Sur une méthode interféro-photoélectrique pour la mesure des tensions en élasticité plane et sur ses possibilités d'application à la détermination des efforts au voisinage de la surface d'un corps solide et à la mesure des tensions thermiques

Autor(en): **Favre, Henry / Schumann, Walter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **88 (1962)**

Heft 5

PDF erstellt am: **16.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-771832

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

88e année Lausanne, 10 mars 1962 N° 5

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL
de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (S.V.I.A.)
de la Section genevoise de la S.I.A.
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'E.P.F. (Ecole polytechnique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE
Président: † J. Calame, ing. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève
Membres:
Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Grosgurin, arch.; E. Martin, arch.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.; M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION
de la Société anonyme du « Bulletin technique »
Président: D. Bonnard, ing.
Membres: M. Bridel; J. Favre, arch.; † R. Neeser, ing.; A. Robert, ing.; J.-P. Stucky, ing.
Adresse: Avenue de la Gare 10, Lausanne

RÉDACTION
Vacat
Rédaction et Editions de la S. A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Avenue de Cour 27, Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 28.—	Etranger	Fr. 32.—
Sociétaires	»	» 23.—	»	» 28.—
Prix du numéro . . .	»	» 1.60		

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande », N° II 57 75, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, changements d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie La Concorde, Terreaux 29, Lausanne

ANNONCES
Tarif des annonces:

1/1 page	Fr. 320.—
1/2 »	» 168.—
1/4 »	» 85.—
1/8 »	» 42.50

Adresse: Annonces Suisses S. A.
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 2233 26. Lausanne et succursales

SOMMAIRE

Sur une méthode interféro-photoélectrique pour la mesure des tensions en élasticité plane et sur ses possibilités d'application à la détermination des efforts au voisinage de la surface d'un corps solide et à la mesure des tensions thermiques *(suite et fin)*, par Henry Favre et Walter Schumann, Ecole polytechnique fédérale, Zurich
Société vaudoise des ingénieurs et des architectes : Rapport d'activité 1961. — Société suisse des ingénieurs et des architectes : Communiqué du Secrétariat central. — Divers. — Nécrologie : Louis Capt et Charles-Henri Perrin, ingénieurs. — Bibliographie.
Documentation générale. — Documentation du bâtiment. — Nouveautés, informations diverses.

SUR UNE MÉTHODE INTERFÉRO-PHOTOÉLECTRIQUE POUR LA MESURE DES TENSIONS EN ÉLASTICITÉ PLANE ET SUR SES POSSIBILITÉS D'APPLICATION A LA DÉTERMINATION DES EFFORTS AU VOISINAGE DE LA SURFACE D'UN CORPS SOLIDE ET A LA MESURE DES TENSIONS THERMIQUES *(Suite et fin [1])*

par HENRY FAVRE et WALTER SCHUMANN, Ecole polytechnique fédérale, Zurich

§ 7. Mesure des tensions dans un prisme tendu axialement et dans une pièce courbe, sollicitée à la flexion composée.

Dans un *premier essai*, nous avons mesuré les tensions dans un *prisme d'aluminium*, de 5,19 mm d'épaisseur et de 11,82 mm de largeur, sollicité à la traction pure par deux forces P, égales et opposées, de différentes valeurs finales, appliquées aux extrémités (fig. 10 *a*). Cet essai avait deux buts : faire un premier contrôle du fonctionnement de la méthode et déterminer les valeurs des constantes $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$, dont la connaissance était nécessaire pour le second essai.

Afin d'éliminer les erreurs dues à une légère excentricité éventuelle des forces, deux jauges optiques ont été collées de part et d'autre de l'épaisseur du prisme, au milieu de sa longueur. Ce dispositif présente d'ailleurs l'avantage d'admettre deux plans de symétrie contenant l'axe du prisme, ce qui permet d'éviter la création de moments de flexion perturbateurs, que pourraient engendrer les jauges si elles étaient inégales (voir [17]).

La figure 11 donne, en fonction de P, les résultats de mesures directes de θ_1, θ_2, θ_3 (cercles), les valeurs de $\theta_3 = \theta_1 - \theta_2$ déduites des mesures de θ_1, θ_2 (croix) et les diagrammes basés sur ces mesures (droites passant par l'origine). Les tensions dans les jauges d'allite présentent évidemment peu d'intérêt. Ce sont par contre les tensions dans le prisme d'aluminium qu'il s'agit de déterminer. Cependant, comme *les allongements spécifiques principaux* ε_1, ε_2 — et non les tensions σ_1, σ_2 — sont *les mêmes des deux côtés de la surface séparant les deux matières*, les mesures optiques vont pouvoir nous donner *directement*, dans l'aluminium, les quantités ε_1, ε_2 et *indirectement* seulement, grâce à la loi de *Hooke*, les tensions σ_1, σ_2.

En conséquence, ce sont les équations (16), et non (18), que nous devons appliquer aux jauges. Cependant, si l'on cherche à évaluer, dans le cas du prisme étudié, les *constantes* $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ figurant dans les équations (16), en partant des mesures de θ_1, θ_2, θ_3 correspondant à différentes valeurs de la force P, on s'aperçoit

[1] Voir *Bulletin technique* n° 4 du 24 février 1962.

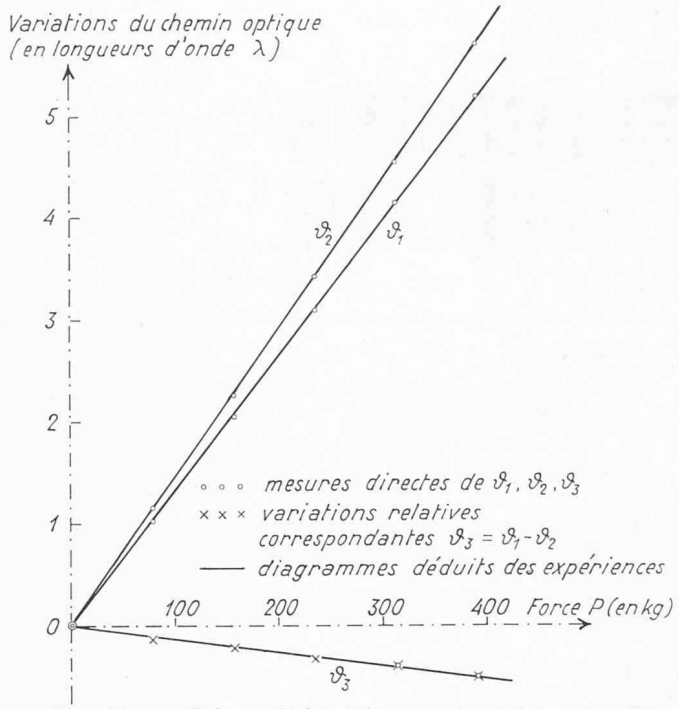

Fig. 11. — Prisme d'aluminium tendu axialement. Diagrammes des valeurs mesurées θ_1, θ_2, θ_3 dans les jauges optiques, en fonction de la force P.

que, dans les formules permettant de déduire de ces mesures les constantes cherchées, le module $\overline{E}$ de l'aluminium figure partout comme facteur. Ces constantes apparaissent donc comme directement proportionnelles à $\overline{E}$, tandis que les mêmes formules montrent qu'elles dépendent peu de $\overline{\nu}$ (aluminium) et de E, ν (allite). Les quatre constantes mécaniques dont nous venons de parler avaient, dans notre cas, les valeurs :

$$\overline{E} = \begin{Bmatrix} 6995 \pm 90\,\mathrm{kgmm^{-2}} \\ 7081 \pm 70\,\mathrm{kgmm^{-2}} \end{Bmatrix} \text{(2 déterm.)}, \overline{\nu} = 0{,}33 \text{ (Alum.)}$$

$$E = \quad 211{,}4 \pm 1\,\mathrm{kgmm^{-2}} \qquad , \nu = 0{,}40 \text{ (Allite CR39)}.$$

Or, il serait facile de voir que l'erreur de la valeur du module $\overline{E}$, utilisée pour l'éprouvette prismatique, n'interviendra aucunement dans la détermination des allongements ε_1, ε_2 mesurés *sur un modèle fait avec la même matière (aluminium) que l'éprouvette.* En conséquence, pour se rendre indépendant de l'erreur de $\overline{E}$ et pour mieux apprécier l'exactitude des mesures, le plus simple est de considérer les valeurs des fractions $\alpha^*/\overline{E}$, $\beta^*/\overline{E}$ et $\gamma^*/\overline{E}$. Ces quantités sont, en vertu de ce que nous avons dit plus haut, indépendantes de $\overline{E}$ et, conséquemment, de l'erreur de cette grandeur. Elles figurent dans la première ligne du *tableau* 2 (ce sont en réalité les *moyennes des résultats*, obtenus avec les deux jauges et par répétition des mesures, qui y figurent). Dans la seconde ligne de ce tableau, sont données les erreurs moyennes de ces valeurs, ainsi que celles des quantités $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, et dans la troisième, les erreurs moyennes d'*une mesure* de θ_1, θ_2, θ_3, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ou $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Il est important de noter qu'il s'agit partout d'*erreurs accidentelles*. Les erreurs systématiques provenant d'une inexactitude éventuelle de l'application de la force P, de la différence du comportement optique ou mécanique d'une jauge à une autre, ou d'autres causes encore, ne sont pas incluses dans les valeurs des erreurs indiquées.

Les deux dernières lignes du tableau 2 donnent, à titre de comparaison, les valeurs de $\alpha^*/\overline{E}$, $\beta^*/\overline{E}$, $\gamma^*/\overline{E}$ obtenues à l'aide d'un prisme d'*Allite CR39* (tendu axialement), pour les deux valeurs de $\overline{E}$ indiquées plus haut. Ce prisme a été découpé dans la même plaque que les jauges. Pour passer des valeurs de a^*, b^*, c^* — obtenues en mesurant θ_1, θ_2, θ_3 — à celles de $\alpha^*/\overline{E}$, $\beta^*/\overline{E}$, $\gamma^*/\overline{E}$, à l'aide des formules (19), il est nécessaire de connaître les constantes E et ν de l'allite. Le coefficient de *Poisson* ν, qui a peu d'influence sur le résultat, a été choisi comme précédemment égal à 0,40. Le module E a été obtenu par les deux premières formules (21), en déterminant d'abord a, b par des mesures de δ_1, δ_2 à l'aide d'un interféromètre de *Mach-Zehnder* et en appliquant les équations (2). Quant aux deux valeurs de $\overline{E}$ indiquées plus haut pour l'aluminium, elles ont été obtenues par flexion en faisant deux séries de mesures, dans des conditions légèrement différentes.

La comparaison, dans le tableau 2, des deux groupes de valeurs obtenues pour $\alpha^*/\overline{E}$, $\beta^*/\overline{E}$, $\gamma^*/\overline{E}$, révèle une bonne coïncidence des résultats.

Avec ce prisme et les jauges utilisées, les plus grands effets optiques possibles s'obtiennent en appliquant une force axiale P engendrant, dans l'aluminium, une traction uniforme $\sigma_1 \cong 22\ \mathrm{kgmm^{-2}}$, car dans ce cas, l'allongement spécifique est déjà égal à 0,2 % environ, valeur cependant encore acceptable. Or, les variations correspondantes du chemin optique sont ici respectivement égales à $\theta_1 \cong 18$, $\theta_2 \cong 20$, $\theta_3 \cong -2$. Elles sont donc relativement grandes, ce qui montre que *l'épaisseur des jauges pourrait parfaitement être réduite.*

Dans un *second essai*, nous avons étudié une *pièce courbe (arc) d'aluminium*, de section rectangulaire constante, sous l'action de deux forces égales et opposées $P = 78{,}24$ kg, appliquées aux extrémités (fig. 8 *c* et 10 *b*). L'épaisseur, la largeur et le rayon moyen sont respectivement égaux à $h = 9{,}99$ mm, $t = 11{,}78$ mm, $R = 200$ mm. L'angle ψ_0 formé par l'axe de symétrie et les sections passant par les centres des oeillets où sont appliquées les forces est égal à 25° 56′. La pièce étudiée ici peut être considérée comme le *cas particulier d'une coque*, où les moments principaux de flexion et les efforts de membrane ont les valeurs respectives :

$$M_1 = \frac{PR}{t}\left(\cos\psi - \cos\psi_0 - \frac{\xi}{R}\right),$$
$$M_2 = 0, \quad N_1 = \frac{P}{t}\cos\psi, \quad N_2 = 0, \tag{21'}$$

où ψ désigne l'angle formé par l'axe de symétrie avec la section considérée, et où ξ est le déplacement horizontal — produit par la déformation — du centre de cette section (pour $\psi = 0$, on a $\xi \cong 0{,}6$ mm). Des jauges optiques ont été fixées dans deux sections ($\psi = 0°$ et $\psi = 10°$), aux points C, D, E, F. Par raison de symétrie, les jauges C, D ne subissent pas de rotation pendant la mise en charge, tandis que les jauges E, F tournent d'environ 0,9°.

Le *tableau 3* donne les *valeurs mesurées* de θ_1, θ_2, θ_3 par la méthode interféro-photoélectrique et, à titre de comparaison, les *valeurs calculées* de ces grandeurs, en utilisant les constantes α^*, β^*, γ^* déterminées dans le premier essai décrit (prisme d'aluminium). Comme

TABLEAU 2

Valeurs de $\alpha^*/\overline{E}$, $\beta^*/\overline{E}$, $\gamma^*/\overline{E}$, *pour des jauges d'allite collées sur un prisme d'aluminium et pour un prisme d'allite. Erreurs moyennes de* θ_1, θ_2, θ_3 et erreurs correspondantes de $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et de $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$.

	$\alpha^*/\overline{E}$ (kg^{-1}mm)	$\beta^*/\overline{E}$ (kg^{-1}mm)	$\gamma^*/\overline{E}$ (kg^{-1}mm)	Erreurs moy. de θ_1 ou θ_2	Erreurs moy. de θ_3	Erreurs corresp. de $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$	Erreurs corresp. de $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$
jauges collées sur un prisme d'aluminium	$0{,}579_7$	$0{,}608_1$	$-0{,}0284_8$				
Erreurs moyennes des résultats	$\pm$ 0,0009	$\pm$ 0,0009	$\pm$ 0,00009			$\pm 6 \times 10^{-7}$	$\pm 3 \times 10^{-6}$
Erreurs moyennes d'une mesure				$\pm$ 0,017	$\pm$ 0,003	$\pm 1{,}3 \times 10^{-6}$	$\pm 7 \times 10^{-6}$
Prisme d'allite, en posant :							
$\overline{E} = 6995 \pm 90$ kgmm^{-2}	$0{,}576_4$	$0{,}605_3$	$-0{,}0287_5$				
$\overline{E} = 7081 \pm 70$ kgmm^{-2}	$0{,}569_4$	$0{,}597_9$	$-0{,}0284_0$				

TABLEAU 3

Valeurs mesurées de θ_1, θ_2, θ_3 *et valeurs calculées correspondantes, pour les sections CD* et *EF de la pièce courbe d'aluminium représentée fig.* 8 *c.*

	Section *CD* (sans rotation) θ_1	θ_2	θ_3	Section *EF* (avec rotation de 0,9°) θ_1	θ_2	θ_3
Côté concave :						
Valeurs mesurées (à l'aide des jauges)	8,1	8,9	— 0,83	$6{,}9^5$	7,7	— 0,68
Valeurs calculées (en utilisant les const. α^*, β^*, γ^* données par une éprouvette prismat.)	7,95	8,75	— 0,802	6,82	7,51	— 0,688
Côté convexe :						
Valeurs mesurées (à l'aide des jauges)	— 7,5	$-6{,}8^5$	— 0,65	— 6,4	— 5,9	— 0,53
Valeurs calculées (en utilisant les const. α^*, β^*, γ^* données par une éprouvette prismat.)	— 7,54	— 6,85	— 0,692	— 6,33	— 5,75	— 0,580

TABLEAU 4

Valeurs mesurées de M_1, M_2, N_1, N_2 *et valeurs calculées correspondantes, pour les sections* CD *et* EF *de la pièce courbe d'aluminium représentée fig.* 8 c.

	Section *CD* (sans rotation) M_1 (kg)	M_2 (kg)	N_1 (kgmm^{-1})	N_2 (kgmm^{-1})	Section *EF* (av. rotation de 0,9°) M_1 (kg)	M_2 (kg)	N_1 (kgmm^{-1})	N_2 (kgmm^{-1})
Valeurs mesurées (à l'aide des jauges)	$129{,}^5$	1	9,3	— 1,6	109	4	7,95	— 1,1
Valeurs calculées (par la Résist. des matér.)	129,8	0	6,642	0	110,2	0	6,541	0

il est facile de le montrer, les formules permettant de faire le calcul en question sont, dans le cas général où non seulement M_1 et N_1, mais aussi M_2 et N_2, sont différents de zéro :

$$\left.\begin{aligned} &\theta_1^i + \theta_2^i - \theta_1^e - \theta_2^e = S_M\,(M_1 + M_2),\\ &\pm\,\theta_3^i \mp \theta_3^e = C_M\,(M_1 - M_2),\\ &\theta_1^i + \theta_2^i + \theta_1^e + \theta_2^e = S_N\,(N_1 + N_2),\\ &\pm\,\theta_3^i \pm \theta_3^e = C_N\,(N_1 - N_2),\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

où l'indice i se rapporte au *côté concave*, l'indice e au *côté convexe*, et où il faut choisir convenablement, dans deux de ces équations, selon le cas traité, l'un ou l'autre des deux signes prévus devant chacun des termes du premier membre. Les coefficients S_M, C_M, S_N, C_N dépendent des constantes α^*, β^*, γ^*, ainsi que des caractéristiques géométriques et mécaniques du modèle (arc) et des jauges optiques. Si l'on désigne par $\bar{e}$ l'épaisseur de ces dernières, y compris la couche de colle, e désignant toujours l'épaisseur des jauges elles-mêmes, un calcul simple, basé sur la continuité des déformations, montre que :

$$\left.\begin{aligned}
S_M &= \frac{12\,(1-\overline{\nu})\,e\,(h+e)\,(\alpha^\star+\beta^\star)}{\overline{E}h^3\left[1+\frac{6\tilde{e}}{h^3}\left(h^2+2\tilde{e}h+\frac{\tilde{e}^2}{3}\right)\right]\frac{(1-\overline{\nu})\,E}{(1-\nu)\,\overline{E}}},\\
C_M &= \frac{12\,(1+\overline{\nu})\,e\,(h+e)\,\gamma^\star}{\overline{E}h^3\left[1+\frac{6\tilde{e}}{h^3}\left(h^2+2\tilde{e}h+\frac{\tilde{e}^2}{3}\right)\right]\frac{(1+\overline{\nu})\,E}{(1+\nu)\,\overline{E}}},\\
S_N &= \frac{2\,(1-\overline{\nu})\,e\,(\alpha^\star+\beta^\star)}{\overline{E}h\left[1+\frac{2\,(1-\overline{\nu})\,\tilde{e}\,E}{(1-\nu)\,h\,\overline{E}}\right]},\\
C_N &= \frac{2\,(1+\overline{\nu})\,e\,\gamma^\star}{\overline{E}h\left[1+\frac{2\,(1+\overline{\nu})\,\tilde{e}\,E}{(1+\nu)\,h\,\overline{E}}\right]}.
\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

Le tableau 3 montre que la coïncidence des valeurs mesurées et calculées est satisfaisante.

Pour faire une autre comparaison, plus conforme à ce que la pratique attend d'une méthode expérimentale, nous avons indiqué, dans le *tableau 4*, d'une part les *valeurs mesurées de* M_1, M_2, N_1, N_2, d'autre part les *valeurs calculées* de ces grandeurs, à l'aide de la Résistance des matériaux. On voit que si la coïncidence des valeurs respectives des moments de flexion M_1, M_2 est bonne, elle est par contre moins satisfaisante pour les efforts N_1, N_2. Cela est dû au fait que, dans le cas considéré, ces dernières grandeurs n'ont qu'une faible influence sur la valeur des tensions σ_1, σ_2, qui dépendent surtout de M_1 et M_2.

§ 8. Sur la possibilité de mesurer les tensions thermiques, en élasticité bidimensionnelle, à l'aide de la méthode interféro-photoélectrique.

Nous nous proposons maintenant d'examiner s'il est possible d'appliquer la méthode interféro-photoélectrique à la détermination des tensions thermiques, en élasticité plane. Toute *variation non uniforme de température* dans une lame à faces planes et parallèles engendre, en général, des tensions σ_1, σ_2 en un point quelconque de cette lame. De telles *tensions thermiques* peuvent également être produites par une *variation uniforme* de la température, si les appuis de la lame ne lui permettent pas de se dilater librement dans toutes les directions. Dans chacun de ces deux cas, ou encore dans un cas mixte, la variation de la température et les tensions qu'elle engendre modifient, en chaque point, l'épaisseur de la lame et l'indice de réfraction. Les variations θ_1, θ_2, θ_3 du chemin optique, définies § 2, dépendent d'abord explicitement, comme précédemment, des tensions σ_1, σ_2, les coefficients $a^\star$, $b^\star$, $c^\star$ des relations (18) étant ici des fonctions lentement variables de la température. Mais les quantités θ_1, θ_2, θ_3 sont aussi directement influencées par la variation de la température, cette dernière engendrant, même en l'absence de tensions, des modifications de l'épaisseur et de l'indice de réfraction. Nous désignerons par T la *variation de la température*, évaluée à partir d'un *état initial* ($T = 0$), où les tensions sont identiquement nulles.

Remarquons que θ_1, θ_2, θ_3 *ne sont aucunement influencés par la température de l'air traversé par le rayon lumineux*, puisque ces grandeurs sont des variations du chemin optique $2ne$ d'un rayon, *à l'intérieur de la lame*. Il en sera de même des intensités lumineuses $J_1(\theta_1)$, $J_2(\theta_2)$, $\overline{J}_3(\theta_3)$ et $J_3(\theta_3)$. La méthode interféro-photoélectrique est donc ici en principe applicable, à cette différence près que θ_1, θ_2, θ_3 dépendent maintenant non seulement de σ_1, σ_2, mais également de T. Les équations (18) doivent être modifiées en conséquence.

En désignant par α le coefficient de dilatation thermique linéaire, écrivons d'abord la loi de *Hooke* sous la forme généralisée suivante, qui remplace le système (15) :

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1-\nu\sigma_2)+\alpha T, & \varepsilon_3 &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2)+\alpha T.\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2-\nu\sigma_1)+\alpha T,
\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

D'autre part, la relation de *Neumann* (14), complétée par un terme dû à la température, devient :

$$n-n_1 = n\left[\frac{q}{\rho}\,\varepsilon_1+\frac{p}{\rho}\,(\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\frac{r}{\rho}\,\alpha T\right]. \quad (25)$$

Remarquons que *les grandeurs* E, ν, n, p, q, r, ρ *dépendent de la température*, mais varient lentement en fonction de celle-ci. Dans les seconds membres des équations (24) et (25), *ce sont les valeurs de ces grandeurs relatives à la température* $T/2$ — *moyenne arithmétique entre la température initiale* $T = 0$ *et la finale* T — *qu'il faut introduire*. Par suite de l'isotropie primitive de la matière, ces mêmes valeurs interviendront dans le second membre de l'expression de $n - n_2$.

En utilisant les équations (6), (11), (24) et (25), on obtient sans difficulté les équations cherchées :

$$\left.\begin{aligned}
\theta_1 &= a^\star\left(\frac{T}{2}\right)e\sigma_1+b^\star\left(\frac{T}{2}\right)e\sigma_2+d^\star\left(\frac{T}{2}\right)e\,T,\\
\theta_2 &= b^\star\left(\frac{T}{2}\right)e\sigma_1+a^\star\left(\frac{T}{2}\right)e\sigma_2+d^\star\left(\frac{T}{2}\right)e\,T,\\
\theta_3 &= c^\star\left(\frac{T}{2}\right)e\,(\sigma_1-\sigma_2),
\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

où :

$$\left.\begin{aligned}
a^\star\left(\frac{T}{2}\right) &= \frac{2n}{\lambda E}\left(\frac{q}{\rho}-2\nu\,\frac{p}{\rho}+\nu\right),\\
b^\star\left(\frac{T}{2}\right) &= \frac{2n}{\lambda E}\left(-\frac{\nu q}{\rho}+(1-\nu)\,\frac{p}{\rho}+\nu\right),\\
c^\star\left(\frac{T}{2}\right) &= a^\star-b^\star,\\
d^\star\left(\frac{T}{2}\right) &= \frac{2n\alpha}{\lambda}\left(\frac{q}{\rho}+\frac{2p}{\rho}-1+\frac{r}{\rho}\right),
\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

désignent les valeurs des coefficients $a^\star$, $b^\star$, $c^\star$, $d^\star$ pour la température moyenne $T/2$.

Pour obtenir, dans le cas de l'*Allite CR39*, $a^\star$, $b^\star$, $c^\star$ en fonction de la température, nous avons utilisé une éprouvette prismatique de 3,14 mm d'épaisseur et de 9,96 mm de largeur, tendue axialement par une force P connue. Ayant porté cette éprouvette à une certaine température à l'aide d'un ventilateur, nous avons mesuré θ_1, θ_2, θ_3 pour différentes valeurs de P. La température restant constante pendant cette série d'essais, nous avons pu déterminer les valeurs de $a^\star$, $b^\star$, $c^\star$ à l'aide du système (26), en posant $T = 0$ dans le dernier terme des deux premières équations.

Puis nous avons fait diverses séries d'essais analogues, correspondant chacune à une autre valeur précise de la température, ce qui nous a permis, en définitive, d'obtenir en fonction de cette dernière les coefficients a^*, b^*, c^*. La figure 12 donne le résultat des mesures (cercles). Elle montre que ces coefficients croissent, en valeur absolue, lentement et linéairement en fonction de la température, dans le domaine étudié.

La quantité d^* a été déterminée par une autre série d'essais, avec la même éprouvette prismatique. Dans ces essais, on n'a appliqué aucune force sur le prisme ($\sigma_1 \equiv \sigma_2 \equiv 0$) et on a mesuré $\theta_1 \equiv \theta_2 \equiv \theta$, en faisant varier la température d'une valeur initiale, $T = 0$, à une certaine valeur finale T. De la première ou de la seconde des équations (26), on déduisait ensuite $d^*\left(\frac{T}{2}\right)$. En faisant l'essai pour deux valeurs finales T de la température, nous avons reconnu — nous reviendrons plus loin sur ce point — que d^* dépend probablement très peu de $\frac{T}{2}$, donc de la température.

Dans chacun de ces essais, on a évalué la température à l'aide de deux *résistances Philips NTC*, placées vis-à-vis l'une de l'autre, sur chacune des faces de l'éprouvette, à une distance de 15 mm du point où arrivait le rayon lumineux. Ces résistances ont permis de mesurer électriquement les variations de température T. La variation de la tension du courant, due à celle de la température, était transmise (au lieu de la variation provenant de celle de la force P dans les essais précédents), par l'intermédiaire d'un pont de *Wheatstone*, à l'une des deux plaques déflectrices verticales de l'oscillographe cathodique. On obtenait de cette façon le diagramme des oscillations de l'intensité $J(\theta)$ (fig. 4 *f*), d'où l'on déduisait θ, puis finalement la valeur de $d^*(T/2)$ cherchée. Le diagramme 4 *f* montre que la longueur d'onde des oscillations enregistrées n'est pas constante.

La principale cause de cette variation semble, dans notre cas, résider dans le fait que les variations de tension, créées par la résistance *NTC*, ne suivaient probablement pas exactement celles de la température, au point où arrivait le rayon lumineux. Un certain décalage de phase entre ces deux grandeurs devait se produire au cours de l'essai. En conséquence, si la distance horizontale des extrémités A et B du diagramme donne bien la variation totale exacte de la température (nous l'avons contrôlé à l'aide de thermomètres ordinaires), par contre, la valeur de la quantité θ cherchée doit être déterminée en comptant le nombre des oscillations et en mesurant les ordonnées des points A et B, comme nous l'avions d'ailleurs fait précédemment.

Si d^* variait considérablement en fonction de la température, cette variation engendrerait aussi des inégalités de longueur des oscillations. Ce ne fut pas le cas dans nos essais où, comme nous l'avons déjà dit, la quantité d^* s'est révélée sensiblement constante. On a obtenu en effet, pour cette grandeur, les deux valeurs suivantes :

$d^* = -0{,}029_7$ mm^{-1} degrés^{-1}, pour une var. de temp. de 22° C à 37° C,

$d^* = -0{,}029_4$ mm^{-1} degrés^{-1}, pour une var. de temp. de 22° C à 45° C.

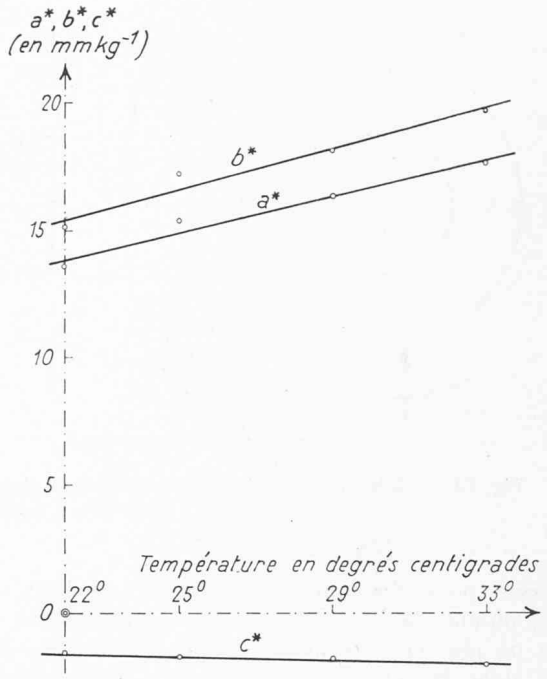

Fig. 12. — Valeurs des coefficients a^*, b^*, c^* en fonction de la température.

Il semble donc bien que d^* soit — pour l'allite du moins — sensiblement constant. D'autres essais seraient toutefois nécessaires, pour éclaircir définitivement ce point. Avant de passer à des applications, il serait d'ailleurs indispensable de soumettre les formules (26) à un contrôle expérimental systématique. Nous pensons cependant que l'*Allite CR39* ne serait pas idéale pour le genre d'essais envisagés ici, le fluage de cette matière augmentant rapidement avec la température. Nous estimons aussi qu'il serait préférable de placer les résistances *NTC* beaucoup plus près du point où arrive le rayon lumineux que nous ne l'avons fait. Dans le cas de l'utilisation de jauges optiques, on pourrait par exemple les placer à l'intérieur de la cavité circulaire définie § 6.

§ 9. **Conclusions.**

Nous pouvons conclure de la présente étude que la mesure point par point, par la méthode interféro-photoélectrique, des variations absolues θ_1, θ_2 du chemin optique $2ne$, peut, comme celle de la variation relative θ_3, apporter une utile contribution à la résolution de problèmes variés. Ces mesures absolues permettent, en *élasticité plane*, non seulement de *séparer les tensions* σ_1, σ_2, mais elles donnent en général des résultats plus exacts que ceux obtenus par la mesure de la variation relative seule. Les valeurs absolues $|\theta_1|$, $|\theta_2|$ des grandeurs mesurées sont en effet beaucoup plus grandes que $|\theta_3|$ (cinq à dix fois !). En outre, si l'on a mesuré θ_1, θ_2 et θ_3, on peut en chaque point *contrôler l'exactitude des résultats*, à l'aide de la relation $\theta_3 = \theta_1 - \theta_2$. L'emploi des formules (20), basées sur la théorie des erreurs de *Gauss*, donnera d'ailleurs les valeurs les plus probables des tensions, en chaque point considéré.

Les mesures avec les *jauges optiques*, que nous proposons pour déterminer les tensions au voisinage de la surface d'un corps solide, ne semblent toutefois pas

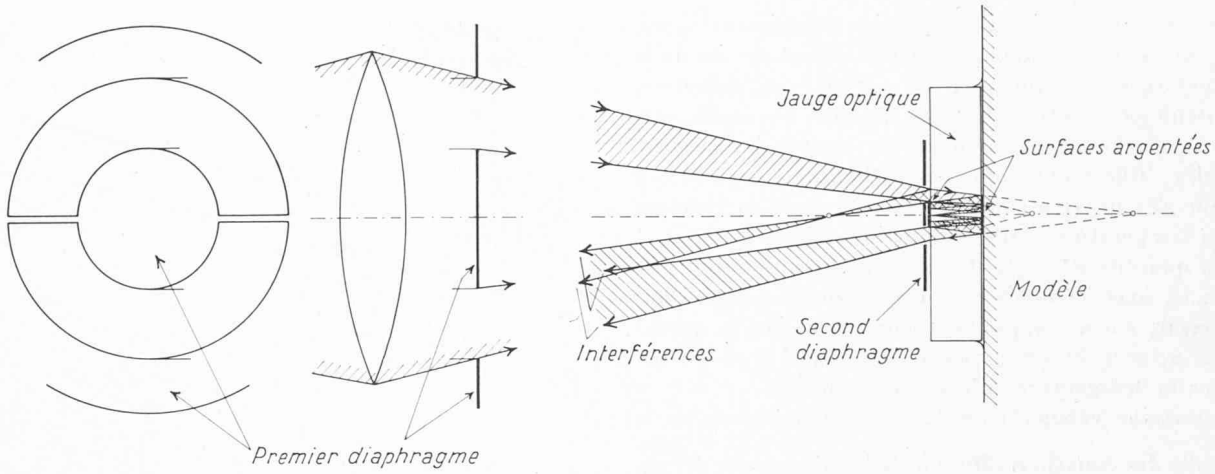

Fig. 13. — Schéma d'un dispositif permettant d'amplifier la variation du chemin optique $2ne$ d'une jauge, à l'aide d'un rayon conique et de réflexions multiples.

donner, pour l'instant, de meilleurs résultats que ceux obtenus à l'aide des *jauges à fil résistant*, qui sont de plus en plus utilisées dans la pratique. Il se pose donc la question de savoir s'il serait possible d'augmenter l'exactitude des résultats donnés par les jauges optiques, en cherchant aussi à diminuer leurs dimensions. Or, *D. Post* a proposé d'augmenter, par l'emploi de *réflexions multiples*, l'exactitude de la mesure des variations relatives de marche δ_3 [18] et celle des variations absolues δ_1, δ_2 [19]. On obtient, grâce à de telles réflexions, des variations à mesurer qui sont des multiples de δ_3, δ_1 ou δ_2. Cette même idée pourrait être également appliquée aux jauges décrites § 6. On pourrait essayer, par exemple, d'utiliser le schéma de la figure 13. Le dispositif esquissé prévoit l'emploi d'un rayon conique qui, grâce à deux diaphragmes percés chacun d'une ouverture annulaire convenablement choisie, permettrait à la lumière de pénétrer à l'intérieur de la jauge, de *s'y réfléchir plusieurs fois sur les deux faces* et de ressortir ensuite, pour venir finalement interférer avec le rayon directement réfléchi sur la première face. Il serait évidemment nécessaire de recouvrir d'une légère couche d'argent ou de platine certaines zones des deux faces de la lame, afin que le rayon, qui émerge après avoir subi plusieurs réflexions intérieures, ait autant que possible la même intensité que celui qui a été directement réfléchi. On saisit l'avantage d'un tel procédé : les réflexions successives à l'intérieur de la jauge augmenteraient le chemin optique et, conséquemment, ses variations, qui deviendraient respectivement égales à des multiples entiers de θ_1, θ_2 et θ_3.

Zurich, le 1er septembre 1961.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Favre : *Sur une nouvelle méthode optique de détermination des tensions intérieures.* Revue d'Optique théorique et instrumentale, mai, juin, juillet et août 1929. Voir aussi Schweiz. Bauzeitung, déc. 1927.

[2] Ch. Fabry : *Sur une nouvelle méthode pour l'étude expérimentale des tensions élastiques.* Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, T. 190, 1930, p. 457 et suiv.

[3] A. Dose und R. Landwehr : *Bestimmung der Linien gleicher Hauptspannungssumme mittels Interferenzen gleicher Dicke.* Ingenieur-Archiv, Bd. XXI, Heft 2, 1953, p. 73 et suiv.

[4] D. Post : *A new Photoelastic Interferometer suitable for static and dynamic measurements.* Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis, Vol. XII, No. 1, 1954, p. 99 et suiv.

[5] A. F. Brown and V. M. Hickson : *Improvements in Photoelastic technique obtained by the use of a photometric method.* British Journal of Applied Physics, Vol. 1, No. 1, January 1950, p. 39 et suiv.

[6] M. M. Frocht, Hui Pih and D. Landsberg : *The use of photometric devices in the solution of the general threedimensional Photoelastic problem.* Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis, Vol. XII, No. 1, 1954, p. 81 et suiv.

[7] H. Schwieger und H. Dietz : *Polarisationsoptische Versuche zur elastischen Stosstheorie von B. de Saint-Venant-Flamant.* Annalen der Physik, Bd. 16, 1955, p. 306 et suiv.

[8] H. Favre, W. Schumann und E. Stromer : *Ein photoelektrisch-interferometrisches Verfahren zur vollständigen Bestimmung von ebenen Spannungszuständen.* Schweiz. Bauzeitg., 78. Jahrgang, Heft 36, Sept. 1960.

[9] H. Favre : *Etude théorique de l'influence des réflexions intérieures sur la marche d'un rayon lumineux traversant une lame transparente soumise à des forces agissant dans son plan moyen.* Ingenieur-Archiv, Bd. 28, 1959, p. 306 et suiv.

[10] H. Favre : *Sur l'application de la théorie des erreurs à la résolution d'un système d'équations utilisé en photoélasticité.* Revue d'Optique théorique et instrumentale, T. 34, 1955, p. 305 et suiv.

[11] L. N. G. Filon : *The stresses in a circular ring.* The Institution of Civil Engineers. Selected Engineering Papers, No. 12, London 1924.

[12] A. Mesnager : *Sur la Détermination optique des tensions intérieures dans les solides à trois dimensions.* Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, T. 190, 1930, p. 1249.

[13] G. Oppel : *Das polarisationsoptische Schichtverfahren zur Messung der Oberflächenspannungen am beanspruchten Bauteil ohne Modell.* Z. VDI, Vol. 81, 1937, p. 638 et suiv.

[14] J. Duffy : *Effects of the Thickness of Birefringent Coatings.* Experimental Mechanics, mars 1961, p. 74 et suiv.

[15] J. Duffy and C. Mylonas : *An experimental study on the effects of the thickness of birefringent coatings.* Brown University Report DA-4674/3, déc. 1960.

[16] D. Post and F. Zandman : *Accuracy of Birefringent-coating Method for Coatings of Arbitrary Thickness.* Experimental Mechanics, janv. 1961, p. 21 et suiv.

[17] F. Zandman, S. S. Redner and E. I. Riegner : *Reinforcing effects of birefringent coatings.* Society for Experimental Stress Analysis, Detroit, Michigan, oct. 1959, paper No. 588.

[18] D. Post : *Isochromatic fringe sharpening and fringe multiplication in photoelasticity.* Proceedings of the Society of Exp. Stress Analysis. Vol. XII, No. 2, 1955, p. 143 et suiv.

[19] D. Post : *Multiple beam fringe sharpening with the series interferometer.* Journal Opt. Soc. American, Vol. 48, No. 5, 1958, p. 309 et suiv.