeud K_m

Considérons la somme connexe du noeud de trèfle avec son image par une réflexion ("Square knot"). Considérons ensuite la portion hachurée de la surface de Seifert dessinée sur la figure 1 et remplaçons-la par un ruban qui effectue m tours complets (m entier $\geqslant 0$). Le cas $m=2$ est représenté sur la figure 2. On obtient ainsi le noeud K_m.

N.B.: K_m n'est rien d'autre qu'une union symétrique au sens de [4].

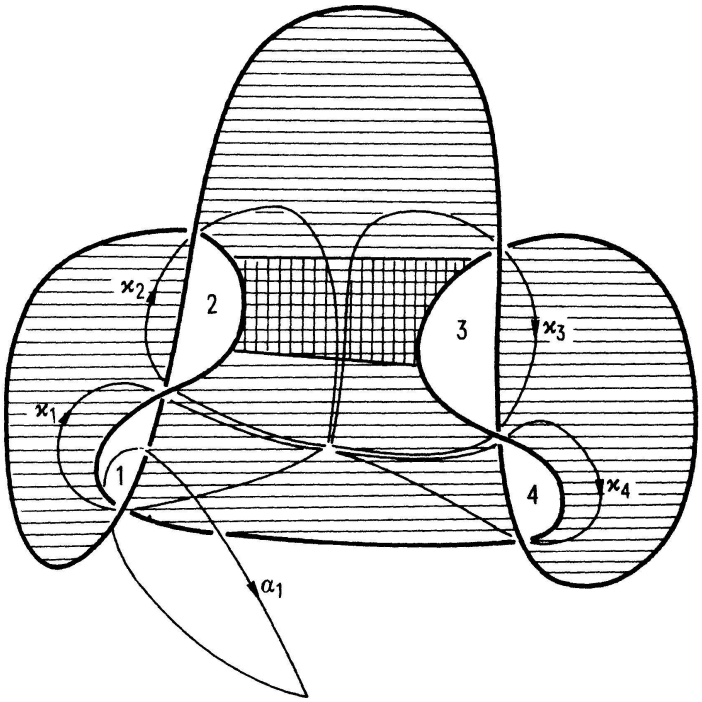

Figure 1.

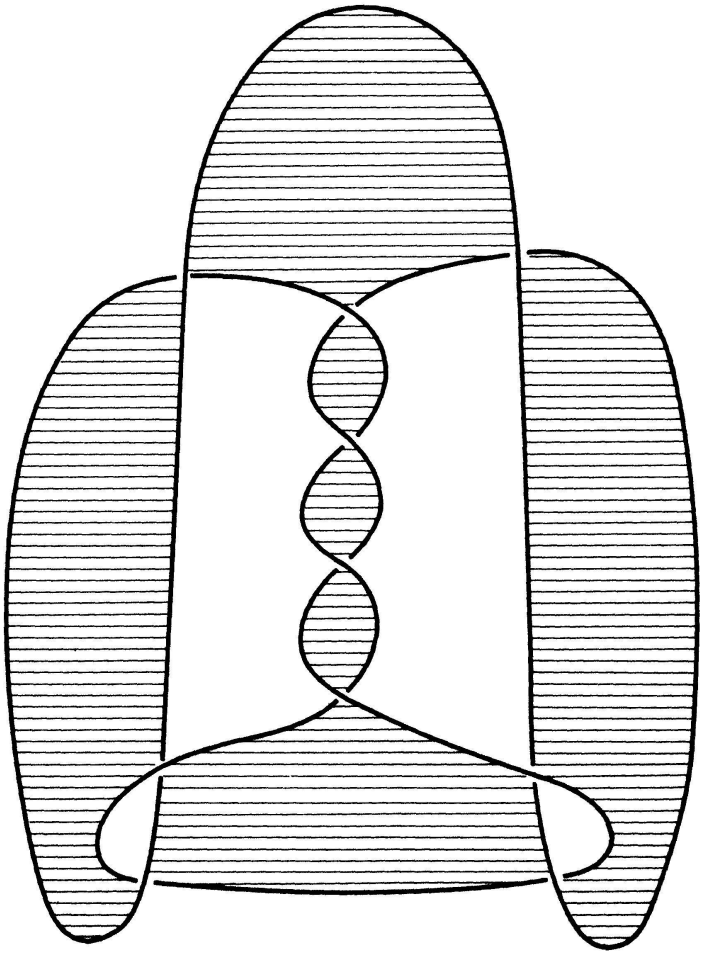

Figure 2.

THÉORÈME. *Pour tout* $m \geqslant 0$, K_m *est un noeud fibré.*

Note: Ce théorème fut découvert par le premier des deux auteurs en essayant de montrer que le noeud 8_{20} se fibre. En fait 8_{20} est le noeud K_1 et K_2 est le noeud 10_{140} de la table de Rolfsen. Le même auteur espère donner un exposé plus systématique des méthodes utilisées ici dans une publication ultérieure.

Preuve du théorème. Considérons la base $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ du groupe fondamental de la surface de Seifert S dessinée sur la figure 1 dans le cas $m = 0$. (Rien d'essentiel ne change dans le cas général.)

La méthode de Dehn montre facilement que $\pi_1(S^3 - S)$ est libre de base $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ où α_i est le générateur de Dehn associé au $i^{\text{ème}}$ trou (voir figure 1).

Choisissons pour côté positif de S celui qui se trouve au-dessus du point-base.

Soit $i_+ : \pi_1(S) \to \pi_1(S^3 - S)$ l'homomorphisme obtenu en poussant S dans $S^3 - S$ du côté positif de la surface.

On trouve pour le noeud K_m:

$$i_+(x_1) = \alpha_1, \qquad i_+(x_2) = \alpha_1^{-1}\alpha_2(\alpha_3^{-1}\alpha_2)^m,$$

$$i_+(x_3) = (\alpha_3^{-1}\alpha_2)^{-m}\alpha_3^{-1}\alpha_4, \qquad i_+(x_4) = \alpha_4^{-1}.$$

D'après [2], il suffit de voir que i_+ est surjectif pour conclure que K_m se fibre. De toute évidence:

$$\alpha_1 \quad et \quad \alpha_4 \in I_m(i_+) \quad et \quad i_+(x_2x_3) = \alpha_1^{-1}\alpha_2\alpha_3^{-1}\alpha_4$$

Donc: $\alpha_2\alpha_3^{-1} \in I_m(i_+)$.

Les expressions calculées pour $i_+(x_2)$ et $i_+(x_3)$ montrent alors que α_2 et $\alpha_3 \in I_m(i_+)$.

N.B.: Si l'on ne veut pas utiliser [2], il n'est pas difficile de voir directement que i_+ (et i_-) sont des isomorphismes. *C.q.f.d.*

3. Module d'Alexander du noeud K_m

Comme le coefficient d'enlacement de x_i avec α_j est égal *à* δ_{ij} (symbole de Kronecker), les formules exprimant $i_+(x_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, donnent immédiatement (en permutant les α_j) la matrice de Seifert A associée aux choix que nous avons faits.

On trouve:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m+1 & -m & 0 \\ 0 & -m & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$tA-A^*=\begin{pmatrix} t-1 & -t & 0 & 0 \\ 1 & (m+1)(t-1) & m(1-t) & 0 \\ 0 & m(1-t) & (m-1)(t-1) & -1 \\ 0 & 0 & t & 1-t \end{pmatrix}$$

A^* désigne la matrice transposée de A.

Classiquement, $tA-A^*$ est une matrice de présentation sur $\mathbf{Z}T$ du module d'Alexander M_m du noeud K_m. Des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes montrent que l'on peut réduire cette matrice à la matrice suivante, où $\Delta(t)=1-t+t^2$:

$$\begin{pmatrix} \Delta & mt \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

Le polynôme d'Alexander de K_m est donc $\Delta^2(t)$. Si $m=0$, on retrouve bien $M_0 \approx \mathbf{Z}T/_\Delta \oplus \mathbf{Z}T/_\Delta$. Si $m \geqslant 1$, mt est une unité de $\mathbf{Q}T$. Ceci entraîne immédiatement que:

$$M_m \otimes \mathbf{Q} \approx \mathbf{Q}T/_{\Delta^2}$$

Ainsi, pour $m \geqslant 1$, Δ^2 est le polynôme minimal de la monodromie.

Considérons maintenant l'idéal I_m de $\mathbf{Z}T$ engendré par Δ et mt. (Par définition, il s'agit du deuxième idéal élémentaire de M_m.) Il est facile de voir que:

$\mathbf{Z}T/_{I_m} \approx \mathbf{Z}/_m \oplus \mathbf{Z}/_m$ comme groupes abéliens. Ceci montre que: si $m \neq m'$ alors $I_m \neq I_{m'}$ et donc $M_m \not\approx M_{m'}$. (D'où: $K_m \neq K_{m'}$).

De là découle par exemple; que M_m est une somme directe de $\mathbf{Z}T$-modules cycliques si et seulement si m est égal à 0 ou 1.

Comme $\mathbf{Q}T$-module, $\mathbf{Q}T/_{\Delta^2}$ est irréductible, c'est-à-dire: il n'est pas la somme directe de deux modules non triviaux. Ceci, plus le fait que K_m est de

genre deux implique facilement que K_m est un noeud premier si $m \geqslant 1$. Une consultation des tables permet alors de montrer (si elles sont complètes!), de façon purement calculatoire, que K_1 est le noeud 8_{20} et que K_2 est le noeud 10_{140} (numérotation de Rolfsen). On peut aussi le voir géométriquement.

Finalement, il n'est pas difficile de voir que K_m est "ribbon" car K_0 l'est par construction et les torsions effectuées pour obtenir K_m ne changent rien d'essentiel.

Note: Le professeur J. Stallings nour informe qu'il a obtenu essentiellement le même contre-exemple. Voir Proceedings Symposia in Pure Math. Vol. 32.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BAYER et F. MICHEL: *Finitude du nombre des classes d'isomorphisme des structures isométriques entières*, Comment. Math. Helv. *54* (1979).
[2] E. M. BROWN et R. H. CROWELL: *Deformation retractions of 3-manifolds into their boundaries*, Annals of Math. *82* (1965) 445–458.
[3] M. KERVAIRE: *Les noeuds de dimension supérieure*, Bull. Soc. Math. France *93* (1965) 225–271.
[4] S. KINOSHITA et H. TERESAKA: *On union of knots*. Osaka Math. J. *9* (1957) 131–153.
[5] H. MORTON: *Infinitely many fibered knots having the same Alexander polynomial*, Topology *17* (1978) 101–104.

Section de mathématiques
Université de Genève
2–4, *rue du Lièvre*
Case postale 124
1211-*Genève* 24.

Reçu le 30 novembre 1978