Vielflache mit Doppelstrecken, aus Prismen.

Autor(en): **Merz, K.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **10 (1937-1938)**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-11001

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Vielflache mit Doppelstrecken, aus Prismen

Von K. Merz, Chur

Durch Zerlegung von Prismen mittelst Schnittebenen werden ein- und zweiseitige Polyeder mit Doppelstrecken erhalten. Bei zunehmender Flächenzahl führen sie zu einem eigenartigen Grenzfall. Die Konstruktion sei vorerst an einem Würfel ausgeführt.

1. *Würfel zerlegt in ein einseitiges 14 Flach und ein zweiseitiges 12 Flach.*

Durch die vier Kanten einer Würfelseite als Grundfläche seien die vier Schnittebenen durch die Würfelmitte gelegt. Damit entstehen sechs Doppelstrecken, nämlich die vier Würfeldiagonalen und die zwei Verbindungsstrecken der Mitten von je zwei gegenüberliegenden Seitenflächen. Die Achsenschnitte in den vier Schnittebenen sind Rechtecke; in jedem davon sind drei Doppelstrecken, nämlich die beiden Diagonalen und die Mittelparallele zu den kürzeren Rechteckseiten. Der Würfel wird so in 14 Teile zerlegt, die alle vom Schnittpunkt 0 der Doppelstrecken ausgehen. Davon bilden sechs Scheitelteile das einseitige 14 Flach und die übrigen acht das zweiseitige 12 Flach. Scheitelteile stoßen nur in Doppelstrecken zusammen und ihre äußeren Flächen auf dem Würfel nur in Ecken. Am 14 Flach sind zwischen den sechs Körperteilen acht Lücken, am 12 Flach sind deren sechs.

Zur Herstellung der Netze wurde aus jedem Rechteck der vier Achsenschnitte an dessen Länge ein Viertel herausgeschnitten längs Diagonalen und noch halbiert in rechtwinklige Dreiecke, um beim Aufklappen die Durchdringungen der vier Achsenschnitte herstellen zu können. Doppelstrecken gehen von 0 aus.

Netz des 14 Flachs

Möbiusbänder 1 — (1) , 2 — (2) , 3 — (3)

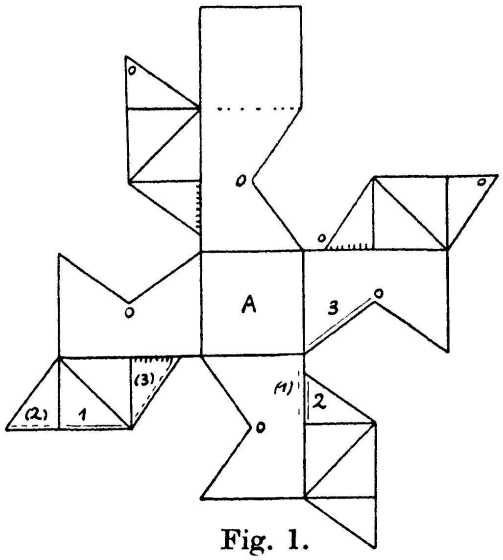
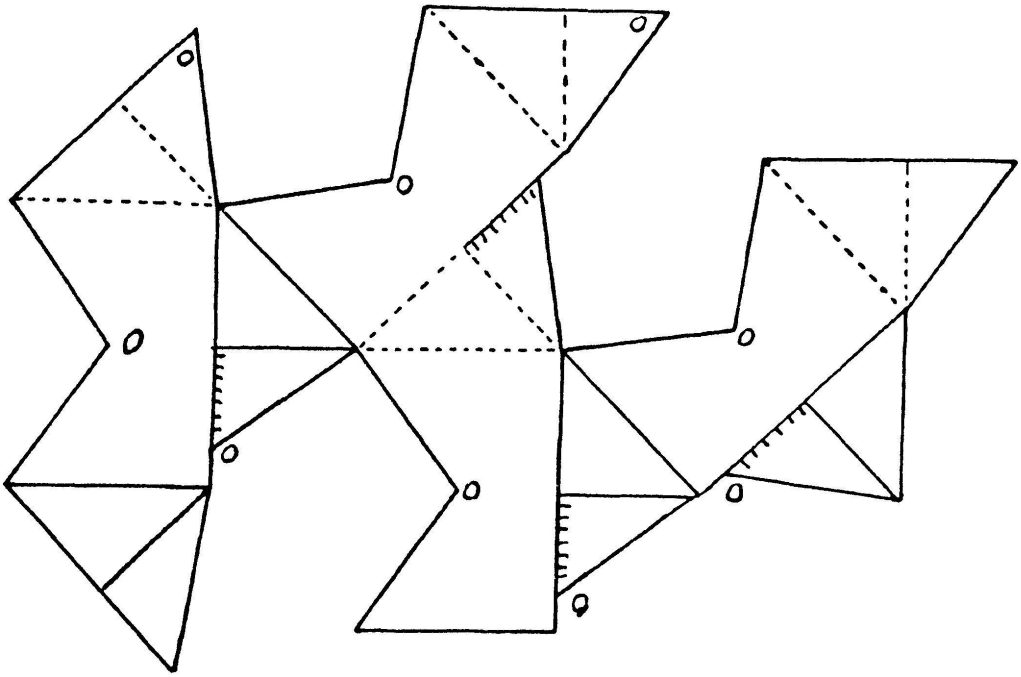


Fig. 1.

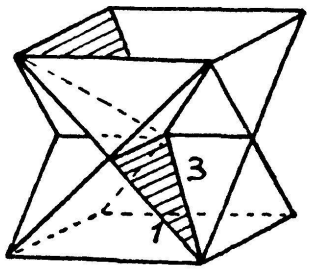
Um aus dem ersten Netz das *14 Flach* zu erhalten, sind alle Umklappungen, bis auf eine, nach der nämlichen Seite zu machen, nach unten. Man beginnt um die Grundfläche A, bis die nächsten drei 0 in einen Punkt fallen. *Möbiusbänder* schließen sich in den Wendestrecken 1, einer Kante, und in 2 und 3, halben Doppelstrecken, die zusammen ein Dreieck von 0 aus bilden, wie es viermal am 14 Flach auftritt. Dieses hat Grund- und Deckfläche des Würfels mit zwei Pyramiden nach 0, zwischen denen sich die vier Teile an den Seitenkanten einfügen mit je zwei Dreiecken als äußere Flächen. Damit sind zehn Flächen vom Würfel vorhanden, zu denen noch die vier Achsenschnitte kommen: $f = 14$, $e = 12$, $k = 28$, $c = e - k + f = -2$.

Dem *12 Flach*, das zweiseitig wird, fehlen Grund- und Deckfläche, statt dessen sind zwei einspringende Pyramiden als Lücken, zu denen noch vier an den Seitenkanten kommen. Das Netz war schwieriger zu bilden und es ist weniger übersichtlich als im vorigen Fall. Die Aufklappungen haben um die punktierten Kanten entgegen wie um die ausgezogenen zu erfolgen. Die acht Körperteile zeigen abwechselnd ent-

Netz des 12 Flachs



12 Flach F_2 $n = 4$



(Wendestrecken des 14 Flachs)

Fig. 2.

gegengesetzte Seiten des Netzes, und doch bilden sich keine Möbiusbänder, weil beim fortgesetzten Aufklappen jedesmal gleiche Seiten gegeneinander kommen. $f = 12$ $e = 12$ $k = 24$ $c = 0$.

2. *Zerlegung eines sechsseitigen Prismas* in ein einseitiges 32 Flach und ein zweiseitiges 24 Flach. Das Prisma sei senkrecht über regelmäßiger Grundfläche.

Die sechs Schnittebenen werden je durch zwei gegenüberliegende parallele Kanten von Grund- und Deckfläche gelegt, wodurch 15 Doppel-

Teil des Netzes des 32 Flachs

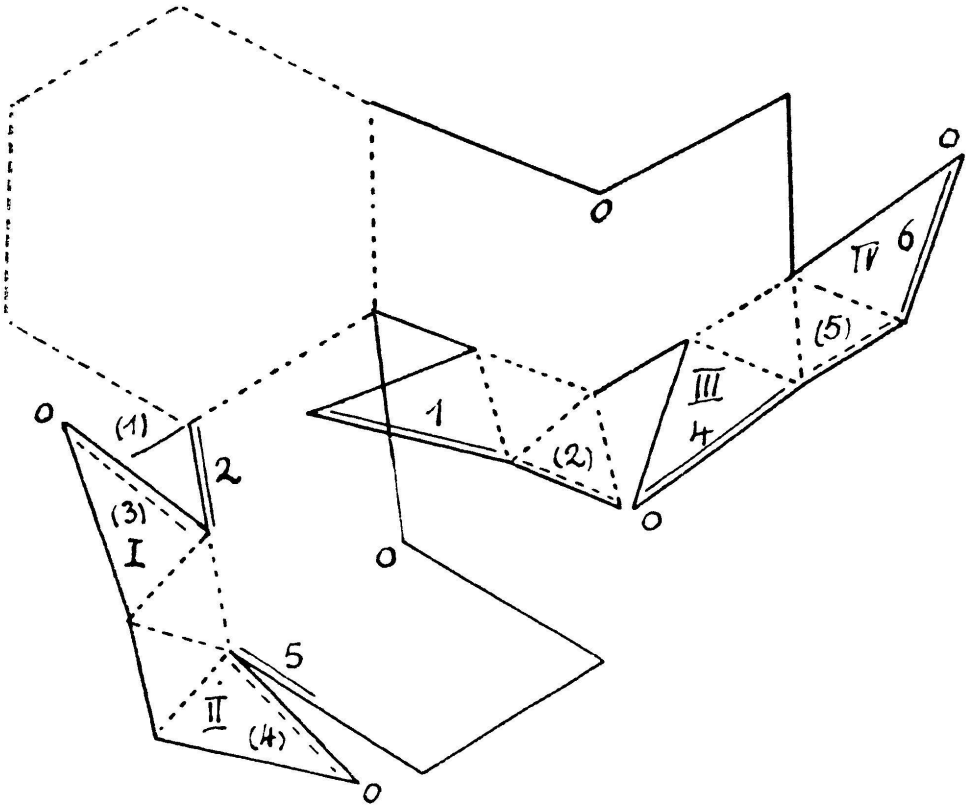
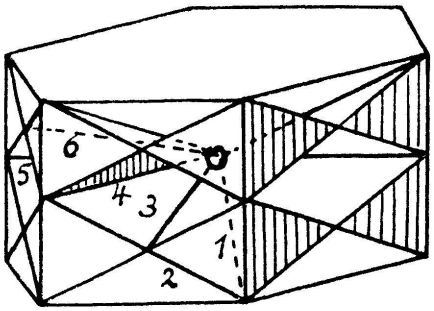
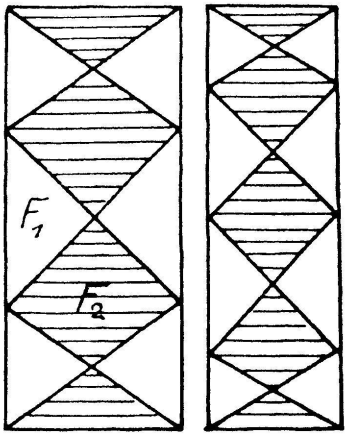


Fig. 3.

32 Flach F_1 $n = 6$



Seitenflächen



$n = 8$ $n = 10$

Fig. 4.

strecken entstehen, von denen sechs von der Mitte 0 des Prismas nach dessen Ecken gehen; weitere drei verbinden die Mitten von seitlichen Gegenkanten und noch sechs gehen geneigt nach den Mittellinien zwischen benachbarten Seitenkanten. Das Prisma wird damit in 32 Zellen geteilt, von denen 14 das 32 Flach bilden und 18 das 24 Flach.

Die Achsenschnitte sind Sechsecke mit je fünf Doppelstrecken. Ein Ausschnitt daraus, in vier Dreiecke I bis IV zerlegt, ermöglicht die Bildung der Durchdringungen bei der Aufklappung. Das *Netz* des *32 Flachs* läßt sich um die Grundfläche regelmäßig anordnen, weshalb nur ein Teil des Netzes gezeichnet ist. Teile der Dreiecke I bis IV überdecken am Netz. Nach der Aufklappung bilden die Wendestrecken in jedem Sechstel zwei Dreiecke 1, 2, 3 und 4, 5, 6 von 0 aus mit zwei Hälften von Doppelstrecken und einer seitlichen Verbindungskante an Dreiecken der Seitenflächen. Das zweiseitige *24 Flach* hat pyramidenförmige Trichter als Lücken statt Grund- und Deckfläche, und in der Mitte der Seitenflächen eine Raute zwischen Dreiecken oben und unten, wie die Lücken am 32 Flach.

3. *Verallgemeinerung* für ein n seitiges Prisma F von gerader Seitenzahl. Auf jeder seiner Seitenflächen entstehen durch die Spuren der Schnittebenen $(n-2)$ Flächen für F_1 und $\frac{n}{2}$ Flächen für F_2. In folgender Tabelle sind die Zahlen der Elemente der erhaltenen Teilvielflache F_1 und F_2 zusammengestellt, samt der Doppelstrecken d und der Zellen z. Man erhält damit Vielflache großer *Zusammenhangszahl* $h = 3-c$, worin $c = e-k+f$ die Charakteristik ist, aus Anzahl e der Ecken, k der Kanten und f der Flächen.

		F_1 einseitig				F_2 zweiseitig									
t	n	f_1	e_1	k_1	c_1	f_2	e_2	k_2	c_2	d	z	z_1	z_2	h_1	h_2
2	4	14	12	28	— 2	12	12	24	0	6	14	6	8	5	3
3	6	32	30	72	— 10	24	30	60	— 6	15	32	14	18	13	9
4	8	58	56	136	— 22	40	56	112	— 16	28	58	26	32	25	19
5	10	92	90	220	— 38	60	90	180	— 30	45	92	42	50	41	33

Allgemein ergeben sich folgende Formeln zu geradem $n = 2t$, $(t>1)$:

$$\left.\begin{array}{ll} F_1: f_1 = 2t(2t-1)+2, & e_1 = 2t(2t-1),\ k_1 = 2t(5t-3) \\ F_2: f_2 = 2t\ (\ t+1), & e_2 = 2t(2t-1),\ k_2 = 4t(2t-1) \end{array}\right\} k_1 - k_2 = 2t(t-1)$$

Doppelstrecken: $d = t(2t-1)$, Zellen: $z = 2t(2t-1)+2$ od. $z = 2(d+1)$
Ecken eines Teilvielflachs: $e_1 = e_2 = 2d$ (Endpunkte der d)
Zellen von F_1:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = t(2t-1)+1-(t-1) \text{ oder } z_1 = d-t+2 \\ \text{Zellen von } F_2: \\ z_2 = t(2t-1)+1+(t-1) \text{ oder } z_2 = d+t \end{array}\right\} z_1 - z_2 = -2(t-1)$$

$$\text{Charakteristik: } \left.\begin{array}{l} c_1 = 2(1+t-t^2) \text{ oder } c_1 = 2+t-d \\ c_2 = 2t(2-t) \quad \text{oder } c_2 = 3t-d \end{array}\right\} c_1 - c_2 = -2(t-1)$$

also $c_1 - c_2 = z_1 - z_2$

Zusammenhangszahlen:

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = 2t^2-2t+1 \text{ oder } h_1 = d+1-t \\ h_2 = 2t^2-4t+3 \text{ oder } h_2 = d+3-3t \end{array}\right\} h_1 - h_2 = 2(t-1)$$

oder durch die Lücken $(z-z_1)$ und $(z-z_2)$ angegeben:

$$h_1 = (z-z_1)-2t+1$$
$$h_2 = (z-z_2)-2t+1$$

Daraus ist $h_1 - h_2 = (k_1 - k_2) : t$ gleich der doppelten Zahl der Abschnitte auf den parallelen Prismenkanten, die an F_1 als Kanten auftreten, während sie an F_2 in den Lücken fehlen. Schließlich ist $h_1 - h_2 = -(z_1 - z_2)$, d. h. die *Differenz* der Zusammenhangszahlen ist entgegengesetzt gleich der Differenz der Anzahl der Zellen von F_1 und F_2, oder also gleich der Differenz ihrer Lücken.

4. Von besonderer Bedeutung ist der *Grenzfall* für $\lim n = \infty$. Die Prismen F gehen in einen Zylinder über, die Vielecke der Schnittebenen in Ellipsen, welche dessen Mantel in unendlich kleine Drei- und Vierecke teilen, die abwechselnd zu F_1 und F_2 gehören, so daß die Flächen eines einzelnen Vielflachs die Zylinderfläche nicht dicht erfüllen. Ebenso ist der innerhalb liegende Körperteil nicht dicht, da nur die Zellen in Scheitellage einen der Körper zusammensetzen und die übrigen dazwischen als Lücken bleiben. Für F_1 werden die beiden Kegel von den Grundflächen aus nach 0 dicht, nicht aber der übrige Teil im Innern des Zylinders, der von leeren Zellen durchstoßen ist, womit die unendlich großen Zusammenhangszahlen h_1 und h_2 von F_1 und F_2 ermöglicht werden; der Raum wird dadurch gleichsam gelockert. Das Volumen der Teilkörper des Zylinders bleibt begrenzt, während ihre Oberfläche durch die Zunahme der Schnittfiguren unbegrenzt wächst. Dies entspricht den Oberflächenvergrößerungen bei Entwicklungen der Gebilde der Natur aus deren Stoffen.

(Eingegangen den 24. Februar 1938.)