Les déformations des systèmes articulés spatiaux très hyperstatiques

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **92 (1966)**

Heft 3

PDF erstellt am: **16.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-68342

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

92e année Lausanne, 12 février 1966 N° 3

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL
de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (SVIA)
de la Section genevoise de la SIA
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'EPF (Ecole polytechnique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE
Président: E Martin, arch. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève
Membres:
Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Grosgurin, arch.; J.-C. Ott, ing.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.; M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION
de la Société anonyme du « Bulletin technique »
Président: D. Bonnard, ing.
Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; J. Favre. arch.; A. Robert, ing.; J.-P. Stucky, ing.
Adresse: Avenue de la Gare 10, 1000 Lausanne

RÉDACTION
D. Bonnard, E. Schnitzler, S. Rieben, ingénieurs; M. Bevilacqua, architecte
Rédaction et Editions de la S.A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Avenue de Cour 27, 1000 Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 40.—	Etranger	Fr. 44.—
Sociétaires	»	» 33.—		
Prix du numéro . . .	»	» 2.—	»	» 2.50

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande », N° 10 - 5775, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, vente au numéro, changement d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie La Concorde, Terreaux 29, 1000 Lausanne

ANNONCES
Tarif des annonces:

1/1 page	Fr. 385.—
1/2 »	» 200.—
1/4 »	» 102.—
1/8 »	» 52.—

Adresse: Annonces Suisses S.A.
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. 1000 Lausanne et succursales

SOMMAIRE

Les déformations des systèmes articulés spatiaux très hyperstatiques, par A. Ansermet, ingénieur, professeur.
Bibliographie. — Les congrès. — Carnet des concours.
Documentation générale. — Documentation du bâtiment. — Nouveautés, informations diverses.

LES DÉFORMATIONS DES SYSTÈMES ARTICULÉS SPATIAUX TRÈS HYPERSTATIQUES

par A. ANSERMET, ingénieur, professeur [1]

La publication dans le numéro 9 de mai dernier d'une solution pour le calcul de coupoles a donné lieu, de la part de praticiens dans le domaine de l'hyperstatique, à des suggestions de natures diverses ; pour un problème aussi complexe, disent ces praticiens, il faut confronter au moins deux solutions. Il est fait allusion surtout à la méthode de B. Mayor qui, pour les systèmes gauches, est encore actuelle avec ses équations aux déformations à la base des calculs ; cette publication de 1926 a vu le jour grâce à l'appui de l'Université de Lausanne et à celui de la Société académique vaudoise. Elle fut préfacée par le professeur M. Paschoud, mais ce dernier se borna à analyser, de façon très judicieuse, les chapitres I à IV ; le lecteur se demande pourquoi il n'en fut pas de même pour les chapitres V et VI. Le chapitre V surtout présente de l'intérêt pour l'hyperstatique. La méthode aux variations de coordonnées des nœuds est devenue assez générale depuis 1926 ; il y a eu d'autres publications s'inspirant du même principe, notamment dans les Mémoires de l'Association internationale des ponts et charpentes (voir [3]).

En principe, on peut distinguer deux modes de calcul :

1° *Les équations aux déformations n'ont pas de termes absolus*

De plus, on ne forme pas de dérivées partielles de l'énergie et le nombre des équations est égal à celui des inconnues (voir [4]). Théoriquement, cette solution est séduisante ; pratiquement, c'est moins le cas. Pour une barre quelconque à un seul nœud libre N on a la forme générale :

(1)

$$a_i Dx + b_i Dy + c_i Dz = m_i T_i = v_i \qquad (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1)$$

[1] Subside n° 3413 du Fonds national de la recherche scientifique et subside de la Société académique vaudoise et avec la collaboration du centre électronique de l'EPUL pour les calculs.

les Dx, Dy, Dz étant les variations de coordonnées du nœud, T la tension, m le module, ν la variation de longueur de la barre. En ajoutant des équations d'équilibre on obtient un système d'équations suffisant. Considérons un cas concret :

Sommet libre d'un pylône

(Cas de caractère didactique)

$i =$	barres	a_i	b_i	c_i	m_i	p_i
1	1-2	+ 0,490	+ 0,653	+ 0,577	1,33	0,75
2	1-3	+ 0,653	— 0,490	+ 0,577	1,33	0,75
3	1-4	— 0,490	— 0,653	+ 0,577	1,33	0,75
4	1-5	— 0,653	+ 0,490	+ 0,577	1,33	0,75
5	1-6	+ 0,707	— 0,408	+ 0,577	1,00	1,00
6	1-7	0,00	+ 0,816	+ 0,577	1,00	1,00
7	1-8	— 0,707	— 0,408	+ 0,577	1,00	1,00

Ces modules m des barres (Federungen) jouent un grand rôle ; ils dépendent de la structure (coefficient E) et des dimensions (longueur, section). On a 7 équations aux déformations et 3 équations d'équilibre pour le sommet libre 1, donc en tout 10 équations permettant de déterminer les Dx, Dy, Dz et les 7 efforts axiaux ; par hypothèse, le déterminant principal des équations n'est pas nul et ne prend pas des valeurs dangereusement petites. Cette éventualité sera examinée plus loin. Dans les équations d'équilibre seulement, il y a des termes absolus. Pour mémoire, rappelons que ce système comporterait quatre inconnues hyperstatiques.

2° *Les équations aux déformations ont des termes absolus*

Ces termes ne sont pas nécessairement tous différents de zéro ; en général, il y a beaucoup trop d'équations, mais il est facile de lever cette ambiguïté car les dérivées partielles de l'énergie sont formées.

Toujours pour le cas d'un nœud libre N, l'équation aux déformations est :

$$a_i dx + b_i dy + c_i dz + f_i = \nu_i = m_i T_i \qquad (2)$$

(module m_i poids p_i)

Ici, l'état initial pour la variation des coordonnées est arbitraire ; des barres sont fictivement coupées et remplacées par des forces. Cette étape du calcul est trop connue pour nécessiter des commentaires ; par hypothèse, le terme absolu f est donc calculé. Pour chaque barre une équation. Cette solution permet de pousser à fond une théorie des déformations. Toujours en ce qui concerne le pylône on a 7 équations (2) et 3 inconnues. Ici, la condition du minimum pour le travail de déformation intervient ; en d'autres termes, les modules m étant les inverses des poids p, il faut rendre minimum la somme des mT^2 ou celle des $\frac{\nu^2}{m}$ ou encore celle des $p\nu^2$. Implicitement, le principe des moindres carrés se confond avec la condition relative au travail de déformation ; c'est ce qu'avait exprimé par exemple K. Friedrich *(Die Richtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate aus der Grundsätzen der Mechanik abgeleitet)*. Les m ou p interviennent ici par leurs valeurs relatives ; ils n'ont pas les mêmes dimensions. Pratiquement, les a_i, b_i, c_i sont les mêmes pour (1) et (2).

En formant les dérivées partielles par rapport à dx, dy, dz, on constate que les sommes des $pa\nu$, $pb\nu$ et $pc\nu$ sont nulles séparément ; ce sont les équations normales sous forme implicite (voir *Bulletin technique*, n° 19, 1964). En combinant avec les équations (2) on trouve la matrice symétrique aux coefficients des inconnues, puis son inverse aux coefficients de poids des inconnues.

Les éléments diagonaux sont les sommes des paa, pbb, pcc. Les sommes des pab, pac, pbc sont *nulles*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ & 0{,}5 & 0 \\ & & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz} = 0{,}5$$
$$Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0$$

Ellipsoïde de déformations. Désignons par P_o le point répondant à la condition du minimum et considérons ce point comme origine d'un nouveau système de coordonnées (dx), (dy), (dz). Dans le voisinage de P_o on a :

$$\nu_i' = \nu_i + a_i(dx) + b_i(dy) + c_i(dz). \qquad (3)$$

Les lieux des points pour lesquels le travail de déformation est constant s'obtient en formant les sommes des $p\nu'\nu'$ et $p\nu\nu$; ces surfaces sont ici sphériques avec P_o comme centre.

$$2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2 = \text{const.}$$

$$\text{ou} \qquad \frac{(dx)^2}{Q_{xx}} + \frac{(dy)^2}{Q_{yy}} + \frac{(dz)^2}{Q_{zz}} = \text{const.} \qquad (4)$$

mais le rayon de la sphère dite moyenne exige qu'on fasse intervenir les ν. Ce qui importe, pour les praticiens, c'est la forme de ces surfaces et leur orientation.

Structure à deux nœuds libres. C'est de nouveau une application de caractère didactique ; ici encore, on envisage deux solutions :

Première solution : Celle de *B. Mayor* comporte les neuf équations aux déformations suivantes :

(5)

$$a_i Dx_1 + b_i Dy_1 + c_i Dz_1 + a_i' Dx_6 + b_i' Dy_6 + c_i' Dz_6 = m_i T_i = \nu_i \qquad (i = 1, 2 \ldots 9)$$

$i =$	barres	a_i	b_i	c_i	a_i'	b_i'	c_i'	m_i
1	1-2	+ 0,5	0	+ 0,866				tous ces m_i sont égaux
2	1-3	+ 0,5	0	— 0,866				
3	1-4	+ 0,5	+ 0,866	0				
4	1-5	+ 0,5	— 0,866	0				
5	1-6	+ 1	0	0	— 1	0	0	
6	6-7				— 0,5	0	— 0,866	
7	6-8				— 0,5	0	+ 0,866	
8	6-9				— 0,5	— 0,866	0	
9	6-10				— 0,5	+ 0,866	0	

Les nœuds 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 sont fixes. Il n'est fait aucune hypothèse sur les forces extérieures. La barre 1-6 est parallèle à l'axe des x. Il y aurait encore les réactions à considérer, mais on en fait abstraction ici. Cette première solution comporte donc 15 inconnues : 6 variations de coordonnées (nœuds libres 1 et 6) et 9 efforts axiaux (9 barres) ; les équations sont au nombre de 15 en comptant les 6 conditions d'équilibre. Il n'y a des termes absolus que dans ces 6 équations (nœuds 1 et 6).

Deuxième solution : On a le système

(6)

$$\nu_i = a_i dx_1 + b_i dy_1 + c_i dz_1 + a_i' dx_6 + b_i' dy_6 + c_i' dz_6 + f_i$$

(poids p_i)

Les m_i étant égaux, on pose $p_i = 1$, ce 1 ayant une dimension $(i = 1, 2 \ldots 9)$.

Il faut rendre nulles les sommes des $pa\nu$, $pb\nu \ldots pc'\nu$, d'où les matrices aux coefficients des équations normales

et les inverses aux coefficients de poids des inconnues (toutes deux symétriques). Elles ne sont pas rigoureusement diagonales ; malgré cela, on peut réaliser la forme sphérique pour les ellipsoïdes de déformation aux nœuds libres 1 et 6.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 1{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 1{,}5 & 0 \\ & & & & & 1{,}5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 & +1/3 & 0 & 0 \\ & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2/3 & 0 & 0 \\ & & & & 2/3 & 0 \\ & & & & & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz} = 2/3 \qquad Q_{xy} = Q_{yz} = Q_{zx} = 0$$

pour les deux nœuds

Les termes absolus sont les sommes des paf, pbf ... $pc'f$.

Pour plus de deux nœuds libres, il est difficile de réaliser la forme sphérique rigoureuse ; pratiquement, une sphéricité approchée suffit.

L'équation (4) montre que les longueurs des axes principaux sont proportionnelles aux racines carrées des Q_{xx}, Q_{yy}, Q_{zz} si les Q_{xy}, Q_{yz}, Q_{zx} sont nuls. Ci-après, cette propriété sera appliquée.

Quant à la méthode par les inconnues hyperstatiques, elle donne lieu parfois à des valeurs dangereusement petites pour le déterminant principal des équations d'élasticité (voir [5]). Avec la nouvelle théorie, ce n'est guère à craindre, comme Jacobi l'a montré (voir [8]).

Les termes absolus f_i sont fournis par le système isostatique de référence calculé éventuellement par la méthode de B. Mayor de la représentation plane ; les nœuds spatiaux sont matérialisés par des plaques mobiles. L'inconnue dz est convertie en une rotation.

Solution générale. Dans les exemples précédents, les éléments Q_{xy}, Q_{yz}, Q_{zx} étaient nuls ; si ce n'est pas le cas, il faut résoudre l'équation en k :

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} Q_{xx}-k & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy}-k & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz}-k \end{vmatrix} = 0$$

où les racines sont proportionnelles aux carrés des longueurs des axes principaux (voir *Bulletin technique*, n° 24, 1961) ; un calcul semi-graphique suffit parfois.

Application. Considérons (fig. 1) une structure à 30 barres dont 15 surabondantes ; ainsi l'argument portant sur le nombre d'inconnues n'intervient pas, car il y a 5 nœuds libres, donc 15 variations de coordonnées. Aucune hypothèse n'est formulée quant aux forces extérieures ; l'unité de mesure pour les x, y, z est arbitraire (5^m, 6^m, 7^m ...).

Nœuds libres	x	y	z	Nœuds	x	y	z	
1	— 0,62	0	+ 1,3	6	— 2,00	0	0	Nœuds fixes
2	— 0,19	+ 0,59	+ 1,3	7	— 0,62	+ 1,90	0	
3	+ 0,50	+ 0,365	+ 1,3	8	+ 1,62	+ 1,18	0	
4	+ 0,50	— 0,365	+ 1,3	9	+ 1,62	— 1,18	0	
5	— 0,19	— 0,59	+ 1,3	10	— 0,62	— 1,90	0	

Longueurs des barres :

1-2 = 2-3 = 0,73 1-6 = 2-7 = 1,90

1-7 = 1-10 = 2-6 = 2,305 ; 1-8 = 1-9 = 2,845

Pour la déformation quadratique moyenne, on admet $m_o = \pm 1$ ou $m_o^2 = [pvv] : 15$, mais ce 1 a une dimension.

Les poids p sont donc inversement proportionnels aux modules m des barres (Federungen).

Solution d'après B. Mayor

Pour une barre d'indice i et des nœuds N_g, N_h on a :

(8)

$$a_i(Dx_g - Dx_h) + b_i(Dy_g - Dy_h) + c_i(Dz_g - Dz_h) = m_i T_i$$

module m_i ou m_{gh} poids p_i ou p_{gh}

Le fait de changer d'état initial pour passer des variations Dx, Dy, Dz aux dx, dy, dz est pratiquement sans influence sur les a_i, b_i, c_i ; ces coefficients pourraient être calculés par voie semi-graphique. On aurait 30 équations du type (8) puis 15 équations d'équilibre, soit $i = 1, 2, 3 \ldots 30$; $g \leq 10$ et $h \leq 10$. Les réactions peuvent être traitées à part ; les Dx, Dy, Dz et dx, dy, dz sont nuls pour les nœuds N_6 à N_{10}. En tout 45 équations, les liaisons non comprises.

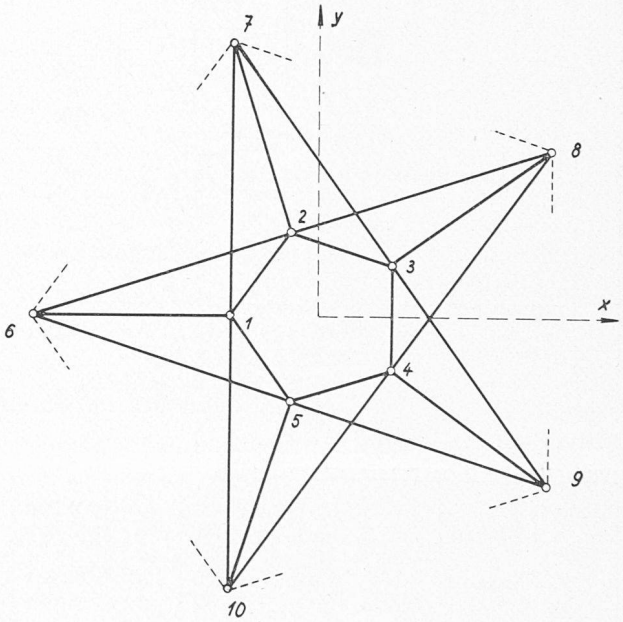

Figure 1.

En fait, dans cette solution, le nombre des inconnues dépasse ce qui serait strictement nécessaire ; mais on évite les coupures de barres, la formation des dérivées partielles de l'énergie.

Dans les Mémoires de l'Association internationale des ponts et charpentes, un treillis tridimensionnel fut calculé, mais avec quatre barres surabondantes seulement (voir [3]) ; il y a une combinaison d'équations aux déformations et d'équilibre.

Tableau des poids p_i ou p_{gh}

(inverses des modules m_i des barres)

Nœuds g =	h = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		0,7				1,15	1	0,8	0,8	1
2			0,7			1	1,15	1	0,8	0,8
3				0,7		0,8	1	1,15	1	0,8
4					0,7	0,8	0,8	1	1,15	1
5	0,7					1	0,8	0,8	1	1,15

Ces poids pourraient être tous multipliés par un certain facteur.

Les praticiens évitent d'avoir des poids ou très grands ou très petits (plusieurs décimales). Il y a ci-dessus 30 valeurs pour 30 barres (1-2, 2-3 ... 5-1, ... 5-10).

Equations aux déformations

barre 1-2 $\quad -f_1 + v_1 = -0{,}59(dx_1 - dx_2) - 0{,}81(dy_1 - dy_2)$

» 2-3 $\quad -f_2 + v_2 = -0{,}95(dx_2 - dx_3) + 0{,}31(dy_2 - dy_3)$

» 3-4 $\quad -f_3 + v_3 = dy_3 - dy_4$

» 4-5 $\quad -f_4 + v_4 = +0{,}95(dx_4 - dx_5) + 0{,}31(dy_4 - dy_5)$

» 5-1 $\quad -f_5 + v_5 = -0{,}59(dx_1 - dx_5) + 0{,}81(dy_1 - dy_5)$

Pour les autres barres, on a les coefficients ci-après :

Barres	a_i	b_i	c_i
1-6	+ 0,73	0	+ 0,684
1-7	0	— 0,824	+ 0,564
1-8	— 0,79	— 0,412	+ 0,457
1-9	— 0,79	+ 0,412	+ 0,457
1-10	0	+ 0,824	+ 0,564

Il viendrait encore 2-6, 2-7, 2-8 ...

Chaque nœud libre 1, 2, 3, 4, 5 est relié aux nœuds fixes 6, 7, 8, 9, 10.

Matrice symétrique des coefficients des équations normales (dérivées de l'énergie)

Résolution par voie électronique

2,115	0	0	—0,244	—0,335	0	0	0	0	0	0	0	—0,244	+0,335	0
	2,55	0	—0,335	—0,459	0	0	0	0	0	0	0	+0,335	—0,459	0
		1,51	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			2,51	+0,127	0	—0,632	+0,206	0	0	0	0	0	0	0
				2,12	0	+0,206	—0,067	0	0	0	0	0	0	0
					1,51	0	0	0	0	0	0	0	0	0
						2,25	—0,222	0	0	0	0	0	0	0
							2,51	0	0	—0,70	0	0	0	0
								1,51	0	0	0	0	0	0
									2,25	+0,222	0	—0,632	—0,206	0
										2,51	0	—0,206	—0,067	0
											1,51	0	0	0
												2,51	—0,127	0
													2,12	0
														1,51

$m_0^2 \cong [pvv] : 15$

Cet élément présente de l'intérêt.

Solution de B. Mayor

Elle donne lieu à 30 équations aux déformations, 15 équations d'équilibre (nœuds 1, 2, 3, 4, 5).

Inconnues : 15 variations de coordonnées
30 efforts axiaux T_i

Matrice symétrique inverse aux coefficients de poids des inconnues

(Calcul par le centre de calcul électronique de l'EPUL)

+0,509	0	0	+0,047	+0,077	0	+0,006	—0,001	0	+0,006	+0,001	0	+0,047	—0,077	0
	0,440	0	+0,056	+0,091	0	+0,007	—0,002	0	—0,007	—0,002	0	—0,056	+0,091	0
		0,663	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	nœud 1		0,445	—0,020	0	+0,124	—0,028	0	—0,008	—0,008	0	—0,003	+0,004	0
				0,510	0	—0,051	+0,012	0	—0,001	+0,003	0	—0,004	+0,007	0
					0,662	0	0	0	0	0	0	0	0	0
				nœud 2		0,487	+0,034	0	—0,001	+0,010	0	0	+0,001	0
							0,439	0	—0,010	+0,124	0	+0,008	+0,003	0
								0,662	0	0	0	0	0	0
							nœud 3		0,487	—0,034	0	+0,124	+0,051	0
										0,439	0	+0,028	+0,012	0
											0,662	0	0	0
										nœud 4		0,445	+0,020	0
													0,510	0
													nœud 5	0,662

Nœud 1 : Les axes principaux de l'ellipsoïde de déformation sont proportionnels à

$$\sqrt{0{,}51} = 0{,}714, \quad \sqrt{0{,}44} = 0{,}664, \quad \sqrt{0{,}66} = 0{,}812$$

ce qui n'est pas défavorable. Ces valeurs sont indépendantes des termes absolus f_i.

Poids des barres à postériori. Le calcul de ces poids est parfois laborieux et les praticiens de la méthode des moindres carrés y renoncent ; par cette méthode, les poids sont amplifiés dans la plus forte mesure.

Par exemple pour la barre 1-6 on considère le binôme : $0{,}73\ dx_1 + 0{,}684\ dz_1$ d'où, en fonction des coefficients de poids, on obtient : $\overline{0{,}73}^2 \times 0{,}509 + \overline{0{,}684}^2 \times 0{,}663 = 0{,}581$; c'est l'inverse du poids à posteriori.

La somme des quotients des poids p_i par ceux à postériori P_i est égal au nombre des inconnues, ici 15 ; cette propriété est importante.

La déformation quadratique moyenne est m_o (poids 1)

			$1/P_i$	
5	barres	$p_i = 0{,}7$	$5 \times 0{,}7 \times 0{,}630 =$	2,21
5	»	$p_i = 1{,}15$	$5 \times 1{,}15 \times 0{,}581 =$	3,35
10	»	$p_i = 1$	$10 \times 1 \times 0{,}512 =$	5,12
10	»	$p_i = 0{,}8$	$10 \times 0{,}8 \times 0{,}533 =$	4,27
			somme $p_i/P_i =$	14,95
			(Théoriquement 15)	

C'est le poids p_i le plus fort 1,15 qui est le moins amplifié.

En dernier lieu, consacrons quelques lignes à une *coupole Schwedler* (fig. 2).

La valeur de l'unité est aussi arbitraire (5^m, 6^m, 7^m ...). On possède tous les éléments pour calculer les coefficients des équations aux déformations ; si, de plus, les poids p_i sont connus, on peut déterminer la matrice

Coupole Schwedler.

Nœuds	x	y	z	Nœuds	x	y	z	Nœuds fixes	x	y	z
1	— 0,62	0	+ 1,84	6	— 1,31	0	+ 0,92	11	— 2,00	0	0
2	— 0,19	+ 0,59	+ 1,84	7	— 0,405	+ 1,245	+ 0,92	12	— 0,62	+ 1,90	0
3	+ 0,50	+ 0,365	+ 1,84	8	+ 1,06	+ 0,772	+ 0,92	13	+ 1,62	+ 1,18	0
4	+ 0,50	— 0,365	+ 1,84	9	+ 1,06	— 0,772	+ 0,92	14	+ 1,62	— 1,18	0
5	— 0,19	— 0,59	+ 1,84	10	— 0,405	— 1,245	+ 0,92	15	— 0,62	— 1,90	0

des coefficients des équations normales et sa réciproque aux coefficients de poids des inconnues.

Le nombre des barres surabondantes peut devenir élevé ; elles ne sont pas toutes tracées sur la figure. La suite des calculs ne donne pas lieu à des commentaires.

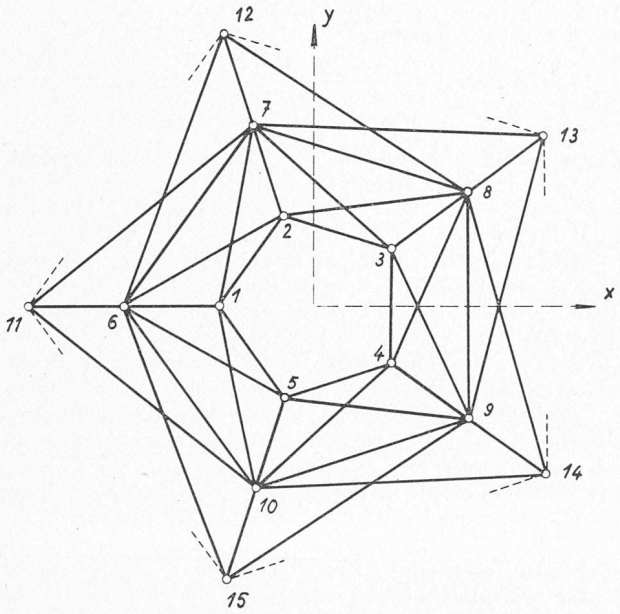

Fig. 2. — Les forces extérieures seront choisies arbitrairement.

Conclusions. La solution par la variation des coordonnées des nœuds gagne toujours plus de terrain, surtout si le degré d'hyperstaticité est élevé. B. Mayor est, dans ce domaine, un précurseur mais, en représentation plane, ses équations aux déformations ne sont plus linéaires, ce que l'on peut modifier. L'ellipsoïde de déformation est un critère nouveau ; par exemple, ci-dessus, les longueurs des axes principaux sont proportionnelles à 0,71, 0,66 et 0,81, ce qui est assez favorable. Le but de ces lignes était surtout de montrer, après K. Friedrich, que le principe des moindres carrés et la condition du travail de déformations ne pouvaient pas être dissociés. Quant à la solution par les équations d'élasticité (voir [5]), elle donne parfois lieu à des difficultés. Le problème est vaste et se prêtera encore à bien des développements. L'auteur de ces lignes exprime en outre sa reconnaissance à la chaire de statique de l'EPF qui a bien voulu traduire son texte relatif aux coupoles (voir [10]) et vérifier les calculs.

LITTÉRATURE

[1] Absi, E. : *Les systèmes hyperstatiques de degré élevé* (Paris, 1963).

[2] Friedrich, K. : *Die Methode der kleinsten Quadrate aus den Grundsätzen der Mechanik abgeleitet* (Zeitschr. f. Vermessungsw., 1943).

[3] Li : *Matrix Analysis of Indeterminate Space Trusses* (Mémoire Association internationale des ponts et charpentes).

[4] Mayor, B. : *Statique graphique des systèmes spatiaux* (Lausanne, Payot).

[5] Salles, F. : *Initiation à la théorie de l'énergie élastique* (Dunod, Paris).

[6] Stüssi, F. : *Baustatik I, II* (Birkhauser, Bâle).

[7] Zurmühl, R. : *Matrizen* (Springer Verlag).

[8] Ansermet, A. : *Les déformations en hyperstatique spatiale* (Bulletin technique, 9 mars 1963).

[9] Ansermet, A. : *Théorie des déformations pour les treillis.*

[10] *Neue Methode zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerkkuppeln* (traduction par la chaire de statique de l'Ecole polytechnique fédérale).

BIBLIOGRAPHIE

Journées internationales de la combustion et de la conversion de l'énergie, organisées avec le concours de la Société française des thermiciens, mai 1964. Compte rendu établi par le professeur *Marcel Véron.* Edité par l'Institut français des combustibles et de l'énergie, Paris, 1965. — Un volume 21 × 27 cm, 804 pages et 620 figures.

Cet ouvrage, dont il est bien entendu impossible de donner ici un résumé, groupe 43 communications remaniées et leurs discussions mises au point, dont 36 sur la *combustion* et 7 sur la *conversion des énergies*, le tout divisé en sept chapitres. Les six premiers chapitres, qui traitent de la combustion, s'étagent de la recherche fondamentale jusqu'à l'exploitation quotidienne, en retraversant les domaines propres aux divers combustibles. Le dernier chapitre, d'un caractère tout différent, concerne les principaux convertisseurs d'énergie, ensemble dont une magistrale présentation du professeur J. Yvon brosse une saisissante synthèse.

Comparée à une répartition par classes de combustibles, cette ventilation par climats et méthodes offre plusieurs avantages, dont celui d'éliminer tout ce qui peut ressembler à un affrontement commercial des diverses sources d'énergie. L'inconvénient serait de compliquer les recherches de lecteur pressé, dans sa quête d'une documentation visant une nouvelle source ; pour y parer, une table finale regroupe les titres par classes de combustibles.

L'auteur de ce long travail, patient et ingrat que constitue la réalisation d'un tel ouvrage, espère, dans un *avertissement* « rencontrer l'approbation des acteurs et obtenir la faveur des spectateurs thermiciens », et souhaite que cet ouvrage puisse trouver place aux côtés des sept volumes qui l'ont précédé, non point sur les rayons d'une bibliothèque pour y dormir, mais bien sur les tables de travail pour y être associé à la vie quotidienne de bureaux d'études et de calculs où se préparent les réalités de demain.

Sommaire : Le vertige exponentiel en énergétique ; importance et applications techniques des notions d'exergie et d'anergie ; la combustion ménagée du méthane à basse température ; vitesse fondamentale des flammes et cinétique chimique ; la combustion dans les écoulements turbulents ;