

# Ueber das Hurwitzsche Problem der Bestimmung der Anzahl Riemannscher Flächen von gegebener Verzweigungsart.

Autor(en): **Weyl, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **3 (1931)**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4679>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Ueber das Hurwitzsche Problem der Bestimmung der Anzahl Riemannscher Flächen von gegebener Verzweigungsart

Von H. WEYL, Göttingen

(Aus einem Briefe an Herrn W. Saxer, Zürich)

Für die von der mathematisch-physikalischen Abteilung der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich vorbereitete Ausgabe der mathematischen Abhandlungen von *A. Hurwitz* hatten Sie mir die Arbeit *Math. Ann.* 39: Ueber Riemannsche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten, zur Durchsicht überwiesen. Ich bemerkte sogleich, daß mit den heute zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln der Gruppencharaktere die Aufgabe der Anzahlbestimmung durchsichtiger, allgemeiner und vollständiger gelöst werden könne, als es *Hurwitz* damals, 1891, gelungen war. Erst nachträglich wurde ich darauf aufmerksam, daß *Hurwitz* selbst die Gruppencharaktere, nachdem ihre Theorie von *Frobenius* entwickelt worden war, auf sein Problem angewandt hat: *Math. Ann.* 55, 1902, S. 53. Jedoch kommt man zu den durchsichtigsten Formeln erst, wenn man alle Klassen simultan behandelt und nicht, wie das *Hurwitz* tut, sich auf den Fall einfacher Verzweigungen, d. i. die Klasse der Transpositionen beschränkt. Gestatten Sie mir, Ihnen diese Formeln hier samt ihrer Begründung kurz zusammenzustellen.

I.  $\mathfrak{g}$  sei die symmetrische Gruppe der Permutationen von  $n$  Ziffern,  $h$  ihre Ordnung  $= n!$ . Es seien Klassen  $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_w$  konjugierter Elemente von  $\mathfrak{g}$  in der Anzahl  $w$  und in bestimmter Reihenfolge vorgegeben. Solange man von der Forderung absieht, daß die  $n$ -blättrige Riemannsche Fläche zusammenhängend sein soll, und ferner absieht von der Willkürlichkeit der Numerierung der  $n$  Blätter, ist die von *Hurwitz* gesuchte Anzahl keine andere als *die Anzahl  $N$  der Lösungen der Gleichung*

$$(1) \quad s_1 s_2 \dots s_w = 1,$$

wenn für das Element  $s_i$  von  $\mathfrak{g}$  vorgeschrieben ist, daß es der Klasse  $\mathfrak{f}_i$  entnommen werden soll. Diese Fragestellung enthält nichts, was sie an die spezielle symmetrische Permutationsgruppe  $\mathfrak{g}$  bindet; sie sei

darum hier behandelt für eine beliebige endliche abstrakte Gruppe  $\mathfrak{g}$ . Die Anzahl der Lösungen von

$$s_1 s_2 \dots s_w = s, \quad s_i \text{ in } \mathfrak{f}_i,$$

heiße  $N_s$ . Sie ist offenbar nur abhängig von der Klasse  $\mathfrak{f}$ , welcher  $s$  angehört, und werde darum in ihrer Abhängigkeit von  $\mathfrak{f}$  mit  $N(\mathfrak{f})$  bezeichnet. Denn aus einer Lösung für  $s$  erhält man eine solche für das konjugierte Element  $r^{-1} s r$ , indem man jedes  $s_i$  durch das entsprechende  $r^{-1} s_i r$  ersetzt.

Ist  $s \rightarrow U(s)$  eine irreduzible Darstellung des Grades  $g$  und vom Charakter  $\chi(s) = \chi(\mathfrak{f})$ , so ist die über alle Elemente  $t$  einer Klasse  $\mathfrak{f}$  erstreckte Summe der  $U(t)$  ein Multiplum  $\zeta(\mathfrak{f}) \cdot E$  der Einheitsmatrix  $E$ , weil sie mit allen  $U(s)$  vertauschbar ist:

$$(2) \quad \sum_{t \text{ in } \mathfrak{f}} U(t) = \zeta(\mathfrak{f}) \cdot E.$$

Bedeutet  $n(\mathfrak{f})$  die Anzahl der Elemente  $t$  in  $\mathfrak{f}$ , so liefert die Spur der Gleichung (2) sofort als den Wert des Proportionalitätsfaktors

$$\zeta(\mathfrak{f}) = \frac{n(\mathfrak{f}) \chi(\mathfrak{f})}{g}.$$

Bildet man die Summe

$$\sum U(s_1 s_2 \dots s_w) = \sum U(s_1) U(s_2) \dots U(s_w),$$

in welcher die  $s_i$  unabhängig voneinander je ihre Klasse  $\mathfrak{f}_i$  durchlaufen, so erhält man rechts die Einheitsmatrix, multipliziert mit dem Faktor  $\zeta(\mathfrak{f}_1) \zeta(\mathfrak{f}_2) \dots \zeta(\mathfrak{f}_w)$ , links aber

$$\sum_s N_s \cdot U(s) = \sum_{\mathfrak{f}} N(\mathfrak{f}) \cdot \zeta(\mathfrak{f}) E.$$

Folglich ist

$$\frac{1}{g} \sum_{\mathfrak{f}} n(\mathfrak{f}) \chi(\mathfrak{f}) N(\mathfrak{f}) = \zeta(\mathfrak{f}_1) \dots \zeta(\mathfrak{f}_w).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $g \cdot \chi(\mathfrak{f}^{-1})$  und summiert alsdann über alle primitiven Charaktere  $\chi$ , so ergibt sich wegen der Vollständigkeitsrelation für die Charaktere:

$$N(\mathfrak{f}) = \frac{1}{h} \sum_{\chi} \left\{ g \chi(\mathfrak{f}^{-1}) \cdot \prod_i \zeta(\mathfrak{f}_i) \right\},$$

insbesondere

$$(3) \quad \boxed{\frac{N}{h} = \sum_{\chi} \left( \frac{g}{h} \right)^2 \zeta(\mathfrak{f}_1) \dots \zeta(\mathfrak{f}_w)}.$$

Die Zahlen  $\zeta(\mathfrak{f})$  sind stets *ganz* algebraisch.

2. Dies Ergebnis werde spezialisiert für die symmetrische Permutationsgruppe  $\mathfrak{g}$  der Ordnung  $h = n!$ . Hier gehört jede irreduzible Darstellung zu einem *Symmetrieschema*, dessen Zeilenlängen  $\nu_i$  den Bedingungen genügen

$$(4) \quad \nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots, \quad \nu_1 + \nu_2 + \dots = n.$$

Ist  $c$  mit den Komponenten  $c(s)$  der zugehörige *Youngsche* Symmetriepoperator<sup>1)</sup>, so ist

$$\chi(s) = \frac{g}{n!} \sum_r c(r^{-1} s r) \quad \text{oder} \quad \chi(\mathfrak{f}) = \frac{g}{n(\mathfrak{f})} \cdot \sum_{t \text{ in } \mathfrak{f}} c(t),$$

$$\boxed{\zeta(\mathfrak{f}) = \sum_{t \text{ in } \mathfrak{f}} c(t)}.$$

Der Grad  $g$  des Charakters berechnet sich aus der über alle  $n!$  Permutationen  $s$  zu erstreckenden Summe

$$\frac{n!}{g} = \sum_s c(s) c(s^{-1}).$$

*Hurwitz* interessiert sich für den Fall, daß  $\mathfrak{f}_1 = \dots = \mathfrak{f}_w = \mathfrak{f}$  die Klasse der Transpositionen ist. Für eine Transposition  $s$  ist  $c(s) = +1$  oder  $-1$ , je nachdem sie zwei Ziffern in derselben *Zeile* oder in derselben *Spalte* vertauscht, sonst aber  $= 0$ . Werden die Spaltenlängen des Schemas mit  $\nu_1^*, \nu_2^*, \dots$  bezeichnet, so ist darum  $\zeta(\mathfrak{f})$  für die Klasse  $\mathfrak{f}$  der Transpositionen gleich

$$\zeta = \left\{ \frac{\nu_1(\nu_1 - 1)}{2} + \frac{\nu_2(\nu_2 - 1)}{2} + \dots \right\} - \left\{ \frac{\nu_1^*(\nu_1^* - 1)}{2} + \frac{\nu_2^*(\nu_2^* - 1)}{2} + \dots \right\}.$$

<sup>1)</sup> *H. Weyl*, Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2. Aufl., 1931, S. 315.

Zu jedem Schema gehört ein *duales*, das aus ihm durch die Vertauschung der Zeilen mit den Spalten entsteht, demnach zu jedem primitiven Charakter  $\chi$  ein dualer  $\chi^*$ , derart daß

$$\chi^*(\mathfrak{f}) = \text{sgn}(\mathfrak{f}) \cdot \chi(\mathfrak{f}), \quad g^* = g$$

gilt;  $\text{sgn}(\mathfrak{f})$  ist  $= \pm 1$ , je nachdem die Klasse aus geraden oder ungeraden Permutationen besteht. Die Formel (3) ergibt daher  $N = 0$ , außer wenn

$$\prod_{i=1}^w \text{sgn}(\mathfrak{f}_i) = + 1$$

ist. Diese Tatsache wird gewöhnlich in der Form ausgesprochen, daß die gesamte Verzweigungszahl gerade sein muß.

Die eleganteste Berechnung der Charaktere der Permutationsgruppe resultiert nach *Frobenius* aus ihrer Verbindung mit der kontinuierlichen Gruppe aller linearen Transformationen.<sup>2)</sup> Von einer festen Anzahl  $\rho$  von Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_\rho$  stellt man sich die Potenzsummen her

$$\sigma_m = x_1^m + x_2^m + \dots + x_\rho^m.$$

Besteht die Klasse  $\mathfrak{f}$  aus denjenigen Permutationen, die  $k_1$  ziffernfremde Zykeln der Ordnung 1,  $k_2$  der Ordnung 2, ... enthalten ( $1 k_1 + 2 k_2 + \dots = n$ ), so setze man

$$\sigma(\mathfrak{f}) = \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \dots$$

Gehört der primitive Charakter  $\chi$  zu dem Symmetrieschema mit den Zeilenlängen  $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_\rho$ , so kennzeichne man das Schema durch die fallende Reihe ganzer nicht-negativer Zahlen:

$$h_1 = \nu_1 + (\rho - 1), \dots, \quad h_{\rho-1} = \nu_{\rho-1} + 1, \quad h_\rho = \nu_\rho + 0.$$

Dann gilt

$$\sum_{\mathfrak{f}} \frac{n(\mathfrak{f})}{n!} \chi(\mathfrak{f}) \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \dots = \frac{|x^{h_1}, \dots, x^{h_\rho}|}{|x^{\rho-1}, \dots, 1|}$$

(die Zeilen der Determinante entstehen aus der hingeschriebenen, indem für  $x$  sukzessive die Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_\rho$  genommen werden). Der

<sup>2)</sup> l. c., S. 292 u. 335.

Grad  $g$  des Charakters drückt sich mit Hilfe des Differenzenproduktes  $D$  der Ziffern  $h_1, \dots, h_\rho$  in der Gestalt aus

$$(5) \quad \frac{g}{n!} = \frac{D(h_1, \dots, h_\rho)}{h_1! \dots h_\rho!}.$$

Darum haben wir schließlich

$$(6) \quad \sum_{\mathfrak{f}} \zeta(\mathfrak{f}) \sigma(\mathfrak{f}) = L_{(h)}(x) = \frac{h_1! \dots h_\rho!}{D(h_1, \dots, h_\rho)} \cdot \frac{|x^{h_1}, \dots, x^{h_\rho}|}{|x^{\rho-1}, \dots, 1|}.$$

Wenn aber das Symmetrieschema *mehr* als  $\rho$  Zeilen enthält, ist die Summe (6) gleich Null.

Die oben  $N$  genannte Zahl der Lösungen der Gleichung

$$s_1 s_2 \dots s_w = 1,$$

in der  $s_i$  eine Permutation von  $n$  Ziffern sein soll, die der vorgeschriebenen Klasse  $\mathfrak{f}_i$  entstammt, werde jetzt genauer mit

$$(7) \quad N = f_n(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_w)$$

bezeichnet. Wir brauchen  $w$  Sätze von je  $\rho$  Variablen, welche durch einen darübergesetzten Index  $1, 2, \dots, w$  unterschieden werden. An Stelle der Anzahlen (7) benutzen wir jetzt die Zusammenfassung

$$(8) \quad \sum_{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots} \frac{f_n(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots)}{n!} \sigma^1(\mathfrak{f}_1) \sigma^2(\mathfrak{f}_2) \dots$$

und erhalten dafür nach (3) und (6) die über alle möglichen Symmetrieschemen von höchstens  $\rho$  Zeilen zu erstreckende Summe

$$\sum \left( \frac{D(h_1, \dots, h_\rho)}{h_1! \dots h_\rho!} \right)^2 L_{(h)}^1(x) L_{(h)}^2(x) \dots$$

Das Polynom (8) bestimmt die darin als Koeffizienten auftretenden Anzahlen  $f_n(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots)$  eindeutig, wenn  $\rho \geq n$  gewählt ist; denn dann sind die ersten  $n$  Potenzsummen der Variablen  $x$  algebraisch unabhängig. Es ist aber zweckmäßig, formal die verschiedenen Anzahlen  $n = 0, 1, 2, \dots$  additiv zusammenzufassen und aus den Bestandteilen (8) die „erzeugende Funktion“

$$(9) \quad F(x^1, x^2, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{f_1, f_2, \dots} \frac{1}{n!} f_n(f_1, f_2, \dots) \sigma^1(f_1) \sigma^2(f_2) \dots,$$

zu bilden, in welcher das Glied  $n = 0$  per definitionem gleich 1 sein soll. Man hat dann zur Bestimmung der Anzahlen  $f_n$  die Gleichung

$$(10) \quad F = \sum \left( \frac{D(h_1, \dots, h_\rho)}{h_1! \dots h_\rho!} \right)^2 L_{(h)}^1(x) L_{(h)}^2(x) \dots;$$

rechts ist über alle ganzen Zahlen  $h_i$  zu summieren, welche die Ungleichungen

$$h_1 > h_2 > \dots > h_\rho \geq 0$$

erfüllen.

3. Diese Zusammenfassung zu einer erzeugenden Funktion ist nun auch geeignet, um aus den Riemannschen Flächen der vorgegebenen Verzweigungsart die *zusammenhängenden* auszuscheiden, d. h. die Anzahl

$$\varphi_n(f_1, f_2, \dots, f_w)$$

derjenigen Lösungen  $\{s_i\}$  von (I) zu bestimmen, für welche die aus  $s_1, s_2, \dots, s_w$  erzeugte Permutationsgruppe *transitiv* ist. Entsprechend (9) bilden wir die erzeugende Funktion

$$(11) \quad \Phi(x^1, x^2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{f_1, f_2, \dots} \frac{\varphi_n(f_1, f_2, \dots)}{n!} \sigma^1(f_1) \sigma^2(f_2) \dots$$

und behaupten, daß die Gleichung

$$(12) \quad F = e^\Phi \quad \text{oder} \quad \Phi = \lg F$$

besteht. Dazu führt eine ganz elementare kombinatorische Betrachtung<sup>3)</sup>. Die Ziffern von 1 bis  $n$  seien auf  $r$  getrennte Reihen von bzw.  $n', n'', \dots, n^{(r)}$  Ziffern verteilt:

$$(13) \quad n^{(i)} \geq 1, \quad n' + n'' + \dots + n^{(r)} = n.$$

Eine Permutation  $s$ , welche nur Ziffern innerhalb der einzelnen Reihen vertauscht, hat die Form

<sup>3)</sup> Analog verfährt *Hurwitz*, Math. Ann. 55 (1902), 61—65.

$$(14) \quad s = s' s'' \dots s^{(r)},$$

wo  $s'$  eine Vertauschung der  $n'$  Ziffern der ersten Reihe ist,  $s''$  eine Vertauschung der  $n''$  Ziffern der zweiten Reihe und so fort. Wir suchen jetzt diejenigen Lösungen von (1), bei welchen alle  $s_i$  nur die Ziffern unserer Reihen untereinander vertauschen, aber die aus  $s_1, s_2, \dots, s_w$  erzeugte Gruppe innerhalb jeder dieser Ziffernreihen transitiv ist. Nennen wir ihre Anzahl  $\varphi(n', n'', \dots, n^{(r)})$ , so ist offenbar

$$(15) \quad \varphi(n', \dots, n^{(r)}) = \sum \varphi_{n'}(\mathfrak{f}_1', \mathfrak{f}_2', \dots) \dots \varphi_{n^{(r)}}(\mathfrak{f}_1^{(r)}, \mathfrak{f}_2^{(r)}, \dots),$$

wo die Summe sich über die möglichen Zerlegungen von  $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots$  gemäß den Gleichungen

$$(16) \quad \begin{cases} \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_1' \mathfrak{f}_1'' \dots \mathfrak{f}_1^{(r)}, \\ \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_2' \mathfrak{f}_2'' \dots \mathfrak{f}_2^{(r)}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

erstreckt.  $\mathfrak{f}_i'$  ist hier natürlich eine Klasse von Permutationen der in der ersten Reihe liegenden  $n'$  Ziffern, entsprechend  $\mathfrak{f}_i''$  und so fort, und die Gleichungen sind in demselben Sinne zu verstehen wie die Zerlegung (14). Nun liefert eine einfache Abzählung für  $n \geq 1$ :

$$f_n = \sum_{r=1, \dots} \frac{1}{r!} \sum \frac{n!}{n'! n''! \dots n^{(r)!}} \varphi(n', n'', \dots, n^{(r)}).$$

In der inneren Summe gelten die Beschränkungen (13). Mit der Abkürzung

$$\frac{1}{n!} \varphi_n = \varphi_n^*, \quad \frac{1}{n!} f_n = f_n^*$$

ist daher nach (15):

$$(17) \quad f_n^* = \sum_{r=1, \dots} \frac{1}{r!} \sum \varphi_{n'}^*(\mathfrak{f}_1', \mathfrak{f}_2', \dots) \dots \varphi_{n^{(r)}}^*(\mathfrak{f}_1^{(r)}, \mathfrak{f}_2^{(r)}, \dots).$$

Die innere Summe erstreckt sich über die durch (13) gebundenen  $n', n'', \dots, n^{(r)}$ , sowie über die Zerlegungen (16). Mit

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}' \mathfrak{f}'' \dots \mathfrak{f}^{(r)} \quad \text{ist} \quad \sigma(\mathfrak{f}) = \sigma(\mathfrak{f}') \sigma(\mathfrak{f}'') \dots \sigma(\mathfrak{f}^{(r)}).$$

Darum läßt sich die Rekursionsformel (17) zusammenfassen zu der behaupteten Gleichung

$$F = 1 + \sum_{r=1, \dots} \frac{1}{r!} \Phi^r.$$

Umgekehrt kann die Gleichung

$$\Phi = \lg F = \lg (1 + F') = \sum_{r=1, \dots} \frac{(-1)^{r-1}}{r} F'^r$$

sofort wieder in eine solche umgesetzt werden, die  $\varphi_n$  aus  $f_n$  zu berechnen gestattet:

$$(18) \quad \varphi_n^*(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots) = \sum_{r=1, \dots} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \sum f_n^*(\mathfrak{f}_1', \mathfrak{f}_2', \dots) \dots f_n^{*(r)}(\mathfrak{f}_1^{(r)}, \mathfrak{f}_2^{(r)}, \dots)$$

mit den gleichen Summationsbedingungen wie in (17).

4. Um linke und rechte Seite der Gleichung (10) möglichst direkt vergleichen zu können, muß man die rechts auftretende symmetrische Funktion

$$\frac{|x^{h_1}, \dots, x^{h_\rho}|}{|x^{\rho-1}, \dots, 1|} = X(x)$$

der Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_\rho$  durch die Potenzsummen  $\sigma_m$  ausdrücken. Das geschieht folgendermaßen. Das Reziproke des „charakteristischen Polynoms“

$$\omega(z) = (1 - x_1 z) (1 - x_2 z) \dots (1 - x_\rho z)$$

werde in der Umgebung von  $z = 0$  in eine Potenzreihe entwickelt

$$\frac{1}{\omega(z)} = \pi_0 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \dots = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \pi_i z^i.$$

Aus der Cauchyschen Gleichung

$$(19) \quad \left| \frac{1}{1 - x_i y_x} \right| = \frac{D(x_1, \dots, x_\rho) D(y_1, \dots, y_\rho)}{\prod_{i, x=1, \dots, \rho} (1 - x_i y_x)}$$

ergibt sich dann <sup>4)</sup>

$$(20) \quad X(x) = |\pi_{h-\rho+1}, \dots, \pi_{h-1}, \pi_h|$$

(die  $\rho$  Zeilen der Determinante rechts entstehen dadurch, daß man  $h$  der Reihe nach gleich  $h_1, \dots, h_\rho$  nimmt). Es ist andererseits

$$\lg \frac{1}{\omega(z)} = \sum_t \lg \frac{1}{1 - x_t z} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_t \frac{x_t^n z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{n} z^n.$$

Die  $\pi$  lassen sich also in (20) durch die  $\sigma$  ganzrational ausdrücken mit Hilfe der Gleichung

$$\pi_0 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \dots = \exp \left( \frac{\sigma_1}{1} z + \frac{\sigma_2}{2} z^2 + \dots \right).$$

Für die niedrigsten Fälle  $w = 1$  und  $2$  ist die Bestimmung der Zahlen  $\varphi_n^*$  trivial. Es ist aber ganz instruktiv, unsere Formeln hier durch die Berechnung von  $\Phi$  zu bestätigen.

( $w = 1$ ). Die Formel (5) für den Grad  $g$  entsteht aus der Gleichung <sup>5)</sup>

$$\sigma_1^n = \sum g \cdot X(x),$$

indem man fragt, mit welchem Koeffizienten  $g$  das Glied  $x_1^{h_1} \dots x_\rho^{h_\rho}$  in dem Polynom

$$\sigma_1^n \cdot D(x_1, \dots, x_\rho)$$

vorkommt. Wird auch noch über  $n = 0, 1, 2, \dots$  summiert, so erhält man daher

$$F = \sum \frac{D(h_1, \dots, h_\rho) |x^{h_1}, \dots, x^{h_\rho}|}{h_1! \dots h_\rho! |x^{\rho-1}, \dots, 1|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_1^n}{n!} = e^{\sigma_1}$$

und darum

$$\Phi = \lg F = \sigma_1.$$

<sup>4)</sup> H. Weyl, Math. Zeitschr. 23 (1925), 300.

<sup>5)</sup> H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2. Aufl., S. 337.

Das heißt: die einzige zusammenhängende Riemannsche Fläche, welche nur über *einem* Punkte der komplexen Ebene verzweigt ist ( $w = 1$ ), ist die einblättrige Ebene selber ( $n = 1$ ).

( $w = 2$ ). Nach der Cauchyschen Gleichung (19) gilt

$$\sum |x^{h_1}, \dots, x^{h_p}| \cdot |y^{h_1}, \dots, y^{h_p}| = \frac{|x^{\rho-1}, \dots, 1| \cdot |y^{\rho-1}, \dots, 1|}{\prod_{i, \kappa} (1 - x_i y_\kappa)}$$

Bezeichnen wir daher im Falle  $w = 2$  die beiden Variablensätze von je  $\rho$  Variablen mit  $x$  und  $y$  statt mit  $x^1, x^2$ , so läßt sich die Summe (10) auswerten und liefert:

$$F = \prod_{i, \kappa} \frac{1}{1 - x_i y_\kappa},$$

mithin

$$\Phi = \sum_{i, \kappa} \lg \frac{1}{1 - x_i y_\kappa} = \sum_{i, \kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_i^n y_\kappa^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n(x) \sigma_n(y)}{n}.$$

$\sigma_n(x)$ ,  $\sigma_n(y)$  ist die  $n$ te Potenzsumme der  $x$  bzw.  $y$ . Die Formel für  $\Phi$  enthält das triviale Resultat: Für eine zusammenhängende  $n$ -blättrige Riemannsche Fläche, die nur über zwei Punkten der komplexen Ebene verzweigt ist, muß die Vertauschung  $s$  der Blätter beim Umlauf um den ersten Verzweigungspunkt aus einem einzigen  $n$ -gliedrigen Zykel bestehen, während die entsprechende Vertauschung für den zweiten Verzweigungspunkt  $s^{-1}$  der gleichen Klasse angehört; die Zahl verschiedener solcher Zykeln ist  $\frac{n!}{n}$ .

Die Klasse  $\mathfrak{f}$  der Permutationen von  $n$  Ziffern, welche aus  $k_1, k_2, k_3, \dots$  Zykeln der Ordnung 1, 2, 3, ... besteht, liefert zur Verzweigungszahl den Beitrag (Multiplizität)

$$m(\mathfrak{f}) = 0 \cdot k_1 + 1 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + \dots = n - (k_1 + k_2 + k_3 + \dots).$$

Das Geschlecht  $p$  des einzelnen Gliedes  $\sigma(\mathfrak{f}_1) \sigma(\mathfrak{f}_2) \dots$  in  $F$  führt man danach ein durch die Gleichung

$$2p = m(\mathfrak{f}_1) + m(\mathfrak{f}_2) + \dots + m(\mathfrak{f}_w) - 2(n - 1).$$

Wir haben oben aus der Formel (3) für  $N$  geschlossen, daß nur solche Glieder in  $F$  und darum in  $\Phi$  vorkommen, für welche  $2p$  gerade ist;

denn  $\text{sgn } (f)$  ist  $= (-1)^{m(f)}$ . Eine brauchbare Formel sollte darüber hinaus das sonst auf topologischem, nicht auf gruppentheoretischem Wege abgeleitete Resultat ergeben, daß das Geschlecht  $p$  einer zusammenhängenden Riemannschen Fläche notwendig  $\geq 0$  ist oder daß in  $\Phi$  nur Glieder mit  $p \geq 0$  vorkommen. Liefert sie dies in durchsichtiger Weise, so kann man auch hoffen, daß aus ihr die für  $p = 0$  gültigen Verallgemeinerungen derjenigen einfachen Anzahlformeln hervorgehen, die *Hurwitz* Math. Ann. 39 (1891), 22, angibt. Ich stehe aber im Augenblick der Aufgabe noch ratlos gegenüber, meine Gleichungen (10), (12) für  $\Phi$  so umzuformen, daß diese Dinge in Evidenz gesetzt werden. Wahrscheinlich müßte man dazu die (divergente) Summe  $F$  in ein Produkt verwandeln.

(Eingegangen den 14. März 1931)