Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 43 (1968)

Artikel: Groupes d'homotopie des variétés de Stiefel complexes.
Autor: Sigrist, Francois
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32911

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Groupes d'homotopie des variétés de Stiefel complexes

par FRANÇOIS SIGRIST[1])

Introduction

Le but de ce travail est la détermination des groupes $\pi_{2k+p}(U_{k+m,m})$ pour $0 \leqslant p \leqslant 6$. Rappelons que $U_{k+m,m}$ est la variété des $(k+m) \times m$ matrices unitaires. Les résultats se déduisent principalement de la suite exacte d'homotopie associée à la fibration $U_{n-l,m-l} \to U_{n,m} \to U_{n,l}$. Au § 1, l'utilisation systématique d'une formule d'ECKMANN pour les espaces fibrés à base sphérique permet de déterminer les groupes d'homotopie de $U_{n,2}$. Rappelons le résultat d'ECKMANN: Soit $F \to E \to S^m$ une fibration de base sphérique, et soit $\partial(1)$ l'image du générateur de $\pi_m(S^m)$ par l'homomorphisme $\partial: \pi_m(S^m) \to \pi_{m-1}(F)$. La connaissance de $\partial(1)$ permet d'évaluer $\partial: \pi_i(S^m) \to \pi_{i-1}(F)$ sur toutes les suspensions, grâce à la formule $\partial(\Sigma\alpha) = \partial(1) \circ \alpha$. Appliquée à la fibration $S^{2n-3} \to U_{n,2} \to S^{2n-1}$, la formule ramène la détermination des groupes d'homotopie de $U_{n,2}$ à l'étude des compositions pour les applications sphériques, effectuée principalement par TODA.

Le § 2 traite des groupes d'homotopie de $U_{n,3}$ et $U_{n,4}$. L'application des suites exactes d'homotopie ramène la détermination des groupes d'homotopie à celle des invariants $U(n, k)$ de JAMES: Si l'on considère la fibration $U_{n-1,k-1} \to U_{n,k} \to S^{2n-1}$, l'ordre de $\partial(1)$ dans $\pi_{2n-2}(U_{n-1,k-1})$ est appelé nombre de JAMES $U(n, k)$. Une étude systématique du système de nombres $U(n, k)$ est due à JAMES: à l'aide des propriétés démontrées dans le travail de JAMES, il est possible de déterminer presque toutes les valeurs de $U(n, 3)$ et $U(n, 4)$. La K-théorie des variétés de STIEFEL complexes, étudiée par ATIYAH et TODD, permet enfin, à l'aide des théorèmes d'intégralité, d'achever complètement la détermination des groups $\pi_{2k+p}(U_{k+m,m})$, $0 \leqslant p \leqslant 6$.

§ 1. Les groupes d'homotopie de $U_{n,2}$

Nous utiliserons la suite exacte d'homotopie de la fibration $S^{2n-3} \to U_{n,2} \to S^{2n-1}$. Pour n pair, cette fibration a une section bien connue, donc $\pi_i(U_{n,2}) \cong \pi_i(S^{2n-1}) \oplus \pi_i(S^{2n-3})$. A l'aide des valeurs connues des groupes d'homotopie des sphères, on obtient alors:

---

[1]) L'auteur tient à remercier vivement MM. les professeurs B. ECKMANN et P. J. HILTON pour leurs suggestions enrichissantes au cours de la rédaction de ce travail.

n pair	$n=2$	$n=4$	$n \geqslant 6$
$\pi_{2n-4}(U_{n,2})$	0	0	0
$\pi_{2n-3}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$
$\pi_{2n-2}(U_{n,2})$	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$
$\pi_{2n-1}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2$
$\pi_{2n}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_{24}$	$\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_{24}$
$\pi_{2n+1}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$
$\pi_{2n+2}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}_{24}+\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{24}$
$\pi_{2n+3}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$
$\pi_{2n+4}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{30}$	$\mathbf{Z}_{240}$

Pour n impair, la fibration $S^{2n-3} \to U_{n,2} \to S^{2n-1}$ n'a pas de section. La théorème d'ECKMANN [4] affirme en effet: pour n impair, l'homomorphisme $\partial: \pi_{2n-1}(S^{2n-1}) \to \pi_{2n-2}(S^{2n-3})$ n'est pas trivial, $\partial(1)$ est l'application essentielle $S^{2n-2} \to S^{2n-3}$ obtenue en prenant la $(2n-5)$-ième suspension de l'application de HOPF $p: S^3 \to S^2$. Les homomorphismes $\partial: \pi_i(S^{2n-1}) \to \pi_{i-1}(S^{2n-3})$ peuvent être évalués sur les suspensions à l'aide d'une formule d'ECKMANN [3]: $\partial(\Sigma\alpha) = \partial(1) \circ \alpha$. Cette formule nous permettra de déterminer ∂ pour toutes les valeurs de i inférieures à $(2n+6)$. Nous écrivons $p: S^3 \to S^2$ et $q: S^7 \to S^4$ pour les applications de HOPF. La référence [HU] se rapporte au livre de S. T. HU: *Homotopy theory* (Academic Press, New York-London) et la référence [TODA] au livre de H. TODA: *Composition methods in homotopy groups of spheres* (Princeton University Press).

Dimension $2n-1$

$\pi_{2n-1}(S^{2n-1}) = \mathbf{Z}$ générateur 1

$\pi_{2n-2}(S^{2n-3}) = \mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma^{2n-5}p$

$\partial(1) = \Sigma^{2n-5}p$, [ECKMANN [4]]

∂ est un épimorphisme.

Dimension $2n$

$\pi_{2n}(S^{2n-1}) = \mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma^{2n-3}p$

$\pi_{2n-1}(S^{2n-3}) = \mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma^{2n-5}(p \circ \Sigma p)$ [HU, p. 328]

$\partial(\Sigma^{2n-3}) = \Sigma^{2n-5}p \circ \Sigma^{2n-4}p = \Sigma^{2n-5}(p \circ \Sigma p)$,

∂ est un isomorphisme.

Dimension $2n+1$

$n=3$ $\pi_7(S^5) = \mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma^3(p \circ \Sigma p)$

$\pi_6(S^3) = \mathbf{Z}_{12}$ [HU, p. 329]

$\partial(\Sigma^3(p \circ \Sigma p)) = \Sigma p \circ (\Sigma^2(p \circ \Sigma p)) = \Sigma p \circ \Sigma^2 p \circ \Sigma^3 p$,

élément d'ordre 2. [HU, p. 329]

$n \geqslant 5 \quad \pi_{2n+1}(S^{2n-1}) = \mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma^{2n-3}(p \circ \Sigma p)$

$\pi_{2n}(S^{2n-3}) = \mathbf{Z}_{24}$ générateur $\Sigma^{2n-7} q$ [HU, p. 330]

$\partial(\Sigma^{2n-3}(p \circ \Sigma p)) = \Sigma^{2n-5} p \circ \Sigma^{2n-4}(p \circ \Sigma p) = \Sigma^{2n-5}(p \circ \Sigma p \circ \Sigma^2 p) = 12\, \Sigma^{2n-7} q$

[TODA, p. 190]

∂ est un monomorphisme.

Dimension $2n+2$

$n=3 \quad \pi_8(S^5) = \mathbf{Z}_{24}$ générateur Σq [HU, p. 330]

$\pi_7(S^3) = \mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma p \circ q$ [HILTON [6]]

$\partial(\Sigma q) = \Sigma p \circ q$,

∂ est un épimorphisme.

$n \geqslant 5 \quad \pi_{2n+2}(S^{2n-1}) = \mathbf{Z}_{24}$ générateur $\Sigma^{2n-5} q$

$\pi_{2n+1}(S^{2n-3}) = 0$ [HU, p. 331]

Dimension $2n+3$

$n=3 \quad \pi_9(S^5) = \mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma(q \circ \Sigma^5 p)$ [HU, p. 331]

$\pi_8(S^3) = \mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma p \circ q \circ \Sigma^5 p$ [HU, p. 330, TODA, p. 42, HILTON [6]]

$\partial(\Sigma(q \circ \Sigma^5 p)) = \Sigma p \circ q \circ \Sigma^5 p$,

∂ est un isomorphisme.

$n \geqslant 5 \quad \pi_{2n+3}(S^{2n-1}) = 0$ [HU, p. 331]

$\pi_{2n+2}(S^{2n-3}) = 0$ [HU, p. 332]

Dimension $2n+4$

$n=3 \quad \pi_{10}(S^5) = \mathbf{Z}_2$ [HU, p. 332]

$\pi_9(S^3) = \mathbf{Z}_3$ [HU, p. 332]

∂ est trivial.

$n \geqslant 5 \quad \pi_{2n+4}(S^{2n-1}) = 0$ [HU, p. 332]

$\pi_{2n+3}(S^{2n-3}) = \mathbf{Z}_2$ [HU, p. 332]

Dimension $2n+5$

$n=3 \quad \pi_{11}(S^5) = \mathbf{Z}_2$

$\pi_{10}(S^3) = \mathbf{Z}_{15}$

∂ est trivial.

$n=5 \quad \pi_{15}(S^9) = \mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma^5(q \circ \Sigma^3 q)$ [TODA, p. 189]

$\pi_{14}(S^7) = \mathbf{Z}_{120}$ [HU, p. 332]

$\partial(\Sigma^5(q \circ \Sigma^3 q) = \Sigma^5 p \circ \Sigma^4 q \circ \Sigma^7 q = 0$ puisque $\Sigma^5 p \circ \Sigma^4 q = 0 : S^{11} \to S^7$

$n \geqslant 7 \quad \pi_{2n+5}(S^{2n-1}) = \mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma^{2n-5}(q \circ \Sigma^3 q)$ [TODA, p. 189]

$\pi_{2n+4}(S^{2n-3}) = \mathbf{Z}_{240}$ [HU, p. 332]

$\partial(\Sigma^{2n-5}(q \circ \Sigma^3 q)) = \Sigma^{2n-5} p \circ \Sigma^{2n-6} q \circ \Sigma^{2n-3} q = 0$

puisque $\Sigma^{2n-5} p \circ \Sigma^{2n-6} q = 0 : S^{2n+1} \to S^{2n-3}$.

La suite exacte d'homotopie de $S^{2n-3} \to U_{n,2} \to S^{2n-1}$ fournit alors les valeurs suivantes des groupes d'homotopie de $U_{n,2}$, pour n impair:

n impair	$n=3$	$n=5$	$n\geqslant 7$
$\pi_{2n-4}(U_{n,2})$	0	0	0
$\pi_{2n-3}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$
$\pi_{2n-2}(U_{n,2})$	0	0	0
$\pi_{2n-1}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$
$\pi_{2n}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_6$	$\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}_{12}$
$\pi_{2n+1}(U_{n,2})$	0	0	0
$\pi_{2n+2}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}_{24}$	$\mathbf{Z}_{24}$
$\pi_{2n+3}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$
$\pi_{2n+4}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_{30}$	$\mathbf{Z}_{120}$	$\mathbf{Z}_{240}$

§ 2. Quelques groupes d'homotopie de $U_{n,3}$ et $U_{n,4}$

Les groupes d'homotopie de $U_{3,3}=U(3)$ se déterminent à l'aide de la fibration $S^1\to U_{3,3}\to U_{3,2}$. On obtient alors:

$$\pi_1(U_{3,3})=\mathbf{Z} \qquad \pi_i(U_{3,3})\cong\pi_i(U_{3,2}) \qquad i>1$$

De façon analogue, la fibration $U_{n-1,2}\to U_{n,3}\to S^{2n-1}$ montre que $\pi_i(U_{n,3})\cong\pi_i(U_{n-1,2})$ pour $i<2n-2$. Le calcul de ces groupes se ramène aux résultats du paragraphe précédent. Nous envisageons maintenant les cas $n=4$ et $n=5$ séparément. $U_{4,3}=SU(4)$. D'après les théorèmes de BOTT [2], les groupes d'homotopie sont donnés par

$$\begin{aligned}\pi_6(U_{4,3})&=\pi_6(SU(4))=0\\ \pi_7(U_{4,3})&=\pi_7(SU(4))=\mathbf{Z}\\ \pi_8(U_{4,3})&=\pi_8(SU(4))=\mathbf{Z}_{24}\end{aligned}$$

Pour $n=5$ nous considérons tout d'abord la suite exacte de $U(5)\to U(7)\to U_{7,2}$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}\to & \pi_{12}(U(7)) & \to & \pi_{12}(U_{7,2}) & \to & \pi_{11}(U(5)) & \to & \pi_{11}(U(7)) & \to & \pi_{11}(U_{7,2}) & \to & \pi_{10}(U(5))\\ \to & 0 & \to & 0 & \to & \pi_{11}(U(5)) & \to & \mathbf{Z} & \to & \mathbf{Z} & \to & \mathbf{Z}_{120}\end{array}$$

Cette suite exacte fournit $\pi_{11}(U(5))=0$.
La suite exacte de $U_{4,2}\to U_{5,3}\to S^9$:

$$\begin{array}{ccccccc}\to & \pi_{11}(U_{4,2}) & \to & \pi_{11}(U_{5,3}) & \to & \pi_{11}(S^9) & \to\\ \to & \mathbf{Z}_2 & \to & \pi_{11}(U_{5,3}) & \to & \mathbf{Z}_2 & \to\end{array}$$

montre que l'ordre de $\pi_{11}(U_{5,3})$ est une puissance de 2.

La suite exacte d'homotopie de $U(2)\to U(5)\to U_{5,3}$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}\pi_{11}(U(5)) & \to & \pi_{11}(U_{5,3}) & \to & \pi_{10}(U(2)) & \to & \pi_{10}(U(5)) & \to & \pi_{10}(U_{5,3}) & \to & \pi_9(U(2)) & \to & \\ \to\ \pi_9(U(5)) & \to & \pi_9(U_{5,3}) & \to & \pi_8(U(2)) & \to & \pi_8(U(5)) & \to & \pi_8(U_{5,3}) & \to & \pi_7(U(2)) & \to & \pi_7(U(5))\\ 0 & \to & \pi_{11}(U_{5,3}) & \to & \mathbf{Z}_{15} & \to & \mathbf{Z}_{120} & \to & \pi_{10}(U_{5,3}) & \to & \mathbf{Z}_3 & \to & \\ \to\ \mathbf{Z} & \to & \pi_9(U_{5,3}) & \to & \mathbf{Z}_2 & \to & 0 & \to & \pi_8(U_{5,3}) & \to & \mathbf{Z}_2 & \to & \mathbf{Z}\end{array}$$

fournit, puisque $\pi_{11}(U_{5,3})$ est un 2-groupe:

$$\begin{aligned} \pi_{11}(U_{5,3}) &= 0 \\ \pi_{10}(U_{5,3}) &= \mathbf{Z}_{24} \\ \pi_9(U_{5,3}) &= \mathbf{Z} \quad \text{ou} \quad \mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2 \\ \pi_8(U_{5,3}) &= \mathbf{Z}_2 \end{aligned}$$

La détermination de $\pi_9(U_{5,3})$ s'effectue à l'aide de la fibration $U_{4,2} \to U_{5,3} \to S^9$:

$$\begin{array}{ccccccc} \to & \pi_{10}(S^9) & \to & \pi_9(U_{4,2}) & \to & \pi_9(U_{5,3}) & \to \pi_9(S^9) \\ \to & \mathbf{Z}_2 & \to & \mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_2 & \to & \pi_9(U_{5,3}) & \to \quad \mathbf{Z} \end{array}$$

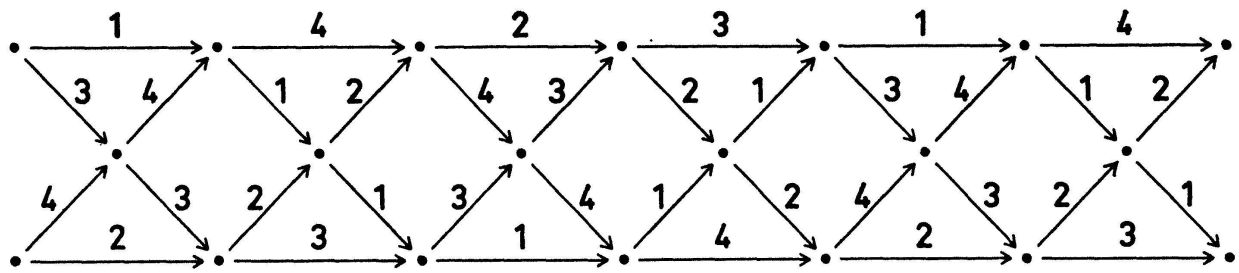
On voit que $\pi_9(U_{5,3})$ ne peut pas être isomorphe à $\mathbf{Z}$, donc

$$\pi_9(U_{5,3}) \cong \mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2$$

Avant d'envisager les autres cas, introduisons la notation suivante, due à JAMES [8]: dans la suite exacte d'homotopie de la fibration $U_{n,k} \xrightarrow{p} S^{2n-1}$, l'image de $\pi_{2n-1}(U_{n,k}) \xrightarrow{p^*} \pi_{2n-1}(S^{2n-1}) = \mathbf{Z}$ est caractérisée par un nombre entier $U(n, k)$ que nous appellerons nombre de JAMES de $U_{n,k}$. La détermination des nombres $U(n, 3)$ et $U(n, 4)$ est renvoyée au prochain paragraphe (§3). Dans la suite de ce paragraphe, nous utiliserons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} S^{2n-5} & \to & S^{2n-5} & \to & * \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U_{n-1,2} & \to & U_{n,3} & \to & S^{2n-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^{2n-3} & \to & U_{n,2} & \to & S^{2n-1} \end{array}$$

Le diagramme contient quatre fibrations. Les quatre suites exactes d'homotopie correspondantes (1, 2, 3 et 4) se groupent en une „tresse" exacte



où tous les carrés et tous les triangles sont commutatifs. Un tel diagramme de suites exactes a reçu le nom de „rolling stone diagram" (ECKMANN et HILTON [5]).

Le fait que les variétés de STIEFEL associées comme ci-dessus donnent lieu à une tresse exacte a été démontré par JAMES [7].

La partie suivante de la tresse exacte

$$\begin{tikzcd}
\pi_{2n-1}(S^{2n-5}) \arrow[r] & \pi_{2n-1}(U_{n,3}) \arrow[r] & \pi_{2n-1}(S^{2n-1}) \arrow[r] & \pi_{2n-2}(S^{2n-3}) \arrow[r] & \pi_{2n-3}(S^{2n-5}) \\
& \pi_{2n-1}(U_{n-1,2}) \arrow[ul] \arrow[ur] & \pi_{2n-1}(U_{n,2}) \arrow[ul] \arrow[ur] & \pi_{2n-2}(U_{n-1,2}) \arrow[ul] \arrow[ur] & \pi_{2n-2}(U_{n,2}) \arrow[ul] \arrow[ur] \\
\pi_{2n}(S^{2n-1}) \arrow[r] & \pi_{2n-1}(S^{2n-3}) \arrow[r] \arrow[ul] \arrow[ur] & \pi_{2n-2}(S^{2n-5}) \arrow[r] \arrow[ul] \arrow[ur] & \pi_{2n-2}(U_{n,3}) \arrow[r] \arrow[ul] \arrow[ur] & \pi_{2n-2}(S^{2n-1}) \arrow[ul] \arrow[ur]
\end{tikzcd}$$

fournit pour n pair $\geqslant 6$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_{2n-1}(U_{n,3}) \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[r] & \mathbf{Z}_2 \arrow[r] & \mathbf{Z}_2 \\
& 0 \arrow[ul] \arrow[ur] & \mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & \mathbf{Z}_{12} \arrow[ul] \arrow[ur] & \mathbf{Z}_2 \arrow[ul] \arrow[ur] \\
\mathbf{Z}_2 \arrow[r] & \mathbf{Z}_2 \arrow[r] \arrow[ul] \arrow[ur] & \mathbf{Z}_{24} \arrow[r] \arrow[ul] \arrow[ur] & \pi_{2n-2}(U_{n,3}) \arrow[r] \arrow[ul] \arrow[ur] & 0 \arrow[ul] \arrow[ur]
\end{tikzcd}$$

et par conséquent

$$\pi_{2n-1}(U_{n,3}) = \mathbf{Z} \qquad \pi_{2n-2}(U_{n,3}) = \mathbf{Z}_{\frac{12}{U(n,3)}}$$

Pour n impair $\geqslant 7$,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_{2n-1}(U_{n,3}) \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[r] & \mathbf{Z}_2 \arrow[r] & \mathbf{Z}_2 \\
& \mathbf{Z}_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & \mathbf{Z} \arrow[ul] \arrow[ur] & \mathbf{Z}_{24}+\mathbf{Z}_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & 0 \arrow[ul] \arrow[ur] \\
\mathbf{Z}_2 \arrow[r] & \mathbf{Z}_2 \arrow[r] \arrow[ul] \arrow[ur] & \mathbf{Z}_{24} \arrow[r] \arrow[ul] \arrow[ur] & \pi_{2n-2}(U_{n,3}) \arrow[r] \arrow[ul] \arrow[ur] & 0 \arrow[ul] \arrow[ur]
\end{tikzcd}$$

on obtient

$$\pi_{2n-1}(U_{n,3}) = \mathbf{Z} \qquad \pi_{2n-2}(U_{n,3}) = \mathbf{Z}_{\frac{48}{U(n,3)}}$$

Remarquons ensuite que la suite exacte, (pour $n \geqslant 6$)

$$\begin{array}{cccccccc}
\pi_{2n}(S^{2n-5}) & \to & \pi_{2n}(U_{n,3}) & \to & \pi_{2n}(U_{n,2}) & \to & \pi_{2n-1}(S^{2n-5}) \\
0 & \to & \pi_{2n}(U_{n,3}) & \to & \pi_{2n}(U_{n,2}) & \to & 0
\end{array}$$

fournit la valeur du groupe $\pi_{2n}(U_{n,3})$.

Nous avons encore besoin de déterminer le groupe $\pi_{2n-2}(U_{n,4})$:

Pour $n=4$, $\pi_6(U(4))=0$ d'après le théorème de BOTT.

Pour $n=5$, $\pi_8(U_{5,4})=0$ également d'après le théorème de BOTT.

Pour $n=6$, la fibration $SU(2) \to SU(6) \to U_{6,4}$ fournit

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_{10}(SU(6)) & \to & \pi_{10}(U_{6,4}) & \to & \pi_9(SU(2)) & \to & \pi_9(SU(6)) \\
0 & \to & \pi_{10}(U_{6,4}) & \to & \mathbf{Z}_3 & \to & \mathbf{Z}
\end{array}$$

et par conséquent $\pi_{10}(U_{6,4}) = \mathbf{Z}_3$.

Pour $n \geqslant 7$ la fibration $S^{2n-7} \to U_{n,4} \to U_{n,3}$ fournit

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{2n-2}(S^{2n-7}) & \to & \pi_{2n-2}(U_{n,4}) & \to & \pi_{2n-2}(U_{n,3}) & \to & \pi_{2n-3}(S^{2n-7}) \\ 0 & \to & \pi_{2n-2}(U_{n,4}) & \to & \pi_{2n-2}(U_{n,3}) & \to & 0 \end{array}$$

donc $\pi_{2n-2}(U_{n,4}) \cong \pi_{2n-2}(U_{n,3})$, groupe que nous avons déjà déterminé.

Nous pouvons alors dresser une table des groupes d'homotopie $\pi_{2k+p}(U_{k+m})$ pour $0 \leqslant p \leqslant 6$, en remarquant que la fibration $U_{k+m,m} \to U_{k+m+1,m+1} \to S^{2k+2m+1}$ montre que le groupe $\pi_{2k+p}(U_{k+m,m})$ est indépendant de m sitôt que $2m > p$.

Table des groupes $\pi_{2k+p}(U_{k+m,m})$

	$m \backslash k$	0	1	2	$2s+3$	$2s+4$
$p=0$		0	0	0	0	0
$p=1$		$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$
$p=2$	1	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$
	$\geqslant 2$	0	0	$\mathbf{Z}_2$	0	$\mathbf{Z}_2$
$p=3$	1	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$
	$\geqslant 2$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2$
$p=4$	1	0	$\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}_{24}$	$\mathbf{Z}_{24}$	$\mathbf{Z}_{24}$
	2	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_6$	$\mathbf{Z}_{24}+\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}_{24}+\mathbf{Z}_2$
	$\geqslant 3$	0	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{\frac{12}{U(2s+6,3)}}$	$\mathbf{Z}_{\frac{48}{U(2s+7,3)}}$
$p=5$	1	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	0	0
	2	$\mathbf{Z}_2$	0	$\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_2$	0	$\mathbf{Z}_2$
	$\geqslant 3$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$
$p=6$	1	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	0	0
	2	$\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}_{24}+\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{24}$	$\mathbf{Z}_{24}$
	3	$\mathbf{Z}_6$	$\mathbf{Z}_{24}$	$\mathbf{Z}_{24}$	$\mathbf{Z}_{24}+\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{12}$
	$\geqslant 4$	0	0	$\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}_{\frac{48}{U(2s+7,3)}}$	$\mathbf{Z}_{\frac{12}{U(2s+8,3)}}$

Nous calculerons les valeurs de $U(n, 3)$ dans le prochain paragraphe, Celles-ci sont:

$n \equiv (\mathrm{mod}\ 24)$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$U(n, 3)$	2	6	24	4	12	3	8	12	6	2	24	12
$n \equiv (\mathrm{mod}\ 24)$	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$U(n, 3)$	4	3	24	4	6	6	8	12	12	1	24	12

§ 3. Détermination des nombres de James $U(n, 3)$ et $U(n, 4)$

Rappelons la définition de $U(n, k)$: c'est l'ordre de $\partial(1)$ dans $\pi_{2n-2}(U_{n-1,k-1})$, où ∂ est l'opérateur bord de la suite exacte de la fibration $U_{n-1,k-1} \to U_{n,k} \to S^{2n-1}$. JAMES a établi dans [8] un grand nombre de propriétés des nombres $U(n, k)$. Nous n'en retiendrons qu'une partie, nécessaire à la détermination des valeurs de $U(n, 3)$.

Théorèmes de JAMES [8]:

(0) $U(m, k)$ est multiple de $U(m, l)$ pour $l \leqslant k$

(I) $U(n, k)\ U(m, k)$ est un multiple de $U(m+n, k)$

(II) Soit b_k la plus petite valeur de m pour laquelle $U(m, k)=1$. Alors $U(n, k)=1 \Leftrightarrow n$ est un multiple de b_k.

(III) $U(mb_k, k+1)\cdot(mb_k, b_{k+1})=b_{k+1}$
((p, q) désigne le plus grand commun diviseur de p et de q.)

(IV) Si $m \geqslant 2k-1$ et $U(n, k)=1$ alors $U(m, k)=U(m+n, k)$

Les nombres $U(n, k)$ sont connus pour $k=1, 2, (n-1), n$. Ce sont

$U(n, 1) \quad =1$

$U(n, 2) \quad =\begin{cases} 1 & \text{pour } n \text{ pair} \\ 2 & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$ (Théorème d'ECKMANN [4])

$U(n, n-1)=U(n, n)=(n-1)!$ (Théorème de BOTT [2])

Nous allons maintenant déterminer les valeurs de $U(n, 3)$. Puisque $b_2=2$, et $U(4, 3)=6$, le théorème III de James fournit $6(4, b_3)=b_3$ d'où $b_3=24$, et par conséquent $U(2m, 3)=12/(m, 12)$. Pour n pair, les valeurs de $U(n, 3)$ sont donc connues, et sont périodiques de période 24:

$n \equiv (\mathrm{mod}\ 24)$	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
$U(n, 3)$	6	4	3	12	2	12	3	4	6	12	1	12

Pour n impair, une utilisation systématique du théorème I de JAMES fournit, à l'aide de $U(3, 3)=2$:

$n \equiv 3 \bmod 24$

$U(27, 3)$ est multiple de $2=U(27, 2)$

$U(27, 3)$ est diviseur de $2=U(24, 3)\cdot U(3, 3)$

$U(27, 3)=2$ et $U(24q+3, 3)=2$ à l'aide de (IV)

$n \equiv 11 \bmod 24$

$U(11, 3)$ est un diviseur de $U(8, 3) \cdot U(3, 3) = 6$

$U(11, 3) \cdot U(3, 3) = 2 \cdot U(11, 3)$ est un multiple de $U(14, 3) = 12$

Donc $U(24q+11, 3) = 6$

$n \equiv 19 \bmod 24$

$U(19, 3)$ est un diviseur de $U(16, 3) \cdot U(3, 3) = 6$

$U(19, 3) \cdot U(3, 3) = 2 \cdot U(19, 3)$ est un multiple de $U(22, 3) = 12$

Donc $U(24q+19, 3) = 6$

$n \equiv 5 \bmod 24$

Nous utiliserons les résultats du § 2. La suite exacte d'homotopie de $U_{4,2} \to U_{5,3} \to S^9$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_9(U_{5,3}) & \to & \pi_9(S^9) & \xrightarrow{\partial} & \pi_8(U_{4,2}) & \to & \pi_8(U_{5,3}) & \to & \pi_8(S^9) \\ \mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2 & \to & \mathbf{Z} & \to & \mathbf{Z}_{24}+\mathbf{Z}_2 & \to & \mathbf{Z}_2 & \to & 0 \end{array}$$

fournit $U(5, 3) = 24$ donc $U(24q+5, 3) = 24$

$n \equiv 21 \bmod 24$

$U(21, 3)$ est un diviseur de $U(18, 3) \cdot U(3, 3) = 8$

$U(21, 3) \cdot U(8, 3) = 3 \cdot U(21, 3)$ est un multiple de $U(29, 3) = U(5, 3) = 24$

Donc $U(24q+21) = 8$

$n \equiv 13 \bmod 24$

$U(13, 3)$ est un diviseur de $U(10, 3) \cdot U(3, 3) = 24$

$U(13, 3) \cdot U(3, 3) = 2 \cdot U(13, 3)$ est un multiple de $U(16, 3) = 3$

$U(13, 3) \cdot U(8, 3) = 3 \cdot U(13, 3)$ est un multiple de $U(21, 3) = 8$

Donc $U(24q+13, 3) = 24$

Les valeurs suivantes de $U(n, 3)$ ne peuvent pas être entièrement déterminées à l'aide des résultats de JAMES; on obtient cependant:

$n \equiv 7 \bmod 24$

$U(7, 3)$ est un diviseur de $U(4, 3) \cdot U(3, 3) = 12$

$n \equiv 9 \bmod 24$

$U(9, 3)$ est un diviseur de $U(6, 3) \cdot U(3, 3) = 8$

$n \equiv 15 \bmod 24$

$U(15, 3)$ est un diviseur de $U(12, 3) \cdot U(3, 3) = 4$

$n \equiv 17 \bmod 24$

$U(17, 3)$ est un diviseur de $U(14, 3) \cdot U(3, 3) = 24$

$n \equiv 23 \bmod 24$

$U(23, 3)$ est un diviseur de $U(20, 3) \cdot U(3, 3) = 12$

$n \equiv 25 \bmod 24$

$U(25, 3)$ est un diviseur de $U(22, 3) \cdot U(3, 3) = 24$

Pour achever la détermination des nombres $U(n, 3)$, nous remarquerons tout d'abord que $U(4, 3) = U(4, 4) = 6$, $U(5, 3) = U(5, 4) = 24$, et que, pour $n \geqslant 6$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\pi_{2n-1}(U_{n,4}) \arrow[r] \arrow[dr] & \pi_{2n-1}(S^{2n-1}) \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dr, "\partial"] & & \pi_{2n-2}(U_{n-1,2}) \arrow[r] & \pi_{2n-3}(S^{2n-7}) \\
& \pi_{2n-1}(U_{n,3}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \pi_{2n-2}(U_{n-1,3}) \arrow[ur] & \\
& & \pi_{2n-2}(S^{2n-7}) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

montre que $U(n, 3) = U(n, 4)$ puisque $\pi_{2n-2}(S^{2n-7}) \cong 0$. On a donc $U(n, 3) = U(n, 4)$ pour tout n.

ATIYAH et TODD [1] ont calculé le caractère de CHERN des variétés de STIEFEL complexes. Les théorèmes d'intégralité de ATIYAH et HIRZEBRUCH permettent de formuler la propriété suivante: Soit $\Sigma \alpha_i t^i$ le développement de MACLAURIN de la fonction $[\log(1-t)/-t]^{-n}$. Les nombres de JAMES $U(n, k)$ jouissent de la propriété suivante: Les produits $U(n, k) \cdot \alpha_1$, $U(n, k)\alpha_2, \ldots, U(n, k)\alpha_{k-1}$ sont tous entiers.

$$\left[\frac{\log(1-t)}{-t}\right]^{-n} = 1 - \frac{n}{2}t + \frac{n(3n-5)}{24}t^2 - \frac{n(n-2)(n-3)}{48}t^3 + \cdots$$

Le théorème d'ATIYAH et TODD pour $k = 4$ affirme donc:

$$U(n, 4) \cdot \frac{n}{2}, \quad U(n, 4) \cdot \frac{n(3n-5)}{24}, \quad U(n, 4) \cdot \frac{n(n-2)(n-3)}{48} \quad \text{sont entiers.}$$

$n \equiv 7 \bmod 24$

$U(7, 4) \cdot [\frac{7}{2}, \frac{14}{3}, \frac{35}{12}]$ entiers $\Rightarrow U(7, 4)$ multiple de 12.

$n \equiv 9 \bmod 24$

$U(9, 4) \cdot [\frac{9}{2}, \frac{33}{4}, \frac{63}{8}]$ entiers $\Rightarrow U(9, 4)$ multiple de 8

$n \equiv 15 \bmod 24$

$U(15, 4) \cdot [\frac{15}{2}, 25, \frac{195}{4}]$ entiers $\Rightarrow U(15, 4)$ multiple de 4

$n \equiv 17 \bmod 24$

$U(17, 4) \cdot [\frac{17}{2}, \frac{391}{12}, \frac{595}{8}]$ entiers $\Rightarrow U(17, 4)$ multiple de 24

$n \equiv 23 \bmod 24$

$U(23, 4) \cdot [\frac{23}{2}, \frac{184}{3}, \frac{805}{4}]$ entiers $\Rightarrow U(23, 4)$ multiple de 12

$n \equiv 25 \bmod 24$

$U(25, 4) \cdot [\frac{25}{2}, \frac{875}{12}, \frac{6325}{24}]$ entiers $\Rightarrow U(25, 4)$ multiple de 24

On obtient donc la tabelle suivante des valeurs de $U(n, 3)$[2]):

$n \equiv$ (mod 24)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$U(n, 3)$	2	6	24	4	12	3	8	12	6	2	24	12
$n \equiv$ (mod 24)	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$U(n, 3)$	4	3	24	4	6	6	8	12	12	1	24	12

Les valeurs des groupes $\pi_{2n-2}(U_{n,3})$ et $\pi_{2n-2}(U_{n,4})$ sont donc complètement connues.

RÉFÉRENCES

[1] M. F. ATIYAH and J. A. TODD: *On complex Stiefel manifolds.* Proc. Cambridge Phil. Soc. *56* (1960), 342–353.

[2] R. BOTT: *A report on the unitary group.* Diff. Geom. Proc. of Symposia A.M.S. vol. III (1961), 1–6.

[3] B. ECKMANN: *Zur Homotopietheorie gefaserter Räume.* Comment. Math. Helv. *14* (1941–42), 141–192.

[4] B. ECKMANN: *Systeme von Richtungsfeldern auf Sphären...* Comment. Math. Helv. *15* (1942–43), 1–26.

[5] B. ECKMANN and P. J. HILTON: *Composition functors and spectral sequences.* Comment. Math. Helv. *41* (3) (1966–67), 187–221.

[6] P. J. HILTON: *The Hopf invariant and homotopy groups of spheres.* Proc. Cambridge Phil. Soc. *48* (1952), 547–554.

[7] I. M. JAMES: *The intrinsic join.* Proc. London Math. Soc. (3) *8* (1958), 507–535.

[8] I. M. JAMES: *Cross-sections of Stiefel manifolds.* Proc. London Math. Soc. (3) *8* (1958), 536–547.

S. T. HU: *Homotopy Theory.* Academic Press, New York-London (1959).

H. TODA: *Composition methods in homotopy groups of spheres.* Princeton University Press (1962).

Reçu le 16 juin 1967

E.T.H. Forschungsinstitut für Mathematik, Zürich
University of British Columbia, Vancouver

[2]) Il est facile de vérifier que $U(2m+1, 3)$ est égal à $24/(m-1, 12)$. Ceci permet de simplifier quelque peu la formulation.