

# Essai sur les petites vibrations des astres fluides.

Autor(en): **Wavre, R.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **3 (1931)**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4687>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Essai sur les petites vibrations des astres fluides

par R. WAVRE, Genève

## § 1. Mouvements de genre un

La méthode indiquée précédemment pour la recherche des figures d'équilibre s'étend sans difficulté aux mouvements des astres fluides pour lesquels il existe encore un potentiel des accélérations.

Mettons en évidence quelques propriétés de ces mouvements-là. Les équations de l'hydrodynamique s'écrivent pour un fluide parfait

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \gamma_x, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \gamma_y, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} - \gamma_z,$$

$p$  est la pression,  $\rho$  la densité,  $U$  le potentiel newtonien créé par le fluide lui-même et par des corps étrangers s'il y en a et les  $\gamma$  sont les composantes de l'accélération. S'il existe un potentiel  $-Q(x, y, z, t)$  pour cette dernière, les équations (1) s'écrivent  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

Posons

$$(2) \quad \Phi = U + Q$$

et les relations (2) deviennent

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

En multipliant respectivement par  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , composantes d'un déplacement purement spacial à  $t$  constant, on trouve

$$(3) \quad \frac{1}{\rho} \delta p = \delta \Phi.$$

Sur une ligne ou une surface pour laquelle  $\delta p = 0$  on a également  $\delta \Phi = 0$  et réciproquement. Il existe donc entre  $p$  et  $\Phi$  une relation de la forme

$$(4) \quad \Phi = \Phi(p, t)$$

et les surfaces à  $p$  constant sont des surfaces sur lesquelles  $\Phi$  est constant et réciproquement. L'équation (3) peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial p}.$$

La densité ne peut dépendre que de  $p$  et de  $t$

$$(5) \quad \rho = \rho(p, t).$$

Les surfaces d'égale densité coïncident avec les surfaces d'égale pression. Cette proposition doit être prise dans le sens indiqué par l'équation précédente. Une surface sur laquelle la pression est constamment la même sera une surface d'égale densité mais la valeur de cette densité pourra varier au cours du temps.

Réciproquement, l'existence d'une relation de la forme (5) implique l'existence d'un potentiel des accélérations.

En effet, la relation (5) permet de former le potentiel

$$\Phi = \int_0^p \frac{dp}{\rho(p, t)},$$

l'intégrale étant prise à  $t$  constant. Les équations (1) s'écrivent alors

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \gamma_x, \dots, \dots$$

ce qui signifie que les accélérations dépendent du potentiel  $U - \Phi$ . L'équation (5) peut avoir lieu en vertu même de la nature du mouvement ou encore en vertu d'une équation caractéristique  $\rho = \rho(p)$ . La première circonstance se présente pour tout équilibre relatif de la masse fluide ou encore pour toute rotation permanente<sup>1)</sup> de genre un. Les pulsations des céphéïdes hétérogènes fournissent un autre exemple intéressant. A chaque instant les surfaces d'égale densité et d'égale pression sont sphériques. Les deux familles coïncident géométriquement. Mais une surface sur laquelle la densité est constamment la même peut supporter des pressions différentes au cours du temps.

<sup>1)</sup> Voir Bulletin de la Société Mathématique de France, Figures planétaires et problème de Poincaré, 1930.

Nous appellerons « mouvement de genre un » tout mouvement pour lequel on a

$$\rho = \rho(p, t)$$

où  $t$  est le temps. Ces mouvements sont aussi caractérisés, comme on vient de le voir, par l'existence d'un potentiel des accélérations.

## § 2. Extension de la méthode de la cavité

Pour tout mouvement de genre un, les équations de l'hydrodynamique (1) se résument en celle-ci, où  $\Phi$  ne dépend que de  $p$  et de  $t$

$$(6) \quad \Phi = U + Q.$$

Le Laplacien étant pris à  $t$  constant, bien entendu, on a

$$(7) \quad \Delta \Phi = \Delta U + \Delta Q = -4\pi i \rho + \Delta Q$$

où  $i$  est la constante de l'attraction universelle. Soit, maintenant,  $S$  une surface régulière à l'intérieur de laquelle  $\Phi$  est supposée être une fonction régulière au sens fort.

En tout point  $P$  intérieur à  $S$ , l'identité suivante est vérifiée

$$(8) \quad \int \frac{1}{r} \Delta \Phi dc + \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS + 4\pi \Phi P - \int \Phi \frac{d}{dn} \frac{1}{r} dS = 0,$$

$c$  étant la région intérieure à  $S$  et les dérivées normales étant prises vers l'intérieur. De la relation (7) on tire

$$(9) \quad 4\pi i \rho = -\Delta \Phi + \Delta Q.$$

Le potentiel newtonien s'écrit d'autre part:

$$U = i \int \frac{1}{r} \rho dc + i \int \frac{1}{r} \rho dz$$

où  $z$  est l'espace entier extérieur à  $S$ . Tirons la densité de l'expression (9) et portons-la dans l'intégrale étendue à la cavité. On trouve ainsi

$$(10) \quad 4\pi U = \int \frac{1}{r} \Delta Q dc - \int \frac{1}{r} \Delta \Phi dc + 4\pi i \int \frac{1}{r} \rho dz.$$

Enfin remplaçons  $U$  par  $\Phi - Q$  et l'intégrale en  $\Delta \Phi$  par sa valeur tirée de (8) ce qui donne à l'intérieur de  $c$

$$(11) \quad \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS + 4\pi i \int \frac{1}{r} \rho dz + 4\pi Q_P + \int \frac{1}{r} \Delta Q dc - \int \Phi \frac{d^1}{dn} dS = 0.$$

Je dis que cette équation est équivalente à l'équation fondamentale

$$(12) \quad \Phi = U + Q,$$

dans ce sens que (12) implique (11), comme nous venons de le voir, et que réciproquement si (11) est satisfaite pour toute surface  $S$  fermée appartenant à une famille qui balaie l'astre entier, la relation (12) est satisfaite aussi.

Cette réciproque se démontre comme précédemment. L'identité (8) permet d'écrire (11) sous la forme

$$(13) \quad 4\pi i \int \frac{1}{r} \rho dz + \int \frac{1}{r} (-\Delta \Phi + \Delta Q) dc + 4\pi Q_P - 4\pi \Phi_P = 0.$$

Pour deux surfaces  $S$  infiniment voisines, on aura à l'intérieur de la plus petite

$$\int \frac{1}{r} (\Delta \Phi - \Delta Q + 4\pi i \rho) dz^+ = 0$$

$z^+$  étant la région comprise entre les deux. Cette relation exige que l'on ait

$$-\Delta \Phi + \Delta Q = 4\pi i \rho$$

et la relation (13) s'écrit  $\Phi = U + Q$ . C'est ce qu'il fallait démontrer.

Cette *extension* de la méthode de la cavité est faite à *trois points de vue*:

1° *Le fluide envisagé peut être animé d'un mouvement de genre un, il suffit donc que l'on ait  $\rho = \rho(p, t)$ .*

- 2° Les surfaces  $S$  peuvent être quelconques, pourvu qu'elles balaient dans leur ensemble l'astre entier. Elles doivent être fermées, elles peuvent avoir la connexion de la sphère, du tore ou d'autres surfaces pour lesquelles l'identité (8) est encore vérifiée.
- 3° L'astre peut être soumis à l'influence newtonienne constante ou variable de corps étrangers.

### § 3. Remarques

Deux choix particuliers de surface  $S$  s'imposent à l'attention :

- a) Les surfaces fluides qui, comme on le sait accompagnent les particules dans leurs mouvements :  $h(x, y, z, t) = c$ .
- b) Les surfaces sur lesquelles la pression garde spatialement et temporellement la même valeur :  $p(x, y, z, t) = c$ .

Dans ce dernier cas, il faudra que ces surfaces restent fermées et ne se scindent pas quand on passe de la surface libre à l'intérieur.

Ces deux familles ne coïncident pas forcément et les surfaces d'égale pression ne sont pas a priori des surfaces fluides.

Le choix b) simplifie l'équation (11), car  $\Phi$  est alors spatialement constant sur  $S$  puisque l'on a  $\Phi = \Phi(p, t)$  et (11) devient

$$(14) \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS + 4\pi i \int \frac{1}{r} \rho dz = 4\pi \Phi_S - 4\pi Q_P - \int \frac{1}{r} \Delta Q dc.$$

On connaît l'avantage de cette relation : aucune des deux intégrales du premier membre ne porte sur la cavité intérieure à  $S$  et l'on peut développer  $\frac{1}{r}$  suivant les puissances des distances du point potentialisé  $P$  au point potentialisant  $P'$  et ce développement pourra n'être employé que là où il converge absolument et uniformément, c'est à dire au voisinage du centre de l'astre, point commun à toutes les cavités. Les deux membres de (14) sont d'ailleurs harmoniques à l'intérieur de la cavité et il suffira d'identifier leur développement de Taylor au voisinage du centre pour satisfaire à l'équation (14) par prolongement analytique.

On peut déduire de (10) et (14) une extension du théorème de Stokes.

### § 4. Le procédé uniforme

Comme précédemment  $\tau$  sera la distance du point potentialisé  $P$  au centre  $O$  de l'astre,  $R$  la distance de  $O$  au point potentialisant  $P'$ , j'entends

au point variable d'intégration;  $\gamma$  sera l'angle  $POP'$  et  $X_q$  le  $q^{\text{ième}}$  polynôme de Legendre. Nous pouvons écrire

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\frac{\tau}{R}\right)^q X_q(\cos \gamma).$$

D'autre part, les surfaces sur lesquelles la pression est et reste constante seront caractérisées par un paramètre  $j$ . On a évidemment  $R = R(j, \theta, \psi, t)$  où  $\theta$  est la colatitute géocentrique et  $\psi$  la longitude de  $P'$ .

Dès lors, le coefficient de  $\tau^q$  dans le premier membre de (14) est

$$(15) \quad [R] = -\frac{\partial \Phi}{\partial j} H \left(\frac{\partial R}{\partial j}\right)^{-1} R^{1-q} + 4\pi i \int_j^{j_1} \rho R^{1-q} \frac{\partial R}{\partial j} dj.$$

La fonction  $H$  a la même valeur que précédemment<sup>2)</sup>

$$H = 1 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \psi}\right)^2$$

en plus  $j_1$  est la valeur du paramètre  $j$  qui caractérise la surface libre  $p = 0$ . La dernière intégrale de (15) provient de la zone  $z$  allant de la surface  $j$  à la surface  $j_1$ . S'il y a des corps extérieurs, leur potentiel newtonien sera inscrit dans les seconds membres de (14) pour plus de simplicité.

Posons encore

$$(16) \quad Q + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \Delta Q dc = \sum_{q=0}^{\infty} \tau^q Y_q(j, \theta, \psi, t),$$

$Y_q$  étant une fonction sphérique de rang  $q$  en  $\theta$  et  $\psi$ . Un tel développement est toujours possible, puisque le premier membre de (16) est une fonction harmonique. Il sera valable au voisinage du centre de l'astre et c'est tout ce qu'il nous faut.

L'identification des puissances de  $\tau$  dans les deux membres de l'équation fondamentale (14) donne

$$(17) \quad [R]_q = \begin{cases} iM - \frac{1}{4\pi} \int \Delta Q dc & q = -1 \\ \Phi(j, t) - Y_0 & q = 0 \\ -(2q + 1) Y_q(j, \theta, \psi, t) & q = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

<sup>2)</sup> Sur une méthode rigoureuse pour la recherche des figures d'équilibre, C.M.H. vol. II, 1930.

L'équation relative à  $q = -1$  n'est autre, comme précédemment, que l'équation de Poincaré transformée. Elle détermine la masse totale  $M$ . Les autres  $q = 0, 1, 2, \dots$  représentent dans leur ensemble la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation  $\Phi = U + Q$  soit satisfaite.

L'indice  $q$  au bas du crochet en  $R$  signifie: la fonction sphérique de rang  $q$  du développement du crochet, comme précédemment.

Le tableau (17) est encore absolument rigoureux, j'entends qu'aucune approximation n'a été faite et que le développement de  $\frac{1}{r}$  n'a été employé que là où il converge.

## § 5. Les approximations pour les sphéroïdes

La densité  $\rho$  et le potentiel de la pesanteur  $\Phi$  sont spatialement constants sur les surfaces  $S$  où la pression est spatialement et temporellement constante. Mais les valeurs de  $\rho$  et de  $\Phi$  peuvent varier au cours du temps sur ces dernières surfaces. Nous poserons

$$\rho(j, t) = \rho^0(j) + \rho^1(j, t) \quad \Phi(j, t) = \Phi^{(0)}(j) + \Phi^{(1)}(j, t).$$

Pour les petits mouvements au voisinage d'un état stable d'équilibre, absolu ou relatif, on conviendra utilement que  $\rho^0$  et  $\Phi^0$  représentent les valeurs de  $\rho$  et de  $\Phi$  dans cet état.

Au voisinage du repos absolu, caractérisé par une répartition sphérique des couches d'égale densité et d'égale pression,  $j$  représentera le rayon de la sphère sur laquelle la pression est  $p(j)$  dans l'état de repos absolu.

Pour l'étude des petits mouvements au voisinage de l'état sphérique, nous poserons, comme précédemment:

$$R = j(1 + e) \quad \text{avec} \quad e(j, \theta, \psi, t).$$

Cette fonction  $e$  est la déformation radiale de la surface  $p(j)$  rapportée au rayon  $j$  de la sphère.

Enfin, nous envisagerons: les accélérations et leur potentiel  $-Q$ , les modifications  $\rho^1$  et  $\Phi^1$  de la densité et du potentiel de la pesanteur, enfin la déformation  $e$ , comme d'un ordre de grandeur d'une quantité petite  $\lambda$ .



Développons les deux membres du système (17) suivant les puissances de  $\lambda$  et identifions en  $\lambda$ . Les termes en  $\lambda^0$  donnent

$$-\frac{d\Phi^0}{dj} j^{1-q} + 4\pi i \int_j^{j_1} \rho^0 j^{1-q} dj = \begin{cases} iM & q = -1 \\ \Phi^0 & q = 0. \end{cases}$$

Ce système correspond à la stratification sphérique et au repos absolu. Il se résoud ainsi

$$-\frac{d\Phi^0}{dj} = \frac{4}{3} \pi i j D(j)$$

$D(j)$  étant la densité de la matière intérieure à la sphère de rayon  $j$ . Le premier membre n'est autre que la pesanteur sur cette sphère.

L'identification des termes en  $\lambda$  donne ensuite

$$(18) \quad 4\pi i \{e\}_q = \begin{cases} \frac{\partial \Phi^1}{\partial j} j^2 - 4\pi i \int_j^{j_1} \rho^{(1)} j dj - \frac{1}{4\pi} \int \Delta Q dc & q = -1 \\ \Phi^1 + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial j} j - 4\pi i \int_j^{j_1} \rho^1 j dj - Y_0 & q = 0 \\ -(2q + 1) Y_q(j, \theta, \psi, t) & q = 1, 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

L'accolade en  $e$  est analogue à celle déjà rencontrée précédemment<sup>3)</sup>:

$$\{e\} = -\frac{D}{3} j^{3-2q} \frac{\partial e j^q}{\partial j} + \int_j^{j_1} \rho \frac{\partial e j^{2-q}}{\partial j} dj.$$

Le tableau (18) est encore très général et convient à tous les petits mouvements de genre un au voisinage de la sphère. On pourrait, comme dans le cas de l'équilibre relatif, pousser jusqu'à l'identification des termes d'un ordre quelconque en  $\lambda$ . Mais nous en resterons là.

Si la relation générale  $\rho = \rho(p, t)$  se réduit à la forme plus simple  $\rho = \rho(p)$ ,  $\Phi$  et  $\rho$  gardent une valeur constante sur les surfaces  $j$  et le système (17) s'écrit plus simplement, les fonctions  $\rho^1$  et  $\Phi^1$  étant identiquement nulles:

$$(19) \quad 4\pi i \{e\}_q = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \int \Delta Q dc & q = -1 \\ -(2q + 1) Y_q & q = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

<sup>3)</sup> C. M. H. V. 3, p. 15; les deux accolades diffèrent par le facteur  $4\pi i$ .

Pour les mouvements par sphères concentriques des céphéides, les deux premières équations du système (18) interviennent seules. Pour les changements de forme des surfaces d'égalité pression, ce sont au contraire les équations relatives à  $q = 1, 2, 3, \dots$  qui interviennent et c'est sur ces dernières que nous allons porter notre attention.

## § 6. Développements et poursuite de l'identification

Des équations précédentes, nous retiendrons donc celles-ci, pour  $q > 0$

$$(20) \quad \{e\}_q = -\frac{2q+1}{4\pi i} Y_q(j, \theta, \psi, t).$$

Développons  $e$  en fonction sphérique fondamentale  $Y_{q,m}(\theta, \psi)$  ce qui est possible pour chaque valeur de  $j$  et à chaque instant  $t$ . On trouve

$$(21) \quad e = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{m=-q}^{+q} e_{q,m}(j, t) Y_{q,m}(\theta, \psi).$$

Posons de même pour la fonction  $Y_q(j, \theta, \psi, t)$  qui provenait des accélérations

$$(22) \quad Y_q(j, \theta, \psi, t) = \sum_{m=-q}^{+q} \alpha_{q,m}(j, t) Y_{q,m}(\theta, \psi).$$

Le tableau (20) donne lieu à une identification en les  $Y_{q,m}$  d'où

$$(23) \quad \{e_{q,m}(j, t)\} = -\frac{2q+1}{4\pi i} \alpha_{q,m}(j, t).$$

Enfin, supposons la fonction  $e$  analytique en  $j$ , une singularité au centre de l'astre étant actuellement exclue à priori:

$$(24) \quad e_{q,m}(j, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{q,m}^{(n)}(t) j^n.$$

Le système (23) se réduit au suivant

$$(25) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_{q,m}^{(n)}(t) \{j^n\} = -\frac{2q+1}{4\pi i} \alpha_{q,m}(j, t).$$

Enfin notons que l'on a, pour une masse hétérogène

$$(26) \quad \{j^n\} = -\frac{n+q}{3} D j^{2-q+n} + (2-q+n) \int_j^{j_1} \rho j^{1-q+n} dj$$

et pour une masse entièrement homogène

$$(27) \quad \{j^n\} = D \left( -\frac{n+q}{3} j^{2-q+n} + j_1^{2-q+n} - j^{2-q+n} \right).$$

Enfin pour une masse quelle qu'elle soit

$$(28) \quad \{j^{q-2}\} = -\frac{2}{3} (q-1) D$$

comme le montre la formule (26) dans laquelle on fait  $n = q - 2$ .

Les calculs précédents consistent à pousser l'identification des deux membres du tableau (20) aussi loin que possible pour  $q = 1, 2, 3, \dots$ .

Ces développements généraux faciliteront beaucoup les applications de la fin de cet article et permettront, je l'espère, de traiter d'autres problèmes encore, et en particulier celui des masses compressibles.

## § 7. Equations complémentaires

Invoquons quelques résultats généraux relatifs aux petits mouvements. Ils seront démontrés aux §§ 12 et 13. Ils s'établissent directement et c'est pour ne pas interrompre la continuité de cet article que nous renvoyons leur démonstration à la fin.

1° L'équation de continuité dont on n'avait pas à tenir compte dans la recherche des figures d'équilibre implique la relation suivante:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2 \rho}{dt^2} = \Delta Q$$

où la dérivée de  $\rho$  est prise en suivant la particule dans son petit mouvement.

Si le fluide est incompressible, la densité est constante le long des trajectoires et le potentiel des accélérations est alors harmonique.

Dans ce cas, les fonctions  $Y_q$  sont celles du développement de  $Q$  lui-même et l'on a

$$Q = \sum_{q=0}^{\infty} j^q Y_q(\theta, \psi, t).$$

2° Si  $j\eta$  représente la projection sur le rayon vecteur du déplacement de la particule dans son petit mouvement, on aura

$$\eta'' = - \sum_{q=1}^{\infty} q j^{q-2} Y_q(\theta, \psi, t)$$

est  $\eta''$  sera l'accélération radiale rapportée.

3° Dans la suite, nous pourrons tirer parti du fait que la surface libre  $p=0$  est une surface fluide. Pour cette dernière, on devra avoir constamment  $e = \eta$  et  $e'' = \eta''$ , comme on le vérifie aisément.

4° Pour une masse homogène et incompressible, le volume total restera constant et l'on aura à chaque instant

$$\int e d\Sigma = 0$$

où  $\Sigma$  est la sphère de rayon  $j_1$ . Cette condition implique que le terme  $e_0$  du développement de  $e$  soit identiquement nul.

5° Le centre de gravité de la masse supposée isolée ne pourra pas se déplacer par rapport aux axes  $x, y, z$  qui lui sont attachés, ce qui implique que l'on ait constamment

$$\int x dV = 0 \quad \int y dV = 0 \quad \int z dV = 0,$$

$V$  étant le volume occupé par l'astre envisagé. Ces relations impliquent à leur tour l'inexistence de termes de rang 1 dans le développement de  $e$ , d'où  $e_{1,m} = 0$ .

Ce développement s'écrira

$$(29) \quad e = \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{m=-q}^{+q} e_{q,m}(j, t) Y_{q,m}(\theta, \psi).$$

De même dans  $\eta''$ , il n'y a pas de termes en  $q=0$  et  $q=1$  car ils

répondraient à une accélération du centre de gravité, lequel ne doit pas en subir en l'absence de corps étrangers. On a donc :

$$(30) \quad \eta'' = - \sum_{q=2}^{+\infty} q j^{q-2} Y_q(\theta, \psi, t).$$

La présence de corps étrangers modifierait cette dernière remarque, comme on le verra au § 10. Passons aux applications.

## § 8. Les vibrations propres d'un fluide homogène et incompressible

Le fluide satisfait actuellement aux deux relations  $\rho = \text{constante}$  et  $\Delta Q = 0$ . Le potentiel  $\Phi$  se réduit à  $\frac{p}{\rho}$  et les fonctions  $\rho^{(1)}$  et  $\Phi^{(1)}$  sont identiquement nulles. D'autre part, les  $Y_q$  représentent les fonctions sphériques du développement de  $Q$ . Ce potentiel n'étant défini qu'à une constante près, on peut supposer  $Y_0$  nulle. Le tableau en  $e$  s'écrit donc pour un fluide homogène et incompressible

$$(31) \quad \{e\}_q = \begin{cases} 0 & q = -1 \\ 0 & q = 0 \\ -\frac{2q+1}{4\pi i} Y_q(\theta, \psi, t) & q = 1, 2, 3 \dots \end{cases}$$

et les calculs faits au § 6 s'appliquent. Les seconds membres de (25) sont indépendants de  $j$ , il doit en être de même des premiers, ce qui exige, en vertu de (27) que l'on ait  $n = q - 2$ . Ensuite, en tenant compte de (28) et posant

$$(32) \quad \mu_q = \frac{3}{2} \frac{2q+1}{q-1} \frac{1}{4\pi i D},$$

l'équation (25) se réduit à

$$(33) \quad \alpha_{q,m}^{(n)}(t) = \mu_q \alpha_{q,m}(t).$$

Puis on trouve par (24)

$$(34) \quad e_{q,m}(j, t) = \mu_q j^{q-2} \alpha_{q,m}(t).$$

Mais, d'autre part, pour les déplacements radiaux des particules, on a

$$(35) \quad \eta''_{q,m}(j, t) = -q j^{q-2} \alpha_{q,m}(t).$$

Or, la surface libre est suivie par ses particules et c'est une surface à pression constante. On aura donc sur celle-ci

$$e \equiv \eta, \quad e'' \equiv \eta'', \quad e''_{q,m} = \eta''_{q,m}$$

et les équations (34) et (35) donnent lieu à la relation

$$(36) \quad \mu_q \alpha''_{q,m}(t) = -q \alpha_{q,m}(t).$$

Si cette équation est vérifiée sur la surface libre  $j = j_1$ , les dérivées  $e''_{q,m}$  et  $\eta''_{q,m}$  puis  $e''$  et  $\eta''$  coïncideront pour toute valeur de  $j$  c'est à dire dans l'astre entier, et l'on peut même écrire  $e \equiv \eta$  quels que soient  $t$  et  $j = j_1$ , car il est impossible pour les petits mouvements que les déformations  $e$  et les déplacements  $\eta$  diffèrent par une fonction linéaire du temps. En résumé:

*Pour un astre fluide, homogène et incompressible, les surfaces à pression constante sont des surfaces fluides. En d'autres termes: chaque particule est soumise, au cours de son petit mouvement, à une pression invariable.*

Reprenons l'équation (36). Elle s'écrit

$$\alpha''_{q,m}(t) + \omega_q^2 \alpha_{q,m}(t) = 0$$

avec

$$\omega_q^2 = \frac{8\pi}{3} q \frac{q-1}{2q+1} i D.$$

Son intégration est classique et l'on a, avec  $A$  et  $B$  constantes

$$\alpha_{q,m} = A_{q,m} \cos \omega_q t + B_{q,m} \sin \omega_q t.$$

Les quantités  $\omega_q$  sont les fréquences des vibrations représentées par les fonctions  $Y_{q,m}$ . Elles ne dépendent que du premier indice de la fonction sphérique. Les déformations radiales sont

$$e = \eta = \sum_{q=2}^{\infty} j^{q-2} [Y_q^1(\theta, \psi) \cos \omega_q t + Y_q^2(\theta, \psi) \sin \omega_q t]$$

avec

$$Y_q^1(\theta, \psi) = \mu_q \sum_{m=-q}^{+q} A_{q,m} Y_{q,m}(\theta, \psi)$$

et

$$Y_q^2(\theta, \psi) = \mu_q \sum_{m=-q}^{\infty} B_{q,m} Y_{q,m}(\theta, \psi).$$

Sous les réserves que le volume et le centre de gravité restent inaltérés, on peut se donner arbitrairement la déformation radiale et les vitesses radiales pour la surface libre à l'instant initial  $t = 0$ , car on a

$$e(j_1, 0) = \sum_{q=2}^{+\infty} j_1^{q-2} Y_q^1(\theta, \psi)$$

$$e'(j_1, 0) = \sum_{q=2}^{+\infty} j_1^{q-2} \omega_q Y_q^2(\theta, \psi)$$

et ces deux conditions détermineront d'une manière unique les coefficients

$$A_{q,m}, B_{q,m} \quad \text{pour } q \geq 2 \quad -q \leq m \leq +q$$

les autres sont nuls.

La vibration propre d'ordre  $q$  possède la période obtenue par Lord Kelvin <sup>4)</sup>

$$\tau_q = \frac{2\pi}{\omega_q} = \sqrt{\frac{3}{2}} \pi \sqrt{\frac{2q+1}{q(q-1)}} \sqrt{\frac{1}{iD}}.$$

Elle est inversement proportionnelle à la racine carrée de la densité du fluide, elle est indépendante des dimensions et décroît avec le rang  $q$  de la fonction sphérique. Sa valeur asymptotique est

$$\tau_q \rightarrow \sqrt{\frac{3\pi}{iD}} \sqrt{\frac{1}{q}}.$$

D'autre part, la vibration d'ordre  $q$ , représentée par  $j e_{q,m}$  diminue comme  $j^{q-1}$  quand  $j$  tend vers zéro; elle atteint la  $n^{\text{ième}}$  partie de sa valeur sur une sphère  $j_2$  telle que l'on ait

$$\left(\frac{j_2}{j_1}\right)^{q-1} = \frac{1}{n},$$

<sup>4)</sup> Phil. Trans. 1863, p. 610.

et si  $q$  est très grand,  $j_2$  peut être très voisin de  $j_1$ . Cette question est analogue à celle de la houle. Les vibrations fondamentales  $Y_q$  d'ordre élevé répondent aux petites vagues, elles ont une période courte et leur influence est minime à quelque profondeur.

Au centre de l'astre, la vibration d'ordre 2) est seule à se manifester sur la vibration radiale rapportée, on a en effet

$$j e = 0 \quad e = Y_2(\theta, \psi, t) \quad \text{pour } j = 0.$$

Enfin, dans l'expression  $\{e\}$ , les intégrales prises de  $j$  à  $j_1$  ont disparu pour  $n = q - 2$ . Cette zone crée donc un potentiel constant, le même que dans l'état d'équilibre absolu. Il en résulte ceci :

*Le potentiel créé par la matière répartie entre les deux surfaces fluides  $p = 0$  et  $p = c$  reste constant à l'intérieur de cette seconde surface.*

La pression étant constante sur la seconde surface, on déduit aisément de cette dernière propriété la proposition suggestive suivante : *chaque cavité<sup>5)</sup> vibre comme si la zone correspondante n'existait pas.*

*Rien ne serait modifié du mouvement d'une cavité si à partir d'un instant la zone était anéantie.*

Le potentiel des accélérations  $-Q$  peut s'écrire

$$-Q = \sum_{q=2}^{\infty} j^q Y_q(\theta, \psi, t) = \sum_{q=2}^{\infty} [P_q^1(x, y, z) \cos \omega_q t + P_q^2(x, y, z) \sin \omega_q t].$$

Il existe un potentiel des vitesses  $-\varphi$

$$-\varphi = \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{\omega_q} [P_q^1 \sin \omega_q t - P_q^2 \cos \omega_q t]$$

et même un potentiel des déplacements  $-\Psi$

$$-\Psi = - \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{\omega_q^2} [P_q^1 \cos \omega_q t + P_q^2 \sin \omega_q t]$$

comme on le vérifierait facilement. Voir pour cela § 12. Les fonctions  $P_q^1$  et  $P_q^2$  sont des polynômes harmoniques homogènes de degré  $q$  en  $x, y, z$ . Les déplacements tangentiels se calculeraient facilement à partir de  $\Psi$ .

<sup>5)</sup> Par cavité il faut entendre : le noyau de matière qui remplit la cavité.



## §9. Sur les petites vibrations d'une masse incompressible hétérogène

Demandons-nous s'il est possible que les particules suivent les surfaces à pression constante pour un fluide incompressible et hétérogène? On aurait encore

$$(37) \quad e \equiv \eta, \quad e'' \equiv \eta'' \quad \text{d'où} \quad \{e''\} \equiv \{\eta''\};$$

mais on a d'autre part:

$$\{\eta''\} = -q \{j^{q-2}\} Y_q(\theta, \psi, t)$$

et

$$\{e''\} = -\frac{2q+1}{4\pi i} Y_q''(\theta, \psi, t).$$

La relation (28) et la dernière équation (37) impliqueraient

$$(38) \quad \frac{8\pi}{3} q \frac{q-1}{2q+1} i D = -\frac{Y_q''(\theta, \psi, t)}{Y_q(\theta, \psi, t)}.$$

Or le second membre ne dépend pas de  $j$  et la densité moyenne  $D$  serait une constante.

*Seule la masse homogène permet aux particules de rester à pression constante au cours des petits mouvements, si le fluide est incompressible.*

Les surfaces d'égale densité ne pourraient-elles pas, cependant, rester des surfaces d'égale pression pour une masse hétérogène?

Non, car on aurait une relation de la forme  $\rho = h(p, t)$  la méthode précédente s'appliquerait, les surfaces d'égale densité seraient des surfaces fluides puisque le liquide est supposé incompressible et l'absurdité signalée serait inéluctable si  $D$  n'était pas constant.

*Pour une masse hétérogène et incompressible, il est impossible que la famille des surfaces d'égale densité coïncide constamment avec la famille des surfaces d'égale pression au cours des petits mouvements au voisinage de la sphère.*

Une relation de la forme  $\rho = h(p, t)$  est donc impossible, ce qui implique, on l'a vu, l'inexistence des potentiels  $\Phi$  et  $Q$ .

*Pour les petits mouvements au voisinage de la sphère d'un fluide hétérogène incompressible, il n'y a ni potentiel de la pesanteur ni potentiel des accélérations.*

## § 10. Le cas d'un astre perturbateur

Si un corps étranger attire l'astre envisagé, son potentiel sera transcrit dans le second membre de l'équation fondamentale (14) qui s'écrit

$$\int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS + 4\pi i \int \frac{1}{r} \rho dz = \Phi_S - 4\pi Q_P - \int \frac{1}{r} \Delta Q dc - 4\pi i \int \frac{1}{r} \rho dV.$$

Pour simplifier les écritures, supposons qu'il n'y ait qu'un corps perturbateur et supposons sa forme sphérique. Soient  $m$  sa masse et  $l$  sa distance au centre de l'astre primitif. Le dernier terme s'écrit, comme on le sait,

$$- 4\pi i \frac{m}{r};$$

$\gamma$  étant l'angle du vecteur  $OP$  avec la droite qui unit les centres, on aura pour ce corps étranger

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{l} \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\frac{\tau}{l}\right)^q X_q(\cos \gamma).$$

Le système fondamental s'écrit encore, par identification en  $\tau$ , pour tout fluide à relation  $\rho = h(p, t)$

$$[R]_q = \begin{cases} iM - \frac{1}{4\pi} \int \Delta Q dc & q = -1 \\ \Phi(j, t) - Y_0 - \frac{im}{l} & q = 0 \\ -(2q + 1) [Y_q(j, \theta, \psi, t) + im \frac{1}{l^{q+1}} X_q(\cos \gamma)]. & \end{cases}$$

Si le fluide est incompressible  $\Delta Q = 0$ , les fonctions  $Y_q$  sont celles du développement de  $Q$  et  $Y_0$  peut être supposée nulle. Enfin, les termes en  $Y_1$  et  $i \frac{m}{l^2} X_1(\cos \gamma)$  sont: l'un le potentiel d'une accélération spatialement constante, et l'autre le potentiel d'un champ de force spatialement constant dirigé vers l'astre perturbateur. Ces deux termes s'entre-

détruisent si l'on repère, comme nous le supposons toujours, le mouvement du fluide au moyen d'un système d'axe de direction fixe attaché au centre de gravité. On sait en effet qu'en obéissant à un champ de gravitation on le supprime. Il n'y aura donc pas lieu de tenir compte de l'équation  $q = \pm 1$  qui est identiquement satisfaite.

Les équations en  $e$  deviennent pour  $q > 1$

$$(39) \quad -\frac{4\pi i}{2q \pm 1} \{e\}_q = Y_q(\theta, \psi, t) + \frac{im}{l^{q+1}} X_q(\cos \gamma).$$

Le second membre de l'équation précédente sera représenté par  $Z_q(\theta, \psi, t)$ . Nous aurons donc

$$(40) \quad \{e\}_q = -\frac{2q \pm 1}{4\pi i} Z_q(\theta, \psi, t).$$

La fonction  $Z_q$  contient encore, par l'intermédiaire de  $\gamma$ , les coordonnées polaires  $\theta'$  et  $\psi'$  de l'astre perturbateur mais il est inutile de les y faire figurer. Nous poserons comme précédemment

$$Z_q(\theta, \psi, t) = \sum_{m=-q}^{+q} \alpha_{q,m}(t) Y_{q,m}(\theta, \psi).$$

Pour une masse homogène et incompressible, l'équation (40) donne, par des calculs analogues à ceux du § 8

$$(41) \quad e_q = \mu_q j^{q-2} Z_q(\theta, \psi, t).$$

Le potentiel des accélérations pour les déplacements radiaux fournit

$$(42) \quad \eta_q'' = -q j^{q-2} Y_q(\theta, \psi, t),$$

et sur la surface libre on a à chaque instant  $e = \eta$  d'où

$$Z_q'' + \omega_q^2 Y_q = 0;$$

mais nous avons posé, pour passer de (39) à (40)

$$Z_q = Y_q + \frac{im}{l^{q+1}} X_q(\cos \gamma).$$

On peut éliminer  $Y_q$  entre ces deux dernières équations et il vient

$$(43) \quad Z_q'' + \omega_q^2 Z_q = + \omega_q^2 \frac{im}{l^{q+1}} X_q (\cos \gamma).$$

C'est une équation en  $t$  à coefficient constant avec second membre. Son intégration pourrait se faire comme précédemment sur les coefficients  $\alpha$ . Les équations seraient de la forme plus simple

$$(44) \quad \alpha''(t) + \omega^2 \alpha(t) = h(t).$$

La solution générale de cette dernière équation peut s'écrire, comme on le vérifie facilement,

$$\alpha = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t h(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

et l'on a

$$\alpha' = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t + \int_0^t h(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau.$$

Pour  $t=0$   $\alpha$  et  $\alpha'$  se réduisent comme précédemment à

$$\alpha(0) = B \quad \text{et} \quad \alpha'(0) = \omega B.$$

L'équation (43) admet donc la solution suivante

$$Z_q(\theta, \psi, t) = Y_q^1(\theta, \psi) \cos \omega_q t + Y_q^2(\theta, \psi) \sin \omega_q t \\ + im \frac{\omega_q}{l^{q+1}} \int_0^t X_q(\cos \gamma) \sin \omega_q(t-\tau) d\tau.$$

Si  $m$  est nulle,  $Z_q$  se réduit à la vibration fondamentale d'ordre  $q$  rencontrée précédemment. La déformation radiale s'écrit

$$e = \sum_{q=2}^{+\infty} j^{q-2} \mu_q Z_q(\theta, \psi, t).$$

A l'instant initial, on pourra se donner  $e(0)$  et sa dérivée  $e'(0)$  sur la

surface libre en respectant les conditions relatives au volume et au centre de gravité par rapport aux axes entraînés. On a en effet

$$e(0) = \sum_{q=2}^{\infty} j_1^{q-2} \mu_q Y_q^1(\theta, \psi)$$

$$e'(0) = \sum_{q=2}^{\infty} j_1^{q-2} \omega_q \mu_q Y_q^2(\theta, \psi)$$

conditions qui déterminent les fonctions sphériques  $Y_q^1$  et  $Y_q^2$ .

Les mêmes propriétés qu'en l'absence d'un corps perturbateur se présentent ici.

*Les positions initiales et les vitesses radiales initiales des points de la surface libre peuvent être données, à l'avance et le mouvement est entièrement déterminé à partir de là.*

*Les particules au cours de leur petit mouvement restent à pression constante pour un fluide homogène et incompressible.*

*Le potentiel d'une zone reste constant à l'intérieur de la cavité.*

*La zone peut être supprimée sans que cela change le mouvement de la cavité.*

*Les molécules pour une masse hétérogène et incompressible ne peuvent pas non plus rester à pression constante dans toute la masse fluide au cours de leur petit mouvement, même s'il y a un astre perturbateur. Cette dernière proposition s'établit ainsi. On aurait  $e \equiv \eta$  d'où  $e'' \equiv \eta''$ , d'où  $\{e''\} \equiv \{\eta''\}$  mais cette relation implique par (40) et (42)*

$$Z_q''(\theta, \psi, t) = -\frac{8\pi}{3} q \frac{q-1}{2q+1} i D Y_q(\theta, \psi, t).$$

$Z_q''$  et  $Y_q$  ne contenant pas  $j$  il faudrait que  $D$  fût une constante. *Pour une masse hétérogène il est encore impossible que les surfaces d'égale densité coïncident au point de vue géométrique avec les surfaces d'égale pression et il n'y a ni potentiel de la pesanteur ni potentiel des accélérations.*

*Remarques sur les marées.* 1° *Daniel Bernoulli*, qui est un des précurseurs de la théorie des marées, s'était posé la question suivante : quelle serait la forme de l'océan si l'astre perturbateur restait immobile par rapport à la terre ? La réponse est immédiate pour un astre complètement fluide.

En effet, cette configuration d'équilibre répond à la solution particulière  $\alpha = \frac{1}{\omega^2} \mathfrak{h}$  de l'équation (44) en  $\alpha$  où  $\mathfrak{h}$  est alors constant. La déformation totale est pour cette marée statique

$$e = \frac{3}{8\pi} \frac{m}{M} \left(\frac{j_1}{j}\right)^3 \sum_{q=2}^{\infty} \frac{2q+1}{q-1} \left(\frac{j}{l}\right)^{q+1} X_q(\cos \gamma).$$

La déformation principale, celle d'ordre 2 s'écrit

$$e_2 = \frac{15}{8\pi} \frac{m}{M} \left(\frac{j_1}{l}\right)^3 X_2(\cos \gamma).$$

Le polynôme de Legendre  $X_2$  présente deux maxima, l'un dans la direction de l'astre, l'autre dans le sens opposé. Ce sont les deux marées hautes aux antipodes l'une de l'autre.

2° Il est clair que s'il y a plusieurs corps perturbateurs, les déformations s'ajouteront tout simplement et au lieu des termes en  $i m$  nous aurions une somme de termes semblables en  $i m, i m', i m'', \dots$

3° Il ne serait pas difficile d'étudier par cette méthode les petits mouvements de deux corps fluides homogènes s'attirant mutuellement et situés assez près l'un de l'autre pour qu'il y ait lieu de faire intervenir les changements de forme de l'un dans le calcul des changements de forme de l'autre.

## § 11. Petites vibrations au voisinage d'un état d'équilibre relatif

Envisageons un astre en état d'équilibre relatif. Il doit, comme on le sait, tourner autour d'un axe de direction fixe passant par son centre de gravité avec une vitesse angulaire constante.

Soit  $x, y, z$  un système d'axe solidaire du corps dans cet état d'équilibre relatif. On considérera ce système comme fixe et on ajoutera aux forces données les deux forces fictives : centrifuge et centrifuge composée. Les équations (1) s'écrivent

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \omega x + \text{force centr. comp.} - \gamma_x, \dots, \dots$$

Soit alors  $\lambda$  l'ordre de grandeur des petits mouvements ; la force centrifuge comp. sera de l'ordre de  $\lambda \omega$ . Si  $\lambda$  est lui-même de l'ordre de  $\omega^2$  la

force centrifuge composée de l'ordre  $\omega^3$  est négligeable vis-à-vis des termes en  $\omega^2$  qui créent l'aplatissement. Les équations précédentes se résument alors ainsi

$$\Phi = U + Q + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Le potentiel des accélérations est actuellement formé des deux derniers termes changés de signe, —  $Q$  reste toujours le potentiel pour les petits mouvements. Il nous faut poser

$$e = \omega^2 e^{(1)} + \lambda e^{(2)}$$

pour mettre en évidence les deux déformations: celle qui provient de la rotation d'ensemble et celle qui provient des déformations passagères. Le système fondamental s'écrit

$$[R]_q = \begin{cases} i M - \frac{2}{3} \omega^2 t^3 - \int \Delta Q dc & q = -1 \\ \Phi(j, t) - \omega^2 t^2 & q = 0 \\ 0 & q = 1 \\ \frac{5}{3} \omega^2 X_2(\cos \theta) - 5 Y_2(j, \theta, \psi, t) & q = 2 \\ -(2q + 1) Y_q(j, \theta, \psi, t) & q = 3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

L'approximation d'ordre zéro est la même que précédemment. L'approximation d'ordre un donne

$$4\pi i \{e\}_q = \begin{cases} -\frac{2}{3} \omega^2 t^3 & q = -1 \\ -\omega^2 t^2 & q = 0 \\ 0 & q = 1 \\ -\frac{5}{3} \omega^2 X_2(\cos \theta) - 5 Y_2(j, \theta, \psi, t) & q = 2 \\ -(2q + 1) Y_q(j, \theta, \psi, t) & q = 3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

Il faut identifier les termes en  $\omega^2$  et les termes en  $\lambda$ . La première identification donne

$$4 \pi i \{ e^{(1)} \}_q = \begin{cases} -\frac{2}{3} t^3 & q = -1 \\ -t^2 & q = 0 \\ -\frac{5}{3} X_2 (\cos \theta) & q = 2 \\ 0 & q = 1, 3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

*système qui résume la théorie classique de Clairaut sur les figures d'équilibre planétaires.*

La seconde identification redonne le système envisagé précédemment et pour  $q > 1$  on a

$$\{ e^{(2)} \}_q = -\frac{2q+1}{4\pi i} Y_q(j, \theta, \psi, t).$$

Les deux déformations ne font que s'ajouter en première approximation. Il faudrait pousser jusqu'au terme en  $\omega^3$  pour les voir s'influencer l'une l'autre, mais alors il faudrait faire intervenir également la force centrifuge composée qui pourrait être de cet ordre-là suivant l'ordre du rapport  $\lambda/\omega^2$ .

*En ce qui concerne les petites vibrations, les mêmes conclusions que précédemment subsistent, tant pour une masse homogène que pour une masse hétérogène.*

*Pour une masse homogène et incompressible, on peut encore supprimer les zones sans troubler l'équilibre relatif ni les vibrations propres des cavités correspondantes.* Cette propriété existe aussi pour les ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi. Nos recherches peuvent être poursuivies dans plusieurs directions mais nous nous contenterons d'indiquer ici ce point de départ.

## § 12. L'équation de continuité pour les petits mouvements

L'équation de continuité avait pu être négligée tant qu'il s'était agi d'équilibre relatif ou de rotation permanente. Actuellement il faut en tenir compte.

Le mouvement d'une particule  $x, y, z$  peut être représenté par les équations

$$\begin{aligned} x &= a + X(a, b, c, t) \\ y &= b + Y(a, b, c, t) \\ z &= c + Z(a, b, c, t). \end{aligned}$$



Pour les petits mouvements au voisinage d'un état stable, d'équilibre, on peut fort bien supposer que  $a, b, c$  sont les coordonnées de la particule dans l'état de repos. Les fonctions  $X, Y, Z$  seront supposées petites d'un ordre de grandeur  $\lambda$ , de même que les dérivées

$$\frac{d\rho(x, y, z, t)}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\rho(x, y, z, t)}{\partial t}$$

et nous pourrons négliger systématiquement les quantités du second ordre en

$$X, Y, Z, \frac{\partial X}{\partial a}, \dots, \frac{d\rho}{dt}, \frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Le passage des coordonnées d'Euler à celles de Lagrange se simplifie car on a, par exemple,

$$X(x, y, z, t) = X(a, b, c, t) + \frac{\partial X}{\partial a} X + \dots$$

et ici le dernier terme écrit et les suivants doivent être négligés. Vitesses et accélérations s'écrivent

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt} & \gamma_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2X}{dt^2} \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dY}{dt} & \gamma_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2Y}{dt^2} \\ V_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{dZ}{dt} & \gamma_z &= \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2Z}{dt^2}. \end{aligned}$$

L'équation de continuité s'exprime ainsi, avec les coordonnées d'Euler :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0,$$

la dérivée de  $\rho$  est prise en suivant la particule. Dérivons cette relation par rapport à  $t$  le long des trajectoires, on trouve

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{\partial\gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_z}{\partial z} = 0.$$

Si le potentiel des accélérations  $-Q$  existe, cette relation s'écrit plus simplement

$$(45) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d^2 \rho}{dt^2} = \Delta Q.$$

On vérifierait aisément que pour les petits mouvements, l'existence du potentiel des accélérations  $-Q$  implique l'existence d'un potentiel des vitesses  $-\varphi$ , avec

$$\varphi = \int_0^t Q dt$$

et même d'un potentiel des déplacements  $-\Psi$

$$\Psi = \int_0^t dt \int_0^t Q dt.$$

L'équation de continuité elle-même s'écrirait

$$(46) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \Delta \varphi = \int_0^t \Delta Q dt.$$

Si le fluide est incompressible, la densité reste la même le long des trajectoires et le potentiel des accélérations est harmonique  $\Delta Q = 0$  comme le montre (45). Réciproquement si le potentiel des accélérations est harmonique, le fluide est incompressible, comme le montre l'équation (46).

### § 13. Sur le déplacement radial des particules

Soit maintenant  $j$  le rayon vecteur du point  $a, b, c$  et soit  $j\eta$  la projection sur ce rayon du déplacement  $X, Y, Z$  de la particule. On a évidemment

$$j\eta = \frac{a}{j} X + \frac{b}{j} Y + \frac{c}{j} Z.$$

Dérivons deux fois par rapport à  $t$  en suivant la particule

$$j\eta'' = \frac{a}{j}\gamma_x + \frac{b}{j}\gamma_y + \frac{c}{j}\gamma_z$$

et s'il existe un potentiel des accélérations  $-Q(a, b, c, t)$

$$-j^2\eta'' = a\frac{\partial Q}{\partial a} + b\frac{\partial Q}{\partial b} + c\frac{\partial Q}{\partial c}.$$

Si le potentiel  $Q$  est holomorphe dans le fluide, on peut au voisinage de chaque point, le développer en une somme de polynômes homogènes en  $a, b, c$

$$Q = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(a, b, c, t).$$

Le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes permet d'écrire

$$j^2\eta'' = -\sum_{n=1}^{\infty} n P_n(a, b, c, t).$$

Pour un fluide incompressible, le potentiel  $Q$  est harmonique, donc holomorphe, et les  $P_n$  sont les polynômes harmoniques dont la valeur sur une sphère de rayon  $j$  est la même que celle d'une fonction sphérique  $Y_n(\theta, \psi, t)$  des deux angles  $\theta$  et  $\psi$ . On peut donc écrire, tout au moins au voisinage de l'origine :

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} j^n Y_n(\theta, \psi, t).$$

L'accélération radiale rapportée au rayon  $\eta''$  sera définie dans ce cas par

$$\eta'' = -\sum_{n=1}^{\infty} n j^{n-2} Y_n(\theta, \psi, t),$$

relation très importante, comme nous l'avons vu, pour l'étude des petites vibrations.

La portée et la signification de cette méthode apparaissent d'autant mieux qu'on s'attaque à des problèmes plus difficiles.

(Reçu le 20 juin 1931)