# Une famille infinie de noeuds fibrés cobordants à zero et ayant même polynôme d'Alexander.

Autor(en): **Van, Quach Thi Cam / Weber, Claude**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **54 (1979)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-41595

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 562–566 Birkhäuser Verlag, Basel

# Une famille infinie de noeuds fibrés cobordants à zéro et ayant même polynôme d'Alexander

QUACH THI CAM VAN et CLAUDE WEBER

## 1. Introduction

Dans [5], H. Morton a construit une infinité de noeuds fibrés dans $S^3$, ayant même polynôme d'Alexander, répondant ainsi par la négative à une question posée par Burde et Neuwirth. H. Morton utilise la théorie des tresses.

Dans cet article, nous construisons de façon très élémentaire une famille de noeuds $K_m$, $(m=0, 1, 2, 3, \cdots)$, fibrés dans $S^3$, tous distincts, ayant pour polynôme d'Alexander $\Delta(t)^2$, où $\Delta(t)=1-t+t^2$.

Ces noeuds ont en plus la propriété d'être tous "ribbon" et sont donc tous cobordants à zéro.

Les modules d'Alexander de ces noeuds sont distincts sur $\mathbf{Z}T=\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ car leurs deuxièmes idéaux d'Alexander sont distincts. En revanche, pour $m \geqslant 1$, ils ont tous même module d'Alexander sur $\mathbf{Q}T$. Ainsi, pour $m \geqslant 1$, les noeuds $K_m$ ont même chaîne de polynômes: $\Delta_1=\Delta^2$, $\Delta_2=1$, et des chaînes d'idéaux distinctes.

Considérons la forme de Seifert associée à la surface minimale de $K_m$. Par [3], nous pouvons associer à chacune de ces formes un $(4q+1)$-noeud simple dans $S^{4q+3}(q \geqslant 1)$, qui est fibré puisque la forme de Seifert est unimodulaire. On obtient ainsi, pour $m \geqslant 1$, une famille infinie de noeuds simples fibrés de dimension $(4q+1)$, ayant tous $\Delta(t)^2$ pour polynôme minimal de la monodromie. Comme ce polynôme n'est pas semi-simple, notre résultat est en accord avec [1].

## 2. Construction du noeud $K_m$

Considérons la somme connexe du noeud de trèfle avec son image par une réflexion ("Square knot"). Considérons ensuite la portion hachurée de la surface de Seifert dessinée sur la figure 1 et remplaçons-la par un ruban qui effectue $m$ tours complets ($m$ entier $\geqslant 0$). Le cas $m=2$ est représenté sur la figure 2. On obtient ainsi le noeud $K_m$.

*N.B.*: $K_m$ n'est rien d'autre qu'une union symétrique au sens de [4].

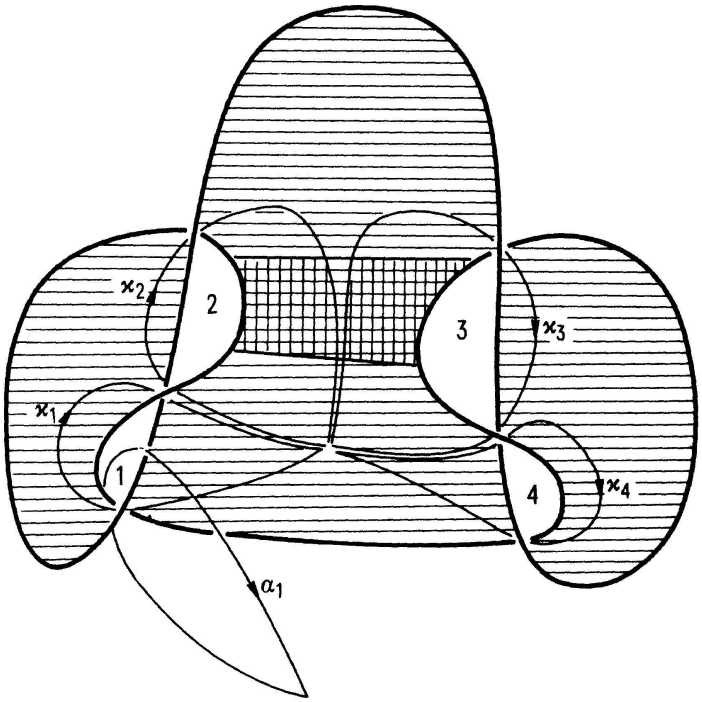


Figure 1.

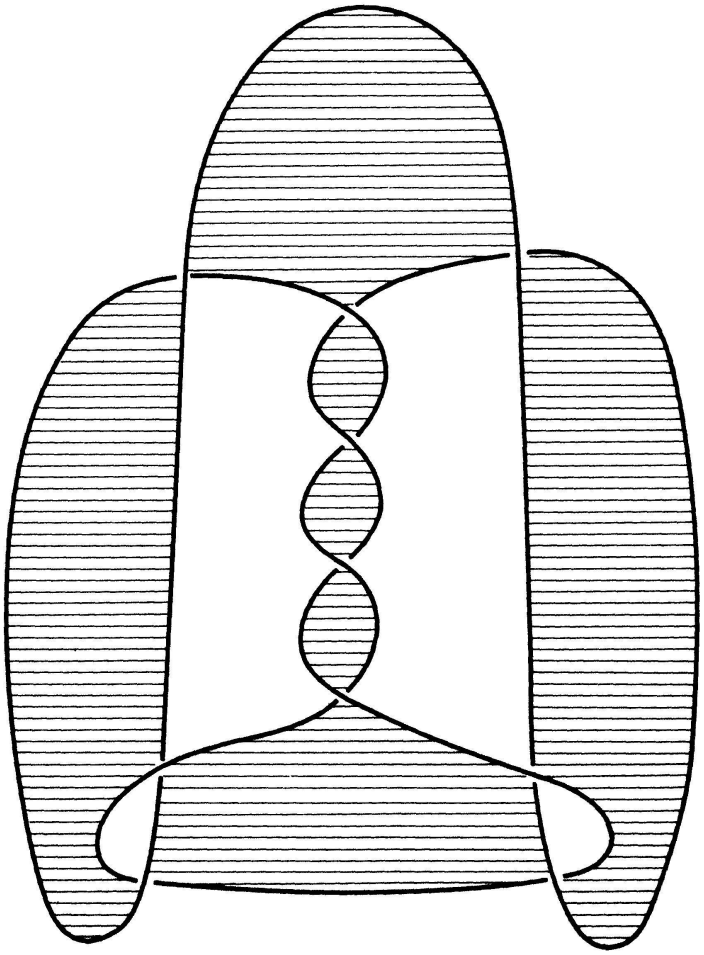

Figure 2.

THÉORÈME. *Pour tout* $m \geqslant 0$, $K_m$ *est un noeud fibré.*

*Note*: Ce théorème fut découvert par le premier des deux auteurs en essayant de montrer que le noeud $8_{20}$ se fibre. En fait $8_{20}$ est le noeud $K_1$ et $K_2$ est le noeud $10_{140}$ de la table de Rolfsen. Le même auteur espère donner un exposé plus systématique des méthodes utilisées ici dans une publication ultérieure.

*Preuve du théorème.* Considérons la base $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ du groupe fondamental de la surface de Seifert S dessinée sur la figure 1 dans le cas $m = 0$. (Rien d'essentiel ne change dans le cas général.)

La méthode de Dehn montre facilement que $\pi_1(S^3 - S)$ est libre de base $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ où $\alpha_i$ est le générateur de Dehn associé au $i^{\text{ème}}$ trou (voir figure 1).

Choisissons pour côté positif de S celui qui se trouve au-dessus du point-base.

Soit $i_+ : \pi_1(S) \to \pi_1(S^3 - S)$ l'homomorphisme obtenu en poussant $S$ dans $S^3 - S$ du côté positif de la surface.

On trouve pour le noeud $K_m$:

$$i_+(x_1) = \alpha_1, \qquad i_+(x_2) = \alpha_1^{-1}\alpha_2(\alpha_3^{-1}\alpha_2)^m,$$

$$i_+(x_3) = (\alpha_3^{-1}\alpha_2)^{-m}\alpha_3^{-1}\alpha_4, \qquad i_+(x_4) = \alpha_4^{-1}.$$

D'après [2], il suffit de voir que $i_+$ est surjectif pour conclure que $K_m$ se fibre. De toute évidence:

$$\alpha_1 \quad et \quad \alpha_4 \in I_m(i_+) \quad et \quad i_+(x_2x_3) = \alpha_1^{-1}\alpha_2\alpha_3^{-1}\alpha_4$$

Donc: $\alpha_2\alpha_3^{-1} \in I_m(i_+)$.

Les expressions calculées pour $i_+(x_2)$ et $i_+(x_3)$ montrent alors que $\alpha_2$ et $\alpha_3 \in I_m(i_+)$.

*N.B.*: Si l'on ne veut pas utiliser [2], il n'est pas difficile de voir directement que $i_+$ (et $i_-$) sont des isomorphismes. *C.q.f.d.*

## 3. Module d'Alexander du noeud $K_m$

Comme le coefficient d'enlacement de $x_i$ avec $\alpha_j$ est égal *à* $\delta_{ij}$ (symbole de Kronecker), les formules exprimant $i_+(x_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, donnent immédiatement (en permutant les $\alpha_j$) la matrice de Seifert $A$ associée aux choix que nous avons faits.

On trouve:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m+1 & -m & 0 \\ 0 & -m & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$tA-A^*=\begin{pmatrix} t-1 & -t & 0 & 0 \\ 1 & (m+1)(t-1) & m(1-t) & 0 \\ 0 & m(1-t) & (m-1)(t-1) & -1 \\ 0 & 0 & t & 1-t \end{pmatrix}$$

$A^*$ désigne la matrice transposée de $A$.

Classiquement, $tA-A^*$ est une matrice de présentation sur $\mathbf{Z}T$ du module d'Alexander $M_m$ du noeud $K_m$. Des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes montrent que l'on peut réduire cette matrice à la matrice suivante, où $\Delta(t)=1-t+t^2$:

$$\begin{pmatrix} \Delta & mt \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

Le polynôme d'Alexander de $K_m$ est donc $\Delta^2(t)$. Si $m=0$, on retrouve bien $M_0 \approx \mathbf{Z}T/_\Delta \oplus \mathbf{Z}T/_\Delta$. Si $m \geqslant 1$, $mt$ est une unité de $\mathbf{Q}T$. Ceci entraîne immédiatement que:

$$M_m \otimes \mathbf{Q} \approx \mathbf{Q}T/_{\Delta^2}$$

Ainsi, pour $m \geqslant 1$, $\Delta^2$ est le polynôme minimal de la monodromie.

Considérons maintenant l'idéal $I_m$ de $\mathbf{Z}T$ engendré par $\Delta$ et $mt$. (Par définition, il s'agit du deuxième idéal élémentaire de $M_m$.) Il est facile de voir que:

$\mathbf{Z}T/_{I_m} \approx \mathbf{Z}/_m \oplus \mathbf{Z}/_m$ comme groupes abéliens. Ceci montre que: si $m \neq m'$ alors $I_m \neq I_{m'}$ et donc $M_m \not\approx M_{m'}$. (D'où: $K_m \neq K_{m'}$).

De là découle par exemple; que $M_m$ est une somme directe de $\mathbf{Z}T$-modules cycliques si et seulement si $m$ est égal à 0 ou 1.

Comme $\mathbf{Q}T$-module, $\mathbf{Q}T/_{\Delta^2}$ est irréductible, c'est-à-dire: il n'est pas la somme directe de deux modules non triviaux. Ceci, plus le fait que $K_m$ est de

genre deux implique facilement que $K_m$ est un noeud premier si $m \geqslant 1$. Une consultation des tables permet alors de montrer (si elles sont complètes!), de façon purement calculatoire, que $K_1$ est le noeud $8_{20}$ et que $K_2$ est le noeud $10_{140}$ (numérotation de Rolfsen). On peut aussi le voir géométriquement.

Finalement, il n'est pas difficile de voir que $K_m$ est "ribbon" car $K_0$ l'est par construction et les torsions effectuées pour obtenir $K_m$ ne changent rien d'essentiel.

*Note*: Le professeur J. Stallings nour informe qu'il a obtenu essentiellement le même contre-exemple. Voir Proceedings Symposia in Pure Math. Vol. 32.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BAYER et F. MICHEL: *Finitude du nombre des classes d'isomorphisme des structures isométriques entières*, Comment. Math. Helv. *54* (1979).
[2] E. M. BROWN et R. H. CROWELL: *Deformation retractions of 3-manifolds into their boundaries*, Annals of Math. *82* (1965) 445–458.
[3] M. KERVAIRE: *Les noeuds de dimension supérieure*, Bull. Soc. Math. France *93* (1965) 225–271.
[4] S. KINOSHITA et H. TERESAKA: *On union of knots*. Osaka Math. J. *9* (1957) 131–153.
[5] H. MORTON: *Infinitely many fibered knots having the same Alexander polynomial*, Topology *17* (1978) 101–104.

*Section de mathématiques*
*Université de Genève*
2–4, *rue du Lièvre*
*Case postale* 124
1211-*Genève* 24.

Reçu le 30 novembre 1978