Über freie Untergruppen gegebener Gruppen.

Autor(en): **Stammbach, U.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **43 (1968)**

PDF erstellt am: **18.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-32912

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über freie Untergruppen gegebener Gruppen

U. STAMMBACH[1])

1. Einführung

STALLINGS zeigte in [7], Theorem 6.5, dass aus dem Verschwinden der 2. Homologiegruppe einer Gruppe G mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_p$ (dem Restklassenkörper zur Primzahl p) auf die Existenz von freien Untergruppen in G geschlossen werden kann. Nimmt man nämlich in G eine Menge von Elementen, deren kanonische Bilder in der 1. Homologiegruppe von G mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_p$ linear unabhängig sind, so erzeugen diese Elemente in G eine freie Untergruppe. Es gibt nun in der Präsentierungstheorie der Gruppen eine Reihe von Sätzen, die Aussagen über die Existenz von freien Untergruppen machen. Es liegt nahe zu fragen, welche dieser Sätze auch mit Hilfe des Verfahrens von Stallings bewiesen werden können. Diese Frage ist auch deshalb von besonderem Interesse, weil es auf diese Art gelingt, die umfangreichen und unübersichtlichen Rechnungen zu eliminieren, die in den üblichen Beweisen dieser Sätze auftreten. Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zur Beantwortung der oben gestellten Frage. Unser Hauptresultat ist das folgende (siehe Abschnitt 3):

Es sei G eine Gruppe mit $n+r$ Erzeugenden und r Relationen. Die 1. *Homologiegruppe von G mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_p$ (p prim oder $p=0$) werde durch n Elemente erzeugt. Dann enthält die Gruppe G eine freie Untergruppe mit n Erzeugenden.*

Ein erstes Korollar davon ist eine Verallgemeinerung eines Satzes aus der Präsentierungstheorie der Gruppen, der aus der speziellen Form einer Präsentierung folgert, dass gewisse der Erzeugenden eine freie Untergruppe erzeugen.

Ein zweites Korollar betrifft einen Satz von MAGNUS (s. [5], [9]): *Eine Gruppe G besitze eine Präsentierung mit $n+r$ Erzeugenden und r Relationen und auch eine Präsentierung mit n Erzeugenden. Dann ist G frei.*

Ferner lässt sich ein Teil (der leichter zu beweisende Teil) des sogenannten „Freiheitssatzes" von MAGNUS (s. [3]) ebenfalls als Korollar erhalten.

Ein weiteres Nebenresultat zeigt, dass die 2. Homologiegruppe einer Knotengruppe bezüglich einer beliebigen abelschen Koeffizientengruppe trivial ist.

2. Notation

G bezeichnet eine beliebige Gruppe. Eine exakte Sequenz von Gruppen $e \to R \to F \to G \to e$, wo F eine freie Gruppe ist, heisst eine *Präsentierung* von G. Ist F die freie

[1]) Der Verfasser ist Empfänger eines Stipendiums des Schweizerischen Nationalfonds.

Gruppe mit $n+r$ Erzeugenden und wird R als Normalteiler in F durch r Elemente erzeugt, so sagt man, G besitze eine *Präsentierung mit $n+r$ Erzeugenden und r Relationen.* p bezeichne im Folgenden entweder die Zahl 0 oder eine Primzahl. Ist U eine Untergruppe von G, so definieren wir $G \# {}_p U$ als *die* Untergruppe, die von allen Elementen der Form $gug^{-1}u^{-1}v^p$ mit $g \in G$, u, $v \in U$ erzeugt wird (vergl. [7]). Die Gruppen $G_k^{(p)}$ (p fest) definieren wir rekursiv wie folgt (verg. [7]):

$$G_0^{(p)} = G\,; \qquad G_{k+1}^{(p)} = G \# {}_p G_k^{(p)}.$$

Die Reihen $\{G_k^{(p)}\}$ (p fest) sind offensichtlich Zentralreihen: Für $p=0$ erhalten wir die übliche absteigende Zentralreihe; für $p=$Primzahl ergibt sich die am schnellsten absteigenden Zentralreihe, deren sukzessive Quotienten Vektorräume über dem Restklassenkörper $\mathbf{Z}_p$ sind. Ein Gruppenhomomorphismus $f: G \to H$ bildet $G_k^{(p)}$ in $H_k^{(p)}$ ab.

Unter $H_i(G, \mathbf{Z}_p)$ verstehen wir die i-te Homologiegruppe von G mit Koeffizienten in der additiven Gruppe von $\mathbf{Z}_p$ ($\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}$ bezeichnet den Ring der ganzen Zahlen), wobei G trivial auf $\mathbf{Z}_p$ operieren soll (für eine Definition der Homologiegruppen vergl. [1]). Speziell ist $H_1(G, \mathbf{Z}_p) \cong G/G \# {}_p G$ (s. [7]). Ist p eine Primzahl, so ist $H_i(G, \mathbf{Z}_p)$ bekanntlich ein Vektorraum über dem Restklassenkörper $\mathbf{Z}_p$. Unter der Dimension von $H_i(G, \mathbf{Z}_p)$ verstehen wir die Dimension dieses Vektorraumes.

3. Hauptsatz und Folgerungen

HAUPTSATZ. *Die Gruppe G besitze eine Präsentierung mit $n+r$ Erzeugenden und r Relationen. Für ein p (p prim oder $p=0$) werde $H_1(G, \mathbf{Z}_p) \cong G/G \# {}_p G$ durch n Elemente erzeugt. Dann gilt für dieses p:*

(a) *Ist p prim, so ist $H_1(G, \mathbf{Z}_p)$ von der Dimension n. Ist $p=0$, so ist $H_1(G, \mathbf{Z}_0)$ frei abelsch vom Rang n.*

(b) $H_2(G, \mathbf{Z}_p) = 0$.

(c) *Sind $x_1, \ldots, x_n$ Elemente aus G, deren kanonische Bilder in $G/G \# {}_p G$ eine Basis bilden, so erzeugen sie in G eine freie Untergruppe F.*

(d) *Die Einbettung $i: F \subset G$ induziert für alle $k \geqslant 0$ Isomorphismen*

$$i: F/F_k^{(p)} \cong G\ G_k^{(p)}.$$

Den Beweis dieses Satzes führen wir in Abschnitt 4. Vorerst aber wollen wir einige Folgerungen aus diesem Hauptsatz angeben.

Korollar 1 verallgemeinert Theorem 5.14 aus [6].

KOROLLAR 1. *Es sei $G = F/R$, wo F die freie Gruppe in $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_r$ bezeichnet und R in F von den Wörtern $b_i \varrho_i(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_r)$ ($i = 1, \ldots, r$) erzeugt wird. Die Wörter ϱ_i sollen in b_k die Exponentensumme $p \cdot t_{k_i}$ ($k = 1, \ldots, r$) aufweisen, wobei p eine Primzahl oder 0 ist. Dann erzeugen $a_1, \ldots, a_n$ eine freie Untergruppe F vom Rang n in*

G. Ausserdem induziert die Einbettung $i: F \to G$ für jedes $m \geqslant 0$ Isomorphismen

$$i: F/F_m^{(p)} \cong G/G_m^{(p)}.$$

Beweis: Die Gruppe $G/G \# {}_p G$ wird durch die Bilder von $a_1, \ldots, a_n$ erzeugt. Die Gruppe G und die Elemente $a_1, \ldots, a_n$ erfüllen also die Voraussetzungen des Hauptsatzes (c), woraus die Behauptung des obigen Korollars folgt.

Das nächste Korollar ist ein wohlbekannter Satz von MAGNUS [5]. Der Verfasser hat dafür bereits in [9] einen sehr einfachen Beweis angegeben, der ähnliche Methoden verwendet.

KOROLLAR 2. *Besitzt die Gruppe G eine Präsentierung mit $n+r$ Erzeugenden und r Relationen und besitzt sie auch eine Präsentierung mit n Erzeugenden, so ist G die freie Gruppe mit n Erzeugenden.*

Beweis: Die abelsch gemachte Gruppe $G/G \# {}_0 G$ wird durch die Bilder der n Erzeugenden $x_1, \ldots, x_n$ von G erzeugt. Die Bilder von $x_1, \ldots, x_n$ bilden also notwendigerweise eine Basis von $G/G \# {}_0 G$. Nach dem Hauptsatz, Abschnitt (c), ist G also frei.

KOROLLAR 3. *Es sei G eine Gruppe mit $n+1$ Erzeugenden $a_1, \ldots, a_n, b$ und einer Relation. Die Exponentensumme s von b in der Relation sei nicht 0. Dann erzeugen $a_1, \ldots, a_n$ eine freie Untergruppe F. Ist p eine Primzahl, die s nicht teilt, so induziert die Einbettung $i: F \to G$ für jedes $m \geqslant 0$ Isomorphismen*

$$i: F/F_m^{(p)} \cong G/G_m^{(p)}.$$

Beweis: Ist p eine Primzahl, die s nicht teilt, dann ist $H_1(G, \mathbf{Z}_p)$ von der Dimension n, und die Bilder von $a_1, \ldots, a_n$ in $H_1(G, \mathbf{Z}_p)$ bilden eine Basis. Die Voraussetzungen des Hauptsatzes sind folglich erfüllt, und die Behauptungen des Korollars folgen aus (c) und (d).

Bemerkung. Das obige Korollar ist ein Teil des berühmten „Freiheitssatzes" von MAGNUS [3]. Dieser sagt aus, dass die von $a_1, \ldots, a_n$ erzeugte Untergruppe frei ist, wenn b in der Relation „wirklich" vorkommt, d.h. wenn b aus der Relation durch Transformationen nicht entfernt werden kann. Der Freiheitssatz ist ein Beispiel eines Satzes, der *nicht* mit Hilfe des Verfahrens von Stallings bewiesen werden kann. Man zeigt nämlich leicht, dass die 2. Homologiegruppe einer Gruppe $G \cong F/(\varrho)$, wo ϱ in der Kommutatoruntergruppe von F liegt, für jedes p (prim oder 0) eine nicht triviale 2. Homologiegruppe besitzt (s. [8]).

Auch das nächste Korollar betrifft einen bereits bekannten Satz:

KOROLLAR 4. *Für eine Knotengruppe G ist die 2. Homologiegruppe bezüglich einer beliebigen abelschen Koeffizientengruppe trivial.*

Beweis: Nach [2] besitzt eine Knotengruppe G eine Präsentierung mit $1+r$ Erzeugenden und r Relationen. Ebenfalls nach [2] ist $H_1(G, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$. Mit unserem Hauptsatz folgt nun $H_2(G, \mathbf{Z})=0$. Mit dem universellen Koeffiziententheorem ergibt sich schliesslich $H_2(G, A)=H_2(G, \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} A=0$.

4. Beweis des Hauptsatzes

Wir entnehmen der bereits zitierten Arbeit von STALLINGS [7] oder einer Arbeit des Verfassers [8] die folgende exakte Sequenz, die einer Präsentierung $e \to R' \to F' \to G \to e$ von G zugeordnet ist (p prim oder $p=0$):

(I) $0 \to H_2(G, \mathbf{Z}_p) \to R'/F' \# {}_p R' \to H_1(F', \mathbf{Z}_p) \to H_1(G, \mathbf{Z}_p) \to 0$

Wir spalten (I) in zwei kurze exakte Sequenzen auf:

(II) $0 \to H_2(G, \mathbf{Z}_p) \to R'/F' \# {}_p R' \to A \to 0$

(III) $0 \to A \to H_1(F', \mathbf{Z}_p) \to H_1(G, \mathbf{Z}_p) \to 0$

Es sei nun im Folgenden $e \to R' \to F' \to G \to e$ eine Präsentierung mit $n+r$ Erzeugenden und r Relationen.

1) Wir behandeln zuerst den Fall $p=0$. Für $G \# {}_0 U$ schreiben wir hier wie üblich $[G, U]$. Wir betrachten zuerst die Sequenz (III). $H_1(F', \mathbf{Z})$ ist die freie abelsche Gruppe vom Rang $n+r$. Der Rang von $H_1(G, \mathbf{Z}) \cong G/[G, G]$ ist $\leqslant n$, da G laut Voraussetzung durch n Elemente erzeugt wird. Daraus folgt, dass der Rang von $A \geqslant r$ ist. Andererseits wird $R'/[F', R']$ durch r Elemente, nämlich die Relationen erzeugt. Also wird auch A als Quotient dieser Gruppe von r Elementen erzeugt. Daraus folgt

$$\operatorname{Rang} A = r.$$

Aus der Sequenz (III) erhält man nun: $\operatorname{Rang} G/[G, G]=n$, d.h. $G/[G, G]$ *ist frei abelsch mit n Erzeugenden.* Da A als Untergruppe einer freien abelschen Gruppe frei abelsch ist, zerfällt die Sequenz (II). Die Gruppe $R'/[F', R']$ enthält also die freie abelsche Gruppe A vom Rang r als direkten Summanden. Sie wird andererseits durch r Elemente erzeugt. Daraus folgt, dass $A=R'/[F', R']$ ist. Also gilt:

$$H_2(G, \mathbf{Z}) = 0.$$

Es sei nun weiter F die freie Gruppe mit den n Erzeugenden $y_1, \ldots, y_n$. Mit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ bezeichnen wir eine Menge von Elementen aus G, deren kanonische Bilder in $G/[G, G]$ eine Basis bilden. Dann induziert die Abbildung $\varphi: F \to G$, definiert durch $y_i \to x_i$ $(i=1, \ldots, n)$, offensichtlich einen Isomorphismus $\varphi: H_1(F, \mathbf{Z}) \cong H_1(G, \mathbf{Z})$ und einen Epimorphismus $\varphi: H_2(F, \mathbf{Z}) \to H_2(G, \mathbf{Z})$. Daraus folgt mit einem Satz von STALLINGS (s. [7], Theorem 3.4; [8], Satz II.2), dass φ Isomorphismen

$$\varphi: F/F_k^{(0)} \cong G/G_k^{(0)}$$

induziert. Ausserdem ist $\cap F_k^{(0)}=e$ (s. [4]). Somit induziert φ eine Einbettung $\varphi: F \subset G$.

Damit ist der Hauptsatz für $p=0$ bewiesen.

2) Es sei p eine Primzahl.

Auch $R'/F' \# {}_p R'$ ist als Quotient von $R'/[F', R']$ durch die r Relationen erzeugt. Daraus folgt genau wie oben, dass der $\mathbf{Z}_p$-Vektorraum A die Dimension r besitzt. Folglich ist einerseits $H_1(G, \mathbf{Z}_p)$ von der Dimension n und andererseits $H_2(G, \mathbf{Z}_p)=0$.

Nach einem Satz von STALLINGS (s. [7], Theorem 6.5) erzeugen dann Elemente von G, deren kanonische Bilder in $H_1(G, \mathbf{Z}_p)$ linear unabhängig sind, eine freie Untergruppe F in G. Ausserdem ergibt sich beim Beweis dieses Satzes von STALLINGS, dass φ für jedes $k \geqslant 0$ Isomorphismen

$$\varphi : F/F_k^{(p)} \cong G/G_k^{(p)}$$

induziert.

Damit ist der Hauptsatz auch für eine Primzahl p bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] CARTAN, H. und EILENBERG, S., *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press (1956).

[2] CROWELL, R. und FOX, R., *Introduction to Knot Theory*, Ginn and Company (1963).

[3] MAGNUS, W., *Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz)*, J. reine u. angew. Math. *163* (1930), 411–165.

[4] MAGNUS, W., *Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring*, Math. Ann., *111* (1935), 259–280.

[5] MAGNUS, W., *Über freie Faktorgruppen und freie Untergruppen gegebener Gruppen*, Monatshefte für Math. und Phys. *47* (1939), 307–313.

[6] MAGNUS, KARRAS, SOLITAR, *Combinatorial Group Theory*, Wiley (1965).

[7] STALLINGS, J., *Homology and Central Series of Groups*, J. of Algebra, *2* (1965), 170–181.

[8] STAMMBACH, U., *Anwendungen der Homologietheorie der Gruppen auf Zentralreihen und auf Invarianten von Präsentierungen*, Math. Z. *94* (1966), 157–177.

[9] STAMMBACH, U., *Ein neuer Beweis eines Satzes von Magnus*, wird in Proc. Cambridge Phil. Soc. erscheinen.

Eingegangen den 3. Juli 1967.

Forschungsinstitut für Mathematik der E.T.H., 8006 Zürich