**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande
**Band:** 82 (1956)
**Heft:** 23

**Artikel:** Contribution à l'étude des coques cylindriques d'épaisseur variable
**Autor:** Favre, Henry
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-62094

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 09.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

82e année 10 novembre 1956 N° 23

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Abonnements:
Suisse: 1 an, 26 francs
Etranger: 30 francs
Pour sociétaires:
Suisse: 1 an, 22 francs
Etranger: 27 francs
Prix du numéro: Fr. 1.60
Ch. post. « Bulletin technique de la Suisse romande » N° II. 57 75, à Lausanne.

Adresser toutes communications concernant abonnements, changements d'adresse, expédition à **Imprimerie La Concorde, Terreaux 31, Lausanne**

**Rédaction**
et éditions de la S. A. du Bulletin technique (tirés à part), Case Chauderon 475
**Administration de la S.A. du Bulletin Technique**
Ch. de Roseneck 6 Lausanne

Paraissant tous les quinze jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président: G. Epitaux, architecte, à Lausanne; Secrétaire: J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg: MM. H. Gicot, ingénieur; M. Waeber, architecte — Vaud: MM. A. Gardel, ingénieur; A. Chevalley, ingénieur; E. d'Okolski, architecte; Ch. Thévenaz, architecte — Genève: MM. Cl. Grosgurin, architecte; E. Martin, architecte — Neuchâtel: MM. J. Béguin, architecte; R. Guye, ingénieur — Valais: MM. G. de Kalbermatten, ingénieur; D. Burgener, architecte.

Rédaction: D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Conseil d'administration
de la Société anonyme du Bulletin technique: A. Stucky, ingénieur, président; M. Bridel; G. Epitaux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

**Tarif des annonces**

| | | |
|---|---|---|
| 1/1 page | Fr. | 264.— |
| 1/2 » | » | 134.40 |
| 1/4 » | » | 67.20 |
| 1/8 » | » | 33.60 |

**Annonces Suisses S. A. (ASSA)**

Place Bel-Air 2. Tél. 22 33 26
Lausanne et succursales

SOMMAIRE : *Contribution à l'étude des coques cylindriques d'épaisseur variable*, par HENRY FAVRE, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich. — Société suisse des ingénieurs et des architectes : *Groupe des ingénieurs de l'industrie.* — Association suisse des électriciens : *20e Journée de la haute fréquence.* — DIVERS : *Société suisse de mécanique des sols et des travaux de fondation.* — BIBLIOGRAPHIE. — SERVICE DE PLACEMENT. — DOCUMENTATION GÉNÉRALE. — DOCUMENTATION DU BATIMENT. — INFORMATIONS DIVERSES.

# CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES COQUES CYLINDRIQUES D'ÉPAISSEUR VARIABLE

par HENRY FAVRE, Professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich

## Introduction

Plusieurs auteurs ont étudié, par diverses méthodes théoriques, les déformations et les contraintes des coques cylindriques d'épaisseur variable, chargées symétriquement par rapport à leur axe. Citons, en particulier, les travaux de *Reissner* [1], *Meissner* [2], *Dumas* [3], *Paschoud* [4], *de Fontviolant* [5] et *Tâche* [6] [1], qui ont apporté de remarquables et utiles contributions à la résolution de cet important problème.

Nous voulons exposer dans ce travail une nouvelle méthode de calcul applicable aux coques cylindriques dont l'épaisseur $h$, constante dans une section donnée, *varie linéairement dans le sens de l'axe.* Cette méthode consiste à intégrer l'équation différentielle de la ligne élastique méridienne, à l'aide d'un développement en série procédant selon les puissances croissantes du paramètre caractérisant la variation de $h$. Dans le *cas fondamental* où un couple $M_0$ et un effort tranchant $Q_0$ (constants par unité de longueur) sont appliqués à l'une des extrémités d'une coque relativement longue [2], la série en question est rapidement convergente, pourvu que la variation de l'épaisseur le long de l'axe soit suffisamment lente. On peut alors limiter le développement à ses deux premiers termes, et obtenir pour les déformations et les contraintes des *formules explicites simples*, d'un usage facile, faisant clairement ressortir le rôle joué par les différents facteurs dont dépendent ces grandeurs. Les formules en question permettent de traiter de nombreux problèmes qui se posent dans les applications. Les solutions obtenues, donnant les grandeurs cherchées *sous forme explicite*, faciliteront aux ingénieurs le choix des dimensions des objets calculés.

Après avoir rappelé les relations générales régissant les déformations et les contraintes des coques cylindriques d'épaisseur variable, chargées symétriquement par rapport à leur axe (§ 1), nous intégrerons l'équation différentielle de la ligne élastique méridienne dans le cas fondamental précisé ci-dessus (§ 2), puis discuterons la solution trouvée (§ 3). Nous appliquerons enfin nos formules à un certain nombre d'exemples intéressant aussi bien les ingénieurs constructeurs que les ingénieurs mécaniciens (§ 4).

[1] Les chiffres entre crochets se rapportent à la bibliographie placée à la fin de cette étude.

[2] C'est-à-dire suffisamment longue pour que les déformations et les contraintes engendrées par $M_0$ et $Q_0$ soient négligeables à l'autre extrémité.

### 1. Rappel des équations générales régissant les déformations et les contraintes des coques cylindriques d'épaisseur variable, chargées symétriquement par rapport à leur axe

Nous supposerons que la surface moyenne de la coque soit un cylindre de rayon $a$ (fig. 1). Désignons par

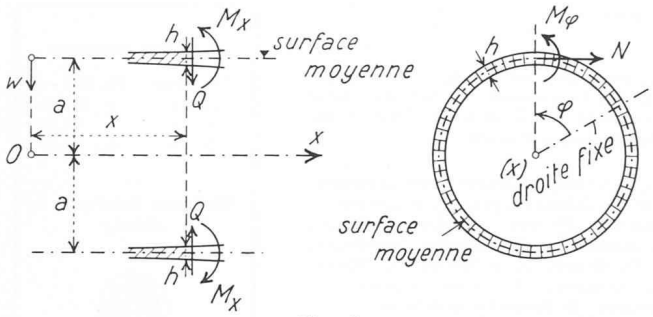


Fig. 1

$x$ l'abscisse d'une section normale à l'axe et par $h(x)$ l'épaisseur. Nous admettrons que cette dernière grandeur soit petite par rapport à $a$ et que la dérivée $\frac{dh}{dx}$ le soit elle-même par rapport à l'unité. Il s'agira donc d'une *coque cylindrique mince, d'épaisseur légèrement variable.*

Nous admettrons en outre que la matière constituant la coque soit homogène, isotrope, élastiquement déformable, et que les déplacements des différents points, sous l'action des forces que nous allons préciser, soient petits par rapport à l'épaisseur $h$.

Dans ces conditions, la composante $w$ (comptée positivement si elle est dirigée vers l'axe $x$, négativement dans le cas contraire) du déplacement d'un point de la surface moyenne suivant la normale satisfait à l'équation différentielle [3] :

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(D\,\frac{d^2w}{dx^2}\right) + \frac{Eh}{a^2}\,w = Z\,, \tag{1}$$

où
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\,, \tag{2}$$

$E$ désignant le module d'élasticité, $\nu$ le nombre de Poisson, $Z(x)$ la force normale par unité de surface agissant sur la coque. Cette force ne dépend donc pas de l'azimut $\varphi$ du point considéré, mais seulement de son abscisse $x$.

La composante $w$ définit la *surface moyenne de la coque déformée*, c'est-à-dire la surface de révolution sur laquelle sont situés les points qui étaient primitivement sur le cylindre de rayon $a$. La coupe axiale de cette surface est la *ligne élastique méridienne.* La relation (1) est donc l'équation différentielle de cette ligne.

[3] Voir [7], p. 130, [8], p. 391, [9], p. 373 et [10], p. 692. L'équation (1) suppose essentiellement que la résultante $R$ des forces agissant d'un côté d'une section normale à l'axe soit nulle quel que soit $x$. Si ce n'était pas le cas, il faudrait ajouter $-\frac{\nu R}{2\pi a^2}$ au second membre de l'équation, comme il est facile de le démontrer.

Les moments de flexion $M_x$, $M_\varphi$, l'effort annulaire $N$ et l'effort tranchant $Q$ (par unité de longueur) sont donnés en fonction de la composante $w$ par les formules :

$$M_x = -D\,\frac{d^2w}{dx^2}\,, \tag{3}$$

$$M_\varphi = \nu M_x = -\nu D\,\frac{d^2w}{dx^2}\,, \tag{4}$$

$$N = -\frac{Eh}{a}\,w\,, \tag{5}$$

$$Q = \frac{dM_x}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(D\,\frac{d^2w}{dx^2}\right). \tag{6}$$

Insistons sur le fait que dans les coques cylindriques d'épaisseur variable, $D$ est une fonction connue de l'abscisse $x$, définie par la relation (2).

### 2. Intégration de l'équation différentielle de la ligne élastique méridienne, dans le cas fondamental où un couple de moment $M_0$ et un effort tranchant $Q_0$ sont appliqués à l'une des extrémités de la coque, l'autre extrémité étant libre, l'épaisseur étant supposée linéairement variable

Désignons par $h_0$ l'épaisseur à l'extrémité où sont appliqués $M_0$ et $Q_0$ et posons :

$$h = h_0\left(1 + \frac{\lambda}{a}\,x\right), \tag{7}$$

où $\lambda$ est un nombre caractérisant la variation de l'épaisseur. Ce nombre est positif si l'épaisseur augmente lorsqu'on s'éloigne de l'extrémité considérée (fig. 2a)

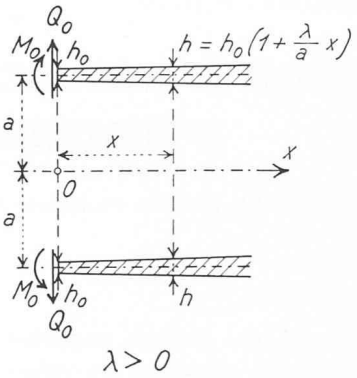


Fig. 2a

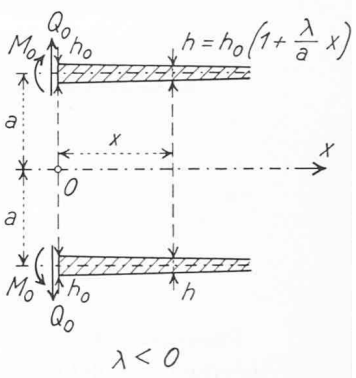


Fig. 2b

et négatif dans le cas contraire (fig. 2b). La formule (2) montre que :

$$\left.\begin{aligned} D = \frac{Eh_0^3\left(1+\frac{\lambda}{a}x\right)^3}{12\,(1-\nu^2)} = \frac{Eh_0^3}{12\,(1-\nu^2)}\Big(1 + 3\,\frac{\lambda}{a}\,x + \\ + 3\,\frac{\lambda^2}{a^2}\,x^2 + \frac{\lambda^3}{a^3}\,x^3\Big)\,, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

et l'équation différentielle (1) devient, après quelques transformations et en remarquant que $Z \equiv 0$ :

$$\left.\begin{aligned} \left(1+\frac{\lambda}{a}\,x\right)^2\frac{d^4w}{dx^4} + 6\,\frac{\lambda}{a}\left(1+\frac{\lambda}{a}\,x\right)\frac{d^3w}{dx^3} + \frac{6\lambda^2}{a^2}\,\frac{d^2w}{dx^2} + \\ + \frac{12\,(1-\nu^2)}{a^2h_0^2}\,w = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

*Posons* :

$$\boxed{\beta = \sqrt[4]{\frac{3\,(1-\nu^2)}{a^2 h_0^2}}\,,} \tag{10}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\lambda}{a\beta} = \lambda \sqrt[4]{\frac{h_0^2/a^2}{3\,(1-\nu^2)}}\,.} \tag{11}$$

Le paramètre $\varepsilon$ caractérise la variation de l'épaisseur au même titre que $\lambda$. C'est un nombre d'autant plus petit que la variation le long de l'axe est plus lente. Remplaçons encore $x$ par la nouvelle variable indépendante $\xi$, en posant [4] :

$$\boxed{\beta\, x = \xi\ .} \tag{12}$$

L'équation (9) prend alors la forme :

$$\underline{(1+\varepsilon\xi)^2\, w'''' + 6\varepsilon(1+\varepsilon\xi)\, w''' + 6\varepsilon^2\, w'' + 4\, w = 0,} \tag{13}$$

$w'$, $w''$, ... étant les *dérivées de $w$ par rapport à $\xi$*.

Pour intégrer cette équation, posons [5] :

$$\underline{w = w_o + w_1\varepsilon + w_2\varepsilon^2 + \ldots = \sum_{i=o}^{\infty} w_i \varepsilon^i,} \tag{14}$$

où $w_o$, $w_1$, $w_2$, ... désignent des fonctions de $\xi$.

En introduisant la valeur (14) de $w$ dans la relation (13), on obtient une équation qui doit être satisfaite quelle que soit la valeur du paramètre $\varepsilon$. Ceci exige que les coefficients des différentes puissances de ce paramètre soient tous nuls. D'où le système :

$$\left.\begin{array}{l}
\varepsilon^0 \mid\ w_0'''' + 4w_0 = 0,\\
\varepsilon^1 \mid\ w_1'''' + 4w_1 + 2\,\xi w_0'''' + 6w_0''' = 0,\\
\varepsilon^2 \mid\ w_2'''' + 4w_2 + 2\xi w_1'''' + 6w_1''' + \xi^2 w_0'''' + 6\xi w_0''' +\\
\qquad + 6w_0'' = 0,\\
\varepsilon^3 \mid\ w_3'''' + 4w_3 + 2\,\xi w_2'''' + 6w_2''' + \xi^2 w_1'''' + 6\xi w_1''' +\\
\qquad + 6w_1'' = 0,\\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
\varepsilon^i \mid\ w_i'''' + 4w_i + 2\xi w_{i-1}'''' + 6w_{i-1}''' + \xi^2 w_{i-2}'''' + 6\xi w_{i-2}''' +\\
\qquad + 6w_{i-2}'' = 0,\\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots
\end{array}\right\} \tag{15}$$

[4] $\beta$ a la dimension de l'inverse d'une longueur ; $\lambda$, $\varepsilon$, $\xi$ et le produit $a\beta$ sont des nombres.

[5] *Reissner* [1] et *Meissner* [2] ont montré que, moyennant un changement de variable et l'introduction d'un opérateur convenablement choisi, l'équation du 4e ordre (13) (c'est-à-dire la relation (1) pour $Z \equiv 0$ et $D = \frac{Eh_0^3}{12\,(1-\nu^2)}\left(1+\frac{\lambda}{a}x\right)^3$ peut être remplacée par deux équations du 2e ordre, chacune intégrable à l'aide de *fonctions de Bessel*. La solution (14) que nous proposons aujourd'hui offre l'avantage de rendre clairement apparente l'influence de la variation de l'épaisseur (caractérisée par $\varepsilon$) et de conduire, dans le cas très fréquent où $\varepsilon$ est petit, à des formules relativement simples, comme nous le verrons plus loin.

D'autre part, les conditions à l'extrémité $x = 0$ ou $\xi = 0$ s'écrivent :

$$\underline{(M_x)_{x=0} = M_o} \quad \text{et} \quad \underline{(Q)_{x=0} = Q_o,} \tag{16}$$

c'est-à-dire, en introduisant les valeurs (3), (6) et (14) de $M_x$, $Q$ et $w$, et en posant

$$\boxed{D_o = \frac{Eh_0^3}{12\,(1-\nu^2)}\,:} \tag{17}$$

$$(M_x)_{x=0} = -\left[D\frac{d^2w}{dx^2}\right]_{x=0} =$$

$$\underline{= -\beta^2 D_0\left[(w_0'')_{\xi=0} + (w_1'')_{\xi=0}\,\varepsilon + (w_2'')_{\xi=0}\,\varepsilon^2 + \ldots\right] = M_0,}$$

$$(Q)_{x=0} = \left[-\frac{d}{dx}\left(D\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_{x=0} = -\left[\frac{dD}{dx}\frac{d^2w}{dx^2} + D\frac{d^3w}{dx^3}\right]_{x=0} =$$

$$= -D_0\left[3\frac{\lambda}{a}\left(1+\frac{\lambda}{a}x\right)^2\frac{d^2w}{dx^2} + \left(1+\frac{\lambda}{a}x\right)^3\frac{d^3w}{dx^3}\right]_{x=0} =$$

$$= -\beta^3 D_0\,[3\,\varepsilon\,(1+\varepsilon\xi)^2\, w'' + (1+\varepsilon\xi)^3\, w''']_{\xi=0} =$$

$$= -\beta^3 D_0\Big\{3\varepsilon\left[(w_0'')_{\xi=0} + (w_1'')_{\xi=0}\,\varepsilon + (w_2'')_{\xi=0}\,\varepsilon^2 + \ldots\right] +$$

$$+ (w_0''')_{\xi=0} + (w_1''')_{\xi=0}\,\varepsilon + (w_2''')_{\xi=0}\,\varepsilon^2 + \ldots\Big\} =$$

$$\underline{= -\beta^3 D_0\Big\{(w_0''')_{\xi=0} + \left[3\,(w_0'')_{\xi=0} + (w_1''')_{\xi=0}\right]\varepsilon +}$$

$$\underline{+ \left[3\,(w_1'')_{\xi=0} + (w_2''')_{\xi=0}\right]\varepsilon^2 + \ldots\Big\} = Q_0.}$$

Ces deux conditions devant être satisfaites quel que soit $\varepsilon$, on doit nécessairement avoir :

$$\underline{-\beta^2 D_0\,(w_0'')_{\xi=0} = M_0,} \tag{18}$$

$$\underline{(w_1'')_{\xi=0} = (w_2'')_{\xi=0} = \ldots = 0,} \tag{19}$$

$$\underline{-\beta^3 D_0\,(w_0''')_{\xi=0} = Q_0,} \tag{20}$$

$$\underline{3\,(w_0'')_{\xi=0} + (w_1''')_{\xi=0} = 0,} \quad \underline{(w_2''')_{\xi=0} = (w_3''')_{\xi=0} = \ldots = 0.} \tag{21}$$

Enfin, la longueur de la coque étant supposée suffisamment grande pour que les déformations et les contraintes engendrées par $M_0$ et $Q_0$ ne se propagent pas jusqu'à l'extrémité libre, la fonction $w$ et sa dérivée doivent être nulles pour $\xi = \infty$, ce qui exige que :

$$\underline{(w_0)_{\xi=\infty} = (w_1)_{\xi=\infty} = (w_2)_{\xi=\infty} = \ldots = 0,} \tag{22}$$

$$\underline{(w_0')_{\xi=\infty} = (w_1')_{\xi=\infty} = (w_2')_{\xi=\infty} = \ldots = 0.} \tag{23}$$

Revenons maintenant au système (15). Nous pouvons en intégrer *successivement* les équations, compte tenu

des conditions (18) à (23). La première des équations (15) nous donnera en effet la fonction inconnue $w_0$ qui, substituée dans la seconde relation, permettra de calculer la fonction $w_1$, laquelle, introduite de même que $w_0$ dans la troisième, donnera $w_2$, et ainsi de suite. Chacune des équations différentielles est linéaire, à coefficients constants, et il est facile d'en trouver une solution particulière.

Nous nous sommes contentés de calculer uniquement $w_0$ et $w_1$, et de limiter la série (14) à ses deux premiers termes. Nous préciserons plus loin les valeurs de $\varepsilon$ pour lesquelles cette approximation est permise. Mais il n'y aurait aucune difficulté à calculer $w_2$ et même $w_3$.

Voici le développement des calculs.

La solution générale de la *première des équations* (15) est :

$$w_0 = e^{\xi}\,(C_1 \cos\xi + C_2 \sin\xi) + e^{-\xi}\,(C_3 \cos\xi + C_4 \sin\xi), \tag{24}$$

où $C_1, \ldots, C_4$ désignent des constantes. Les deux premières des conditions (22), (23) et les conditions (18) et (20) exigent que

$$C_1 = C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{2\beta^3 D_0}(\beta M_0 + Q_0), \; C_4 = \frac{M_0}{2\beta^2 D_0};$$

d'où, en introduisant ces valeurs dans (24) :

$$\underline{w_0 = \frac{e^{-\xi}}{2\beta^3 D_0}\Big[\beta M_0 (\sin\xi - \cos\xi) - Q_0 \cos\xi\Big]}. \tag{25}$$

En substituant dans la *seconde des équations* (15), celle-ci devient :

$$\left.\begin{aligned} w_1'''' + 4w_1 = {} & \frac{4\xi e^{-\xi}}{\beta^3 D_0}\Big[\beta M_0 (\sin\xi - \cos\xi) - Q_0 \cos\xi\Big] - \\ & - \frac{6 e^{-\xi}}{\beta^3 D_0}\Big[2\beta M_0 \sin\xi + Q_0 (\sin\xi - \cos\xi)\Big]. \end{aligned}\right\}$$

La solution générale de l'équation homogène correspondante est :

$$w_1 = e^{\xi}\left(C_1' \cos\xi + C_2' \sin\xi\right) + e^{-\xi}\left(C_3' \cos\xi + C_4' \sin\xi\right),$$

où $C_1', \ldots, C_4'$ désignent des constantes.

Cherchons une solution particulière de l'équation complète, en posant :

$$w_1 = e^{-\xi}\,(A\xi^2 \cos\xi + B\xi^2 \sin\xi + C\xi \cos\xi + D\xi \sin\xi),$$

où $A, B, C, D$ désignent des constantes. En substituant et en identifiant les coefficients, on obtient pour ces constantes les valeurs :

$$A = -\frac{2\beta M_0 + Q_0}{8\beta^3 D_0}, \quad B = -\frac{Q_0}{8\beta^3 D_0},$$

$$C = \frac{3(\beta M_0 + Q_0)}{8\beta^3 D_0}, \quad D = -\frac{3 M_0}{8\beta^2 D_0}.$$

La solution générale de la seconde des équations (15) est donc :

$$\left.\begin{aligned} w_1 = {} & e^{\xi}\left(C_1' \cos\xi + C_2' \sin\xi\right) + \frac{e^{-\xi}}{8\beta^3 D_0}\cdot \\ & \Big[C_3'' \cos\xi + C_4'' \sin\xi - (2\beta M_0 + Q_0)\xi^2 \cos\xi - Q_0 \xi^2 \sin\xi + \\ & + 3(\beta M_0 + Q_0)\xi \cos\xi - 3\beta M_0 \xi \sin\xi\Big], \end{aligned}\right\}$$

$C_3''$, $C_4''$ désignant de nouvelles constantes.

Les secondes des conditions (22), (23) et les deux premières conditions (19), (21) exigent que

$$C_1' = C_2' = 0, \; C_3'' = 5\beta M_0 + 4Q_0, \; C_4'' = -4(2\beta M_0 + Q_0).$$

D'où, en substituant et en changeant l'ordre des termes :

$$\left.\begin{aligned} \underline{w_1 = \frac{e^{-\xi}}{8\beta^3 D_0}\Big[-(2\beta M_0 + Q_0)\xi^2 \cos\xi - Q_0 \xi^2 \sin\xi +} \\ \underline{+ 3(\beta M_0 + Q_0)\xi \cos\xi - 3\beta M_0 \xi \sin\xi +} \\ \underline{+ (5\beta M_0 + 4Q_0)\cos\xi - 4(2\beta M_0 + Q_0)\sin\xi\Big]}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Les expressions (25) et (26) de $w_0$ et $w_1$, introduites dans la série (14) limitée à ses deux premiers termes, donnent finalement pour la fonction cherchée $w$ la valeur approchée :

$$\boxed{\begin{aligned} w = \frac{e^{-\xi}}{2\beta^3 D_0}\Big\{ & \beta M_0 (\sin\xi - \cos\xi) - Q_0 \cos\xi + \\ & + \frac{1}{4}\Big[-(2\beta M_0 + Q_0)\xi^2 \cos\xi - Q_0 \xi^2 \sin\xi + \\ & + 3(\beta M_0 + Q_0)\xi \cos\xi - 3\beta M_0 \xi \sin\xi + \\ & + (5\beta M_0 + 4Q_0)\cos\xi - 4(2\beta M_0 + Q_0)\sin\xi\Big]\varepsilon\Big\}. \end{aligned}} \tag{27}$$

On déduit facilement de (27) la dérivée de $w$ par rapport à $x$, $\dfrac{dw}{dx} = \beta \dfrac{dw}{d\xi} = \beta w'$ :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw}{dx} = \frac{e^{-\xi}}{2\beta^2 D_0}\Big\{ & 2\beta M_0 \cos\xi + Q_0 (\sin\xi + \cos\xi) + \\ & + \frac{1}{4}\Big[2\beta M_0 \xi^2 \cos\xi + 2(\beta M_0 + Q_0)\xi^2 \sin\xi - \\ & - 5(2\beta M_0 + Q_0)\xi \cos\xi - 5Q_0 \xi \sin\xi - \\ & - 5(2\beta M_0 + Q_0)\cos\xi\Big]\varepsilon\Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Les valeurs de $w$ et de $\frac{dw}{dx}$ à l'extrémité $x = 0$ se déduisent de (27) et (28) en posant $\xi = 0$ :

$$(w)_{x=0} = \frac{-1}{2\beta^3 D_0}\left[\left(1 - \frac{5}{4}\varepsilon\right)\beta M_0 + (1-\varepsilon) Q_0\right], \quad (29)$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = \frac{1}{2\beta^2 D_0}\left(1 - \frac{5}{4}\varepsilon\right)(2\beta M_0 + Q_0). \quad (30)$$

Ces dernières relations nous seront très utiles dans les applications (voir § 4).

*Remarque.* Nous avons en somme appliqué ici la même méthode que celle déjà utilisée par l'auteur et ses collaborateurs *E. Chabloz*, *B. Gilg* et *W. Schumann* dans l'étude de diverses plaques fléchies d'épaisseur linéairement variable. Dans ces travaux en effet, l'équation différentielle du problème a toujours été intégrée à l'aide d'un développement en série procédant selon les puissances croissantes du paramètre caractérisant la variation de l'épaisseur [6]. Cette méthode se révèle ainsi assez générale.

### 3. Domaine d'application et discussion de la solution trouvée

Pour que les formules obtenues donnent des résultats suffisamment exacts, il est nécessaire que, dans le domaine de la coque où se produisent les déformations et les contraintes, la série (14) converge suffisamment rapidement pour que l'on puisse limiter le développement à ses deux premiers termes. Or il est pratiquement impossible de faire l'étude rigoureuse de la convergence de cette série. C'est pourquoi nous nous sommes contentés — comme on le fait très souvent dans ces sortes de problèmes — d'imposer au second terme $w_1\varepsilon$ la condition de rester petit par rapport au premier $w_0$, dans le domaine en question. Ce domaine est d'ailleurs relativement restreint. Le facteur exponentiel $\varepsilon^{-\xi}$ des formules (27) et (28) « amortit » en effet très rapidement la « perturbation » produite par l'application de $M_0$ et de $Q_0$ à l'extrémité $\xi = 0$. On peut même admettre que la section $\xi = 3$ (où $e^{-\xi} \simeq 1/20$) limite ce domaine, comme le montrent d'ailleurs les diagrammes que nous discuterons plus loin (voir fig. 3 à 6).

Or si l'on examine, pour $0 \leqq \xi \leqq 3$, la quantité contenue dans la parenthèse de la formule (27), on constate que le terme indépendant du paramètre $\varepsilon$ et le facteur $\frac{1}{4}$ [...] multipliant ce paramètre (ces deux quantités sont respectivement proportionnelles à $w_0$ et $w_1$) *sont du même ordre de grandeur*. Cette propriété peut être établie soit en considérant les deux cas extrêmes $M_0 \neq 0$, $Q_0 = 0$ et $M_0 = 0$, $Q_0 \neq 0$, soit par des applications numériques. Les formules (29) et (30) la rendent directement apparente. La série (14) sera donc certainement rapidement convergente et la formule (27) suffisamment exacte, toutes les fois que

$$|\varepsilon| \leqq 0{,}05, \text{ ou éventuellement } |\varepsilon| \leqq 0{,}1. \quad (31)$$

On peut d'ailleurs vérifier par un raisonnement analogue que non seulement la fonction $w$ obtenue, mais aussi les dérivées successives jusqu'à celle d'ordre 4, donnent des résultats suffisamment exacts si $\varepsilon$ satisfait au critère (31) (voir la formule (28), de laquelle on peut déduire les dérivées d'ordre supérieur).

En se rappelant que $\varepsilon = \frac{\lambda}{a\beta}$, où $\beta$ a la valeur (10), on déduit de (31), pour $\lambda$, la condition :

$$\left.\begin{aligned} &|\lambda| \leqq 0{,}05\, a\beta = 0{,}05 \sqrt[4]{3\,(1-\nu^2)\frac{a^2}{h_0^2}}, \\ &\text{ou éventuellement } |\lambda| \leqq 0{,}1 \sqrt[4]{3\,(1-\nu^2)\frac{a^2}{h_0^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (31')$$

Le tableau ci-dessous donne, d'après la seconde des inégalités (31'), les limites supérieures de $|\lambda|$, pour cinq valeurs du rapport $a/h_0$ et pour $\nu = 0{,}25$ :

| $\frac{a}{h_0} =$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert\lambda\rvert_{\lim} =$ | 0,409 | 0,579 | 0,709 | 0,819 | 0,916 |

Pour que les formules établies soient valables, il faut en outre supposer la coque assez longue pour que les conditions (22) et (23) soient approximativement satisfaites à l'extrémité libre. En vertu de ce que nous avons vu plus haut, ce sera le cas si la longueur $l$ de la coque est égale ou supérieure à $\frac{3}{\beta}$. On a donc la seconde condition [7] :

$$l \geqq \frac{3}{\beta} = \sqrt[4]{\frac{27\, a^2 h_0^2}{1-\nu^2}}. \quad (32)$$

A l'extrémité $\xi = 3$ du domaine où se produisent les déformations et les contraintes, l'épaisseur est, d'après (7) et (12) :

$$(h)_{\xi=3} = h_0\,(1 + \varepsilon\,\xi)_{\xi=3} = h_0\,(1 + 3\,\varepsilon).$$

Dans les cas extrêmes où $\varepsilon = \pm 0{,}1$, l'épaisseur varie donc, dans le domaine en question, au maximum de $3.0{,}1 = 30$ % (de 15 % si l'on prescrit à $|\varepsilon|$ d'être inférieur ou égal à 0,05). Ceci explique pourquoi il est

[6] Voir par exemple [11], [12], [13] et [14].

[7] Si $l$ était inférieur à la limite (32), on pourrait encore utiliser les formules établies, mais il faudrait supposer qu'on applique à l'extrémité $x = l$ un couple $M_l$ et un effort tranchant $Q_l$ respectivement égaux et opposés à ceux déduits des formules (3) et (6) et faire un second calcul dans le sens des $x$ décroissants, et éventuellement encore d'autres calculs analogues, jusqu'à ce que les valeurs obtenues pour $M$ et $Q$ à la dernière extrémité considérée soient négligeables. En ajoutant les déformations et les contraintes, on obtiendrait les valeurs cherchées.

possible de « linéariser » la solution, en ne considérant que les deux premiers termes du développement (14).

— Passons maintenant à la discussion proprement dite des valeurs obtenues. Nous distinguerons deux cas : celui d'un couple $M_0$ et celui d'un effort tranchant $Q_0$, appliqué chaque fois *seul* à l'extrémité $x = 0$.

Pour faciliter non seulement notre exposé, mais surtout les calculs numériques, nous poserons [8] :

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\xi) &= e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi), & \Psi &= e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi), \\ \theta(\xi) &= e^{-\xi}\cos\xi, & \zeta(\xi) &= e^{-\xi}\sin\xi. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

1°) *Cas où* $M_0 \neq 0$, $Q_0 = 0$.

De la formule (27), on déduit sans difficulté les expressions de la fonction $w$ et de ses trois premières dérivées par rapport à $x$ :

$$\left.\begin{aligned} w = w_0 + w_1\varepsilon = \frac{M_0}{\beta^2 D_0}\Big\{ &-\frac{1}{2}\Psi(\xi) + \\ &+\frac{1}{8}\Big[(-2\xi^2 + 3\xi + 5)\,\theta(\xi) - (3\xi + 8)\,\zeta(\xi)\Big]\varepsilon\Big\}, \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw}{dx} = \frac{dw_0}{dx} + \frac{dw_1}{dx}\varepsilon = \frac{M_0}{\beta D_0}\Big\{ &\theta(\xi) + \\ &+\frac{1}{4}\Big[(\xi^2 - 5\xi - 5)\,\theta(\xi) + \xi^2\zeta(\xi)\Big]\varepsilon\Big\}, \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d^2 w_1}{dx^2}\varepsilon = \frac{M_0}{D_0}\Big\{ &-\Phi(\xi) + \\ &+\frac{1}{4}\Big[7\xi\,\theta(\xi) + (-2\xi^2 + 7\xi + 5)\,\zeta(\xi)\Big]\varepsilon\Big\}, \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{d^3 w_0}{dx^3} + \frac{d^3 w_1}{dx^3}\varepsilon = \frac{\beta M_0}{D_0}\Big\{ &2\zeta(\xi) + \\ &+\frac{1}{2}\Big[(-\xi^2 + 6)\,\theta(\xi) + (\xi^2 - 9\xi + 1)\,\zeta(\xi)\Big]\varepsilon\Big\}. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

La figure 3 est une représentation graphique des

[8] Le lecteur trouvera dans [8], p. 394, une table donnant les valeurs des fonctions $\Phi$, $\Psi$, $\theta$, $\zeta$ pour $0 \leq \xi \leq 7$.

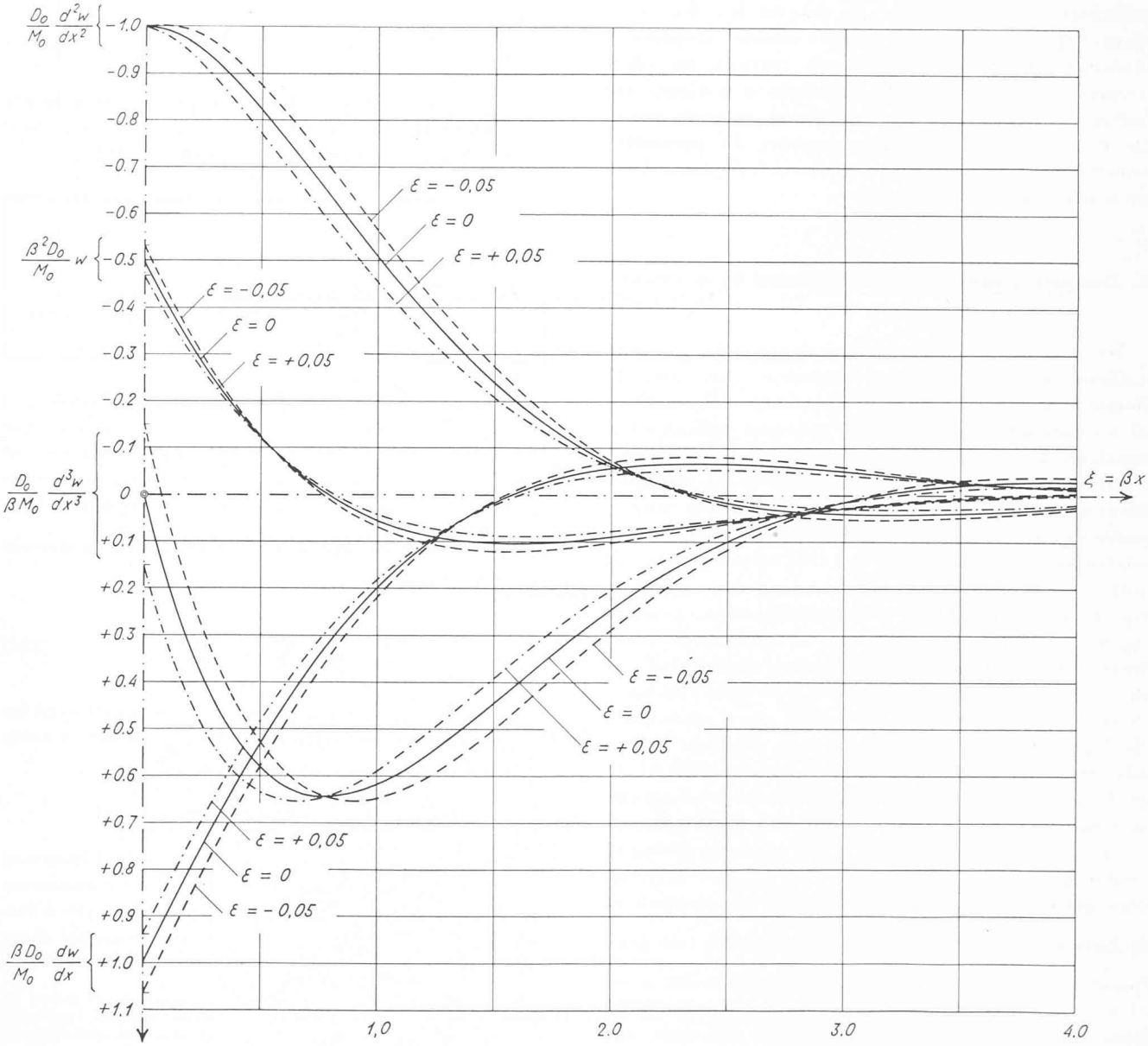


Fig. 3. — *Cas où* $M_0 \neq 0$, $Q_0 = 0$. Représentation graphique de $\frac{\beta^2 D_0}{M_0} w$, $\frac{\beta D_0}{M_0}\frac{dw}{dx}$, $\frac{D_0}{M_0}\frac{d^2w}{dx^2}$ et $\frac{D_0}{\beta M_0}\frac{d^3w}{dx^3}$ en fonction de $\xi = \beta x$, pour $\varepsilon = \frac{\lambda}{a\beta} = +0{,}05$, $\pm 0{,}00$ et $-0{,}05$.

quantités $\frac{\beta^2 D_0}{M_0} w$, $\frac{\beta D_0}{M_0} \frac{dw}{dx}$, $\frac{D_0}{M_0} \frac{d^2 w}{dx^2}$, $\frac{D_0}{\beta M_0} \frac{d^3 w}{dx^3}$ en fonction de $\xi = \beta x$, lorsque le paramètre $\varepsilon = \frac{\lambda}{a\beta}$ caractérisant la variation de l'épaisseur est égal à $+ 0{,}05$, $\pm 0{,}00$ et $-0{,}05$. Ces diagrammes, qui sont *applicables quelles que soient les valeurs des caractéristiques* $D_0$, $\beta$, *et du moment* $M_0$, montrent éloquemment l'influence d'une variation d'épaisseur sur les déformations de la coque. On remarquera que cette influence est relativement faible. Conformément à la seconde des conditions (31), on peut non seulement interpoler, mais éventuellement *extrapoler* les valeurs définies par les ordonnées des courbes, pourvu toutefois que $|\varepsilon|$ reste inférieur ou égal à 0,1.

Calculons maintenant $M_x$, $M_\varphi$, $N$ et $Q$. On obtient à l'aide des formules (3) à (6), compte tenu de (2), (7), (11) et (14) et en ne gardant dans les développements que la partie linéaire en $\varepsilon$ :

$$M_x = -D_0\left[\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \left(3\frac{d^2 w_0}{dx^2}\xi + \frac{d^2 w_1}{dx^2}\right)\varepsilon\right], \tag{38}$$

$$M_\varphi = \nu M_x = -\nu D_0\left[\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \left(3\frac{d^2 w_0}{dx^2}\xi + \frac{d^2 w_1}{dx^2}\right)\varepsilon\right], \tag{39}$$

$$N = -4a\beta^4 D_0\left[w_0 + (w_0\xi + w_1)\varepsilon\right], \tag{40}$$

$$Q = -D_0\left[\frac{d^3 w_0}{dx^3} + \left(3\frac{d^3 w_0}{dx^3}\xi + \frac{d^3 w_1}{dx^3} + 3\beta\frac{d^2 w_0}{dx^2}\right)\varepsilon\right]. \tag{41}$$

En introduisant dans ces formules les valeurs de $w_0$, $w_1$, $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$, $\frac{d^2 w_1}{dx^2}$, $\frac{d^3 w_0}{dx^3}$, $\frac{d^3 w_1}{dx^3}$ déduites des relations (34), (36) et (37), il est facile de calculer $M_x, \ldots, Q$. Les valeurs de $w_0$, $w_1$, $\frac{d^2 w_0}{dx^2}, \ldots$ peuvent d'ailleurs aussi être déduites de la figure 3.

La figure 4 est une représentation graphique des

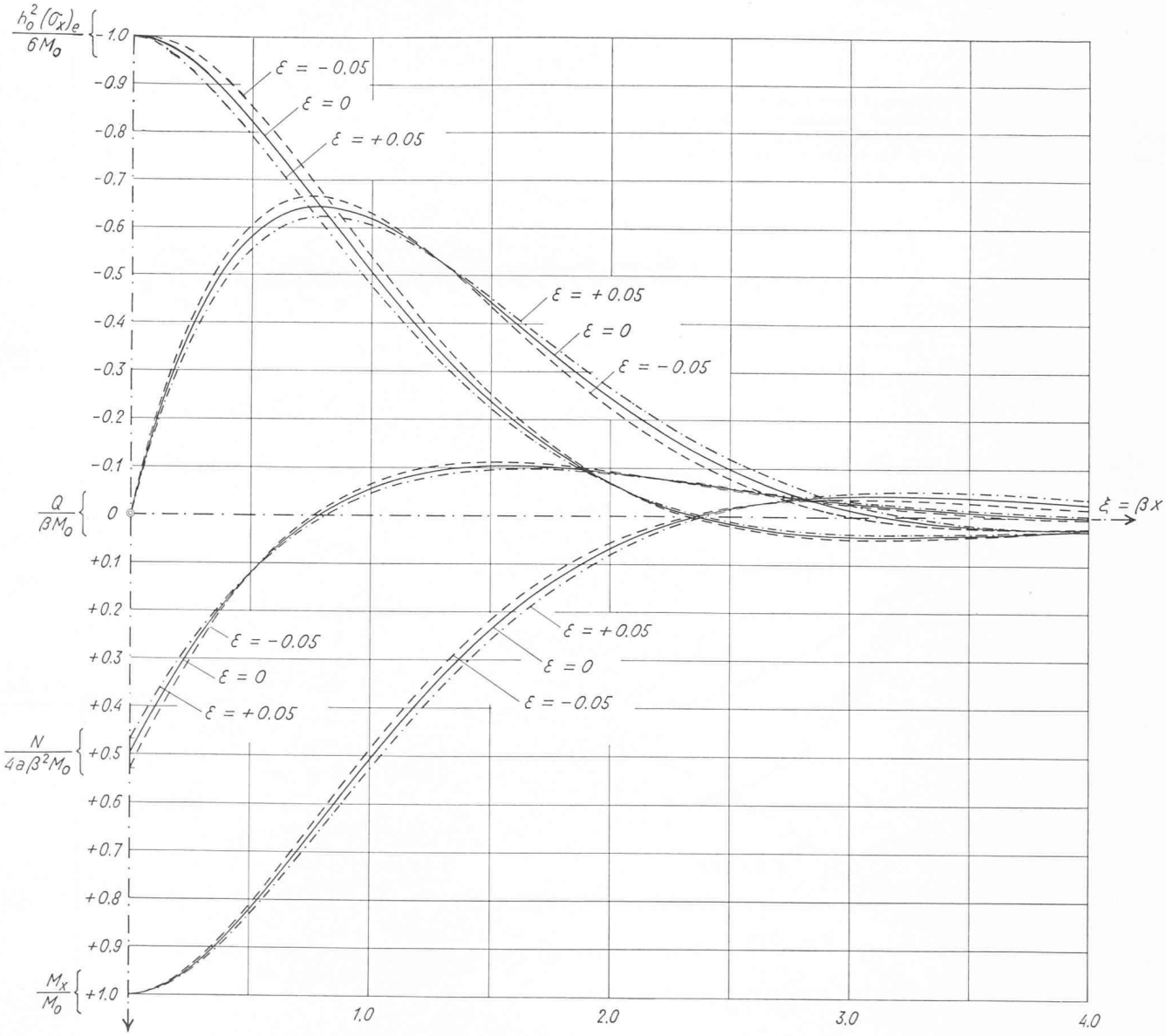


Fig. 4. — *Cas où* $M_0 \neq 0$, $Q_0 = 0$. Représentation graphique de $\frac{M_x}{M_0}$, $\frac{N}{4a\beta^2 M_0}$, $\frac{Q}{\beta M_0}$ et $\frac{h_0^2(\sigma_x)_e}{6M_0}$ en fonction de $\xi = \beta x$, pour $\varepsilon = \frac{\lambda}{a\beta} = +0{,}05$, $\pm 0{,}00$ et $-0{,}05$.

quantités $\frac{M_x}{M_0}$, $\frac{N}{4a\,\beta^2\,M_0}$, $\frac{Q}{\beta\,M_0}$, en fonction de $\xi$, pour $\varepsilon = +\,0{,}05$, $\pm\,0{,}00$ et $-\,0{,}05$. Dans cette figure, on a également représenté par des courbes les quantités $\frac{h_0^2\,(\sigma_x)_e}{6\,M_0}$, où $(\sigma_x)_e = -\frac{6\,M_x}{h^2}$ désigne la tension normale parallèle à l'axe $x$, en un point situé au voisinage de la *surface extérieure* de la coque, c'est-à-dire à la distance $a + \frac{h}{2}$ de l'axe. Toutes ces courbes montrent l'influence de la variation de l'épaisseur sur les valeurs de $M_x$, $N$, $Q$ et $(\sigma_x)_e$. On remarquera que cette influence est faible. Ces diagrammes permettront de déterminer commodément $M_x$, $M_\varphi = \nu M_x$, $N$, $Q$ et $(\sigma_x)_e$ pour n'importe quelle coque répondant aux conditions indiquées. On en déduira sans difficulté les tensions normales $\sigma_\varphi$ engendrées par $M_\varphi$ et $N$, ainsi que les tensions tangentielles $\tau$ provenant de l'effort tranchant $Q$ [9].

2°) *Cas où* $M_0 = 0$, $Q_0 \neq 0$.

On déduit, dans ce cas, de la formule (27) :

$$\left.\begin{aligned} w = w_0 + w_1\,\varepsilon = \frac{Q_0}{\beta^3 D_0}\Big\{ & -\frac{1}{2}\,\theta(\xi) + \\ & + \frac{1}{8}\Big[(-\xi^2 + 3\,\xi + 4)\,\theta(\xi) - (\xi^2 + 4)\,\zeta(\xi)\Big]\varepsilon\Big\}, \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw}{dx} = \frac{dw_0}{dx} + \frac{dw_1}{dx}\,\varepsilon = \frac{Q_0}{\beta^2 D_0}\Big\{ & \frac{1}{2}\,\Phi(\xi) + \\ & + \frac{1}{8}\Big[-5(\xi+1)\,\theta(\xi) + (2\xi^2 - 5\xi)\,\zeta(\xi)\Big]\varepsilon\Big\}, \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d^2w_0}{dx^2} + \frac{d^2w_1}{dx^2}\,\varepsilon = \frac{Q_0}{\beta\,D_0}\Big\{ & -\zeta(\xi) + \\ & + \frac{1}{4}\Big[\xi^2\,\theta(\xi) + (-\xi^2 + 7\,\xi)\,\zeta(\xi)\Big]\varepsilon\Big\}, \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^3w}{dx^3} = \frac{d^3w_0}{dx^3} + \frac{d^3w_1}{dx^3}\,\varepsilon = \frac{Q_0}{D_0}\Big\{ & -\Psi(\xi) + \\ & + \frac{1}{4}\Big[(-2\,\xi^2 + 9\,\xi)\,\theta(\xi) + (-9\,\xi + 7)\,\zeta(\xi)\Big]\varepsilon\Big\}. \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

[9] Comme on le verrait facilement, il est possible de donner pour $(\tau)_{max}$ une représentation graphique, analogue à celle de $(\sigma_x)_e$ dans la figure 4. Par contre, une représentation graphique de $(\sigma_\varphi)_e$ ne serait plus aussi simple, les courbes dépendant alors du nombre de Poisson $\nu$.

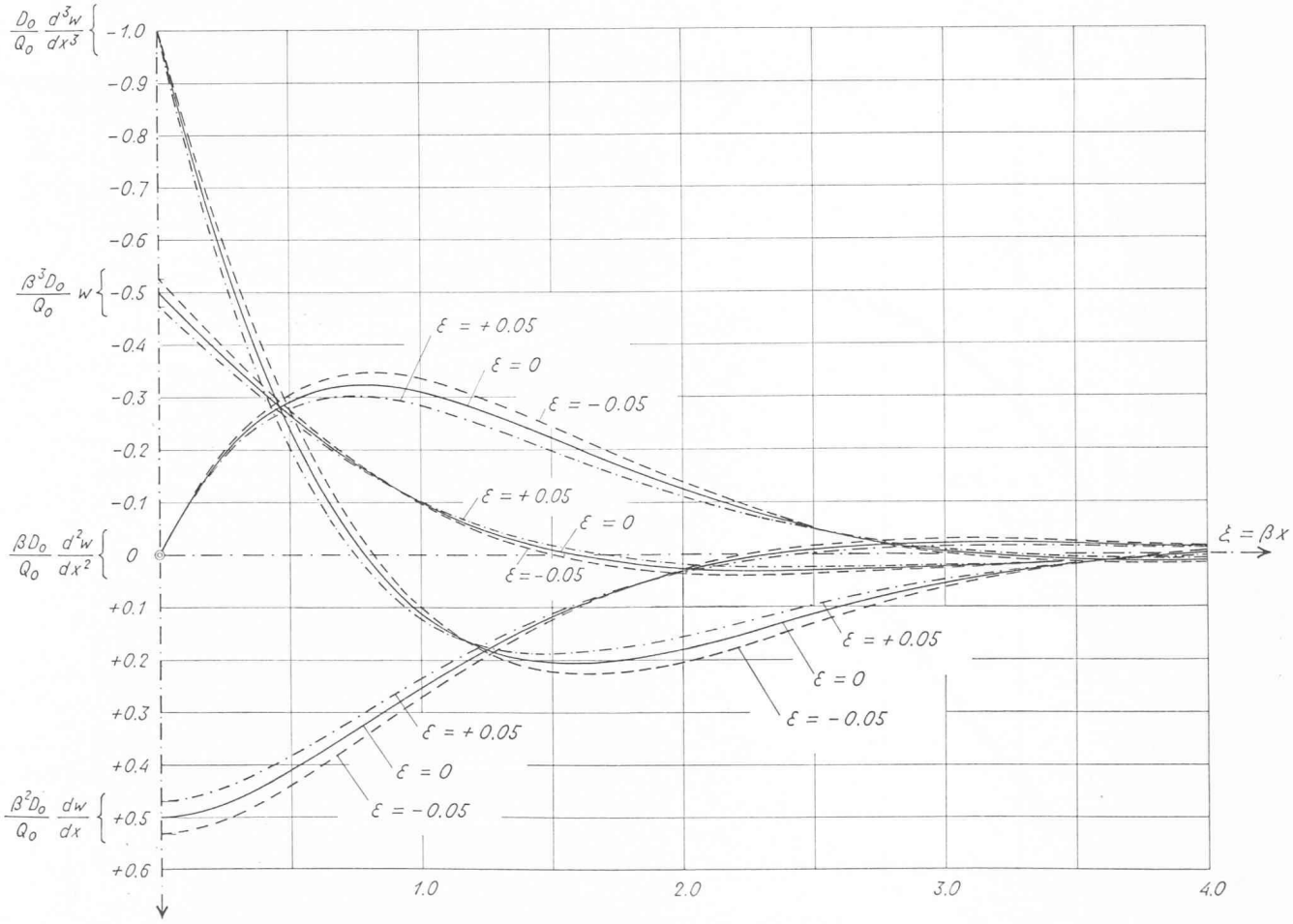


Fig. 5. — *Cas où* $M_0 = 0$, $Q_0 \neq 0$. Représentation graphique de $\frac{\beta^3 D_0}{Q_0}w$, $\frac{\beta^2 D_0}{Q_0}\frac{dw}{dx}$, $\frac{\beta D_0}{Q_0}\frac{d^2w}{dx^2}$ et $\frac{D_0}{Q_0}\frac{d^3w}{dx^3}$ en fonction de $\xi = \beta x$, pour $\epsilon = \frac{\lambda}{a\beta} = +\,0{,}05$, $\pm\,0{,}00$ et $-\,0{,}05$.

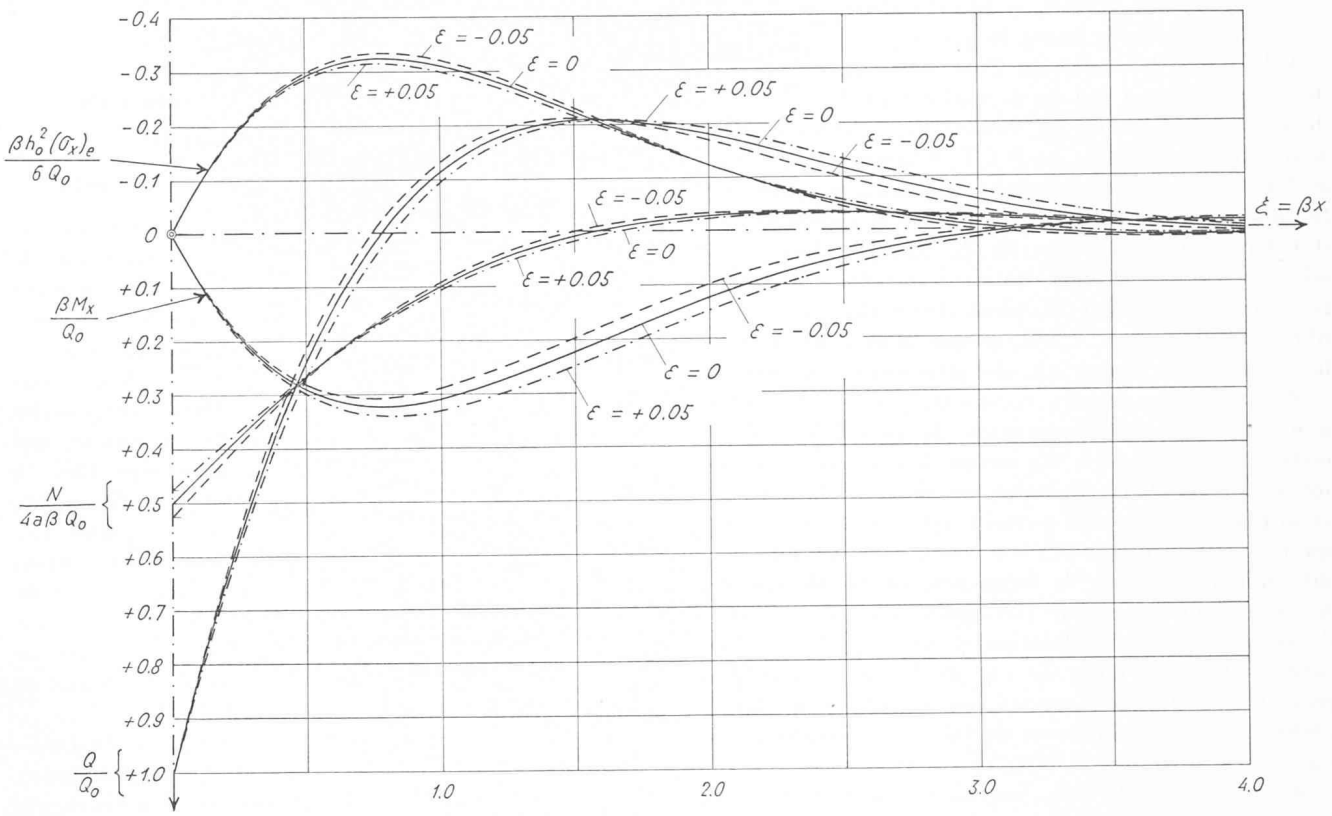


Fig. 6. — *Cas où $M_0 = 0$, $Q_0 \neq 0$.* Représentation graphique de $\frac{\beta M_x}{Q_0}$, $\frac{N}{4\,a\beta\,Q_0}$, $\frac{Q}{Q_0}$ et $\frac{\beta h_0^2\,(\sigma_x)_e}{6\,Q_0}$ en fonction de $\xi = \beta x$, pour $\epsilon = \frac{\lambda}{a\beta} = +\,0{,}05,\ \pm\,0{,}00$ et $-\,0{,}05$.

En introduisant dans les formules (38) à (41) les valeurs de $w_0$, $w_1$, $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$, ... déduites des relations (42), (44) et (45), on obtiendra les moments $M_x$, $M_\varphi$ et les efforts $N$, $Q$. La figure 5 est une représentation graphique de $\frac{\beta^3 D_0}{Q_0} w$, $\frac{\beta^2 D_0}{Q_0}\frac{dw}{dx}$, $\frac{\beta D_0}{Q_0}\frac{d^2 w}{dx^2}$ et $\frac{D_0}{Q_0}\frac{d^3 w}{dx^3}$ en fonction de $\xi$, la figure 6, une représentation graphique de $\frac{\beta\,M_x}{Q_0}$, $\frac{N}{4a\,\beta\,Q_0}$, $\frac{Q}{Q_0}$ et $\frac{\beta\,h_0^2\,(\sigma_x)_e}{6\,Q_0}$, en fonction de la même variable, pour les valeurs $+\,0{,}05$, $\pm\,0{,}00$ et $-\,0{,}05$ du paramètre $\varepsilon$. Ces deux figures donnent lieu à des remarques analogues à celles que nous avons faites à propos des figures 3 et 4.

*(A suivre.)*

## SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES

### Groupe des ingénieurs de l'industrie

*Communiqué*

Le Groupe des ingénieurs de l'industrie de la Société suisse des ingénieurs et des architectes (S.I.A.) a tenu son assemblée générale annuelle le 27 octobre 1956, à Aarau. Il a élu son nouveau comité, à la tête duquel il a appelé M. *J. Bächtold*, ingénieur à Berne, en remplacement de M. *Paul Huguenin*, du Locle, qui a été l'un des initiateurs de ce groupe et l'a dirigé dès ses débuts. Il a ensuite chargé le comité et les groupes de sections de poursuivre ou d'entreprendre l'étude des problèmes importants qui préoccupent tous les ingénieurs de l'industrie et parmi lesquels on peut mentionner les suivants : la formation des ingénieurs après les études, l'introduction et l'intégration des jeunes ingénieurs dans les entreprises, les relations entre l'ingénieur, ses chefs et ses subordonnés, la relève des ingénieurs. Puis il décida l'envoi d'une adresse de sympathie aux ingénieurs de Pologne et de Hongrie, durement éprouvés dans la lutte qu'ils mènent actuellement pour leur indépendance et leur liberté. L'assemblée se clôtura par une conférence de M. *Ch. Gasser*, professeur et directeur de la Société Georges Fischer, à Schaffhouse, sur : « Le recrutement de la main-d'œuvre qualifiée, à la lumière de l'évolution démographique et économique à long terme ». Ce travail a vivement impressionné l'auditoire, en montrant combien il est nécessaire de remédier au manque de main-d'œuvre qualifiée, en particulier dans le domaine de la technique, dont souffre déjà notre pays et qui ne fera que s'aggraver au cours des prochaines années.

## ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

### 20e Journée de la haute fréquence

La première Journée de la haute fréquence, en 1935, avait eu lieu à Berne, ainsi que la dixième, en 1946. Il était donc tout à fait naturel que l'A.S.E. choisisse