Application du calcul à l'aide de suites à l'étude de phénomènes de propagation

Autor(en): **Cuénod, Michel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **82 (1956)**

Heft 2

PDF erstellt am: **16.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-62050

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

l'industrie, les appareils sont particulièrement exposés à se ternir et à s'encrasser. Il faut des nettoyages fréquents, et l'on a intérêt à choisir des appareils de forme simple dont les parties à nettoyer soient bien accessibles et ne risquent pas d'être rayées ou altérées par le nettoyage. Il faut également que l'on puisse remplacer aisément la lampe.

On est parfois obligé d'utiliser des appareils hermétiquement clos, soit pour les protéger contre la poussière ou la corrosion, soit pour éviter des incendies ou des explosions dans les locaux où ces risques existent.

L'installation d'éclairage

Nous rappellerons très succinctement comment on établit un projet d'éclairage. On choisit tout d'abord la *hauteur des lampes*. L'éclairage général est bien réparti si les lampes sont placées très haut ; les murs sont convenablement éclairés mais, en revanche, ils absorbent une fraction du flux total. Cette fraction est d'autant plus grande que le local est plus étroit et que les murs sont plus foncés.

On choisit aussi le *niveau d'éclairement*. Le *flux utile* est le produit de l'éclairement par la surface à éclairer. Pour un éclairage général, la surface est celle du local. La valeur du flux utile doit être multipliée par un facteur allant de 2 à 4 pour tenir compte de la lumière absorbée en dehors du plan utile (dans les appareils, sur le plafond et les murs) et pour tenir compte aussi de la dépréciation des appareils et des lampes à l'usage. La valeur trouvée est celle du flux que doit émettre l'ensemble des lampes.

Le *flux total* calculé doit être réparti en un certain nombre de lampes. On peut être tenté de n'utiliser qu'un petit nombre de foyers puissants ; ce serait plus économique mais l'éclairement serait inégalement réparti sur le plan utile. Il y a une valeur à ne pas dépasser dans l'*écartement des foyers*, valeur proportionnelle à la hauteur des lampes. Pour les réflecteurs plats, on conseille de limiter l'écartement à 1,5 fois la hauteur des lampes. La règle de l'écartement maximum détermine à peu près le *nombre total d'appareils*. Reste à choisir leur implantation et, si les appareils sont à lampes fluorescentes, leur orientation. On ne devrait pas le faire sans connaître l'emplacement exact des machines et des postes de travail ; suivant sa position par rapport à celle d'un ouvrier ou à celle d'une machine, une lampe produit ou non des ombres ou des reflets gênants.

Mais l'installateur n'a pas toujours le choix de l'emplacement. Celui-ci peut être imposé par l'architecture du local ou par la présence de passerelles ou de ponts roulants. Les meilleures installations d'éclairage sont celles qui ont été étudiées avant la construction du bâtiment. Ce devrait être la règle ; mais nous en sommes encore loin. L'architecte considère, trop souvent, l'éclairage comme un simple élément du prix de revient, que l'installateur électricien doit insérer dans son devis au même titre que les canalisations électriques. Le problème technique de l'éclairage serait souvent mieux et plus facilement résolu s'il était examiné plus tôt, à un moment où il serait encore possible de modifier le projet d'architecture.

APPLICATION DU CALCUL A L'AIDE DE SUITES A L'ÉTUDE DE PHÉNOMÈNES DE PROPAGATION

par MICHEL CUÉNOD,
Dr es sc. techn.
ingénieur à la Société Générale pour l'Industrie, Genève

Nous avons vu qu'un des principaux domaines d'application du calcul à l'aide de suites (1) * était l'étude de réglages automatiques (2). Cette méthode de calcul peut également être utilisée avec profit pour l'étude des phénomènes de propagation ; nous considérons tout d'abord le cas des propagations sans pertes. Il est connu qu'elles obéissent au système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial H}{\partial x} = m \dfrac{\partial V}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{1}{m\omega^2} \dfrac{\partial H}{\partial t}. \end{cases}$$

La signification des symboles de ce système d'équations est donnée par le tableau I (3).

* Les chiffres entre parenthèses se réfèrent à la bibliographie donnée en fin d'article.

Nous admettons de faibles variations par rapport à un état initial et posons :

$$\begin{cases} H = H_0 + \Delta H \\ V = V_0 + \Delta V. \end{cases}$$

Nous introduisons les grandeurs de référence H_r et V_r et définissons les variations relatives suivantes :

$$h = \frac{\Delta H}{H_r} \quad \text{et} \quad v = \frac{\Delta V}{V_r}.$$

Notre système d'équations prend la forme suivante :

$$-\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\omega}{z} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\omega z} \frac{\partial h}{\partial t}$$

avec $z = \frac{\varpi m H_r}{V_r}$ = chiffre caractéristique de la transmission.

La solution générale de ce système d'équations est bien connue ; nous obtenons, en admettant que l'on puisse négliger la vitesse d'écoulement V par rapport à la vitesse de translation ϖ des ondes :

$$h(x,t) = A\left(t - \frac{x}{\varpi}\right) + B\left(t + \frac{x}{\varpi}\right)$$

$$v(x,t) = \frac{A\left(t - \frac{x}{\varpi}\right)}{z} - \frac{B\left(t + \frac{x}{\varpi}\right)}{z}.$$

Ce système d'équations représente deux systèmes d'ondes qui se déplacent dans les deux sens de la propagation. Les fonctions $A(t,x)$ et $B(t,x)$ sont des fonctions à déterminer d'après les conditions aux limites. Nous considérons les conditions suivantes :

au début de la transmission $h_1(t) = f(t) - z_1 v_1(t)$
à la fin de la transmission $h_2(t) = z_2 v_2(t)$.

Nous préciserons par la suite la signification de ces grandeurs. Nous considérons une transmission de longueur l_c et obtenons ainsi à la fin de la transmission pour $x = l_c$

$$h_2(t) = A(t - T) + B(t + T)$$

$$v_2(t) = \frac{A(t - T)}{z} - \frac{B(t + T)}{z}$$

avec $T = \frac{l_c}{\varpi}$ = temps que met l'onde à parcourir toute la transmission. Pour déterminer les fonctions A et B nous faisons usage du calcul à l'aide de suites et obtenons :

$$S(h_2) = S(A) * D(+T) + S(B) * D(-T)$$

$$S(v_2) = \frac{S(A)}{z} * D(+T) - \frac{S(B)}{z} * D(-T).$$

Les suites $D(-T)$ et $D(+T)$ signifient que les suites $S(A)$ et $S(B)$ doivent être décalées respectivement du laps de temps $-T$, $+T$.

Les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} S(h_1) = S(f) - z_1 S(v_1) \\ S(h_2) = z_2 S(v_2). \end{cases}$$

Nous considérons les suites qui caractérisent les fonctions A et B en fonction des conditions aux limites. Nous obtenons :

$$\begin{cases} S(A) = \frac{S(h_2) + zS(v_2)}{2} * D(-T) = S(v_2)\frac{z_2 + z}{2} * D(-T) \\ S(B) = \frac{S(h_2) - zS(v_2)}{2} * D(+T) = S(v_2)\frac{z_2 - z}{2} * D(+T). \end{cases}$$

Nous introduisons ces valeurs dans les expressions qui caractérisent $h(x)$ et $v(x)$ en un point quelconque x de la transmission et obtenons :

$$S(h(x)) =$$

$$= S(v_2) * \left[\frac{z_2 + z}{2} D(T_x - T) + \frac{z_2 - z}{2} D(T - T_x)\right]$$

$$S(v(x)) =$$

$$= S(v_2) * \left[\frac{z_2 + z}{2z} D(T_x - T) + \frac{z_2 - z}{2z} D(T - T_x)\right]$$

avec $T_x = \frac{x}{\varpi}$ = temps que met l'onde de translation à parvenir à la distance x, exprimé au moyen de l'unité de temps choisie.

En particulier au début de la transmission, nous avons $T_x = 0$. Il en résulte :

$$S(h_1) = S(v_2) * \frac{z_2 + z}{2} D(-T) + \frac{z_2 - z}{2} D(+T) =$$

$$= S(f) - z_1 S(v_2) * \frac{z_2 + z}{2} D(-T) - \frac{z_2 - z}{2z} D(+T).$$

Nous tirons de cette équation la suite $S(v_2)$:

$$S(v_2) =$$

$$= \frac{S(f)}{D(-T)\frac{z_2 + z}{2}\left(1 + \frac{z_1}{z}\right) + D(+T)\frac{z_2 - z}{2}\left(1 - \frac{z_1}{z}\right)}.$$

Nous introduisons cette expression dans celle de $S(h(x))$ et obtenons, après quelques calculs :

$$S(h(x)) = S(f)\frac{1 - r_1}{2} * \frac{D(T_x - T) + r_2 D(T - T_x)}{D(-T) - r_1 r_2 D(+T)} =$$

$$= S(f)\frac{1 - r_1}{2} * \frac{D(T_x) + r_2 D(2T - T_x)}{1 - r_1 r_2 D(2T)}$$

avec $r_1 = \frac{z_1 - z}{z_1 + z}$ = facteur de réflexion au début de la transmission,

$r_2 = \frac{z_2 - z}{z_2 + z}$ = facteur de réflexion à la fin de la transmission.

Considérons, par exemple, un cas particulier avec :

$$T_x = 2 \qquad T = 5.$$

Nous obtenons :

$$S(h(x)) = S(f)\frac{1 - r_1}{2} * \frac{0\,;0\,;1\,;0\,;0\,;0\,;0\,;r_2}{1\,;0\,;0\,;0\,;0\,;0\,;0\,;0\,;0\,;0\,;-r_1 r_2}.$$

Si nous effectuons cette division, nous obtenons :

$$S(h(x)) = S(f)\frac{1 - r_1}{2}[0\,;0\,;1\,;0\,;0\,;0\,;0\,;0\,;0\,;r_2\,;$$
$$0\,;0\,;0\,;0\,;r_1 r_2\,;0\,;0\,;\ldots].$$

De façon générale, nous obtenons :

$$S(h(x)) = S(f)\frac{1 - r_1}{2}[T_x \times 0\,;1\,;2\,(T - T_x) \times 0\,;$$

$$r_2, 2T_x \times 0\,; r_1 r_2\,; 2(T - T_x) \times 0\,; r_1 r_2^2\,; 2T_x \times 0\,;$$

$(r_1 r_2)^2 ; 2\,(T - T_x) \times 0 ; r_1^2 r_2^3 ; 2T_x \times 0 ; (r_1 r_2)^3 ; \ldots]$.

$T_x \times 0$ signifie un nombre de termes nuls égal à T_x.

La signification physique de cette suite est évidente :

Considérons la transmission représentée par la figure 1 et caractérisée par une longueur l_c et par les facteurs de réflexion r_1 et r_2 à ses deux extrémités.

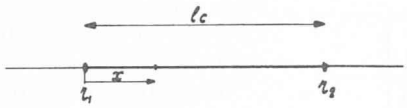

Fig. 1. — Représentation d'une transmission sans perte.

Nous supposons qu'un signal ayant la forme d'une impulsion unitaire soit émis au début de cette transmission. Ce signal va voyager le long de cette transmission et arriver au temps T_x à la distance x puis atteindra au temps T l'extrémité de la transmission où il sera réfléchi en étant multiplié par le facteur de réflexion r_2. Il parcourt la transmission en sens inverse, il atteint l'abscisse x au temps $2T - T_x$, puis au temps $2T$ le début de la transmission où il est à nouveau réfléchi en étant multiplié par le facteur de réflexion r_1 et ainsi de suite.

Si nous dessinons en fonction du temps la variation du signal à la distance x nous obtenons le diagramme représenté par la figure 2.

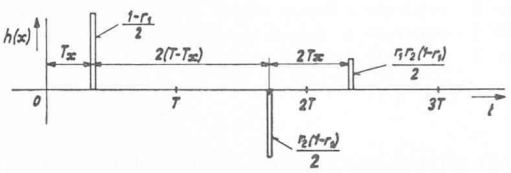

Fig. 2. — Variation du signal à la distance x du début d'une transmission.

Au temps T_x arrive la première impulsion. Après le laps de temps $2(T - T_x)$ cette impulsion arrive en retour, multipliée par le facteur de réflexion r_2. Après le laps de temps $2T_x$, cette impulsion arrive à nouveau multipliée par $r_1 r_2$ et ainsi de suite.

Si la fonction $f(t)$ a une allure quelconque, il suffit de faire le produit composé de la suite $S(t)$ par la suite caractérisant la variation à la suite d'une impulsion unitaire. Considérons, par exemple, le cas où $f(t)$ a la forme d'un échelon rectangulaire unitaire ; nous obtenons :

$$S(h(x_1)) = \frac{1 - r_1}{2}\,[T_x \times 0 ; 2(T - T_x) \times 1 ;$$

$$2T_x \times (1 + r_2) ; 2(T - T_x) \times (1 + r_1 + r_2) ; \ldots].$$

Exemples

A. *Coup de bélier dans une conduite forcée*

Nous considérons le cas d'une conduite forcée alimentant une centrale hydro-électrique. Nous admettons que les turbines sont du type Pelton et que le jet est libre. Nous choisissons, comme grandeur de référence, la hauteur statique H_0 et la vitesse maximum V_m obtenue à pleine ouverture de l'obturateur. Soit L la course du vannage et L_m la course correspondant à la pleine ouverture de l'obturateur. Nous obtenons :

$$-\frac{V_1}{V_m} = \sqrt{\frac{H_1}{H_0}}\,\frac{L}{L_m}\,.$$

Le signe négatif du terme de gauche provient du fait que les x sont mesurés à partir de l'extrémité aval de la conduite.

Nous considérons à nouveau de faibles variations par rapport à l'état initial et obtenons :

$$-v_1 = l_0\,\frac{h_1}{2} + l$$

avec : $l_0 = \dfrac{L_0}{L_m}$ = ouverture relative de l'obturateur à l'instant initial,

$l = \dfrac{\Delta L}{L_m}$ = variation relative de l'obturateur.

Il en résulte :

$$h_1 = f - z_1 v_1 = -2\,\frac{l}{l_0} - v_2\,\frac{2}{l_0}\,.$$

Par identification nous obtenons :

$$f = -2\,\frac{l}{l_0} \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{2}{l_0}\,.$$

D'autre part :

$$z = \frac{m w V_r}{H_r} = \frac{w V_m}{g H_0}$$

avec $g = \dfrac{l}{m}$ = constante d'accélération = 9,81 m/sec²

w = vitesse de propagation des ondes de pression

$$w = \sqrt{\frac{\frac{g}{\gamma_w}}{\frac{1}{\epsilon} + \frac{D}{Ee}}}$$

γ_w = poids spécifique de l'eau
ϵ = coefficient de compressibilité de l'eau
D = diamètre de la conduite
E = module d'élasticité des parois
e = épaisseur des parois.

Nous supposons que la conduite est à caractéristique unique, nous admettons comme état de régime initial une marche à pleine ouverture et considérons les 2 cas particuliers suivants :

	Centrale à haute chute	Centrale à moyenne chute
Hauteur de chute H_0	1000 m	100 m
Vitesse de l'eau dans la conduite à pleine ouverture de l'obturateur V_m	5 m/sec	5 m/sec
Vitesse de propagation des ondes de pression	1000 m/sec	1000 m/sec
Chiffre caractéristique :		
$z = \frac{w}{g} \frac{V_m}{H_0}$	0,5	5
$r_1 = \frac{z_1 - z}{z_1 + z}$	$\frac{2 - 0,5}{2 + 0,5} = 0,60$	$\frac{2 - 5}{2 + 5} = -0,43.$

Nous supposons que la conduite forcée est alimentée par une chambre d'équilibre et que le niveau du plan d'eau dans cette chambre d'équilibre peut être considéré comme constant pour la durée des phénomènes que nous considérons.

Il en résulte :

$$h_2 = 0$$

$$z_2 = \frac{h_2}{v_2} = 0$$

$$r_2 = \frac{z_2 - z}{z_2 + z} = -1.$$

Nous nous proposons de déterminer la variation de pression en aval de la conduite résultant d'une manœuvre donnée de l'obturateur et considérons tout d'abord une faible variation selon un échelon rectangulaire. Nous choisissons l'unité égale à la durée T de la propagation des ondes de pression le long de la conduite forcée et obtenons :

$$-\frac{S(h_1)}{l} = -(1 - 0,60)\,[1 ; 1 ; -0,6 - 0,6 ; 0,36 ; 0,36 ; -0,216 ; -0,216 ; 0,1296 ; 0,1296 ; -0,0776 ; -0,0776 ; 0,0466 ; 0,0466 ; -0,0279 ; -0,0279 ; 0,01679 ; 0,01679 ; -0,01008 ; -0,01008 ; 0,0060 ; 0,0060 ; \ldots]$$
$$= -[0,4 ; 0,4 ; -0,24 ; -0,24 ; 0,144 ; 0,144 ; -0,0863 -0,0863 ; 0,0517 ; 0,0517 ; -0,031 ; -0,031 ; 0,01865 ; 0,01865 ; -0,0112 ; -0,0112 ; 0,0066 ; 0,0066 ; \ldots].$$

Cette variation est représentée par la courbe 1 de la figure 3. Nous voyons que la surpression s'annule en oscillant autour de sa valeur initiale. En cas de fermeture de l'obturateur ($l < 0$) la surpression est positive ($h_1 > 0$) ce qui explique le signe négatif du terme de droite.

A titre de simplification, cette variation est représentée sous sa forme positive sur la figure 3 et les figures suivantes qui indiquent donc les surpressions résultant d'une fermeture de l'obturateur.

Pour la conduite à moyenne chute, nous obtenons :

$$-S\left(\frac{h_1}{l}\right) = -(1 + 0,43)\,[1 ; 1 ; 0,428 ; 0,428 ; 0,184 ; 0,184 ; 0,0787 ; 0,0787 ; 0,0317 ; 0,0317 ; 0,0136 ; 0,0136 ; 0,00582 ; 0,00582 ; 0,0025 ; 0,0025 ; \ldots]$$
$$= -[1,43 ; 1,43 ; 0,612 ; 0,612 ; 0,262 ; 0,262 ; 0,112 ; 0,112 ; 0,0427 ; 0,0427 ; 0,0194 ; 0,0194 ; 0,00825 ; 0,00825 ; \ldots].$$

Cette variation est représentée par les courbes 2 de la figure 3. Nous voyons que la surpression s'annule en gardant toujours le même signe.

Nous retrouvons le résultat déjà connu pour le cas de la variation de l'obturateur de la turbine selon un échelon rectangulaire (4). Le calcul à l'aide de suites est particulièrement avantageux lorsque l'on se propose de calculer les variations de pression résultant d'une variation quelconque de l'ouverture, telle

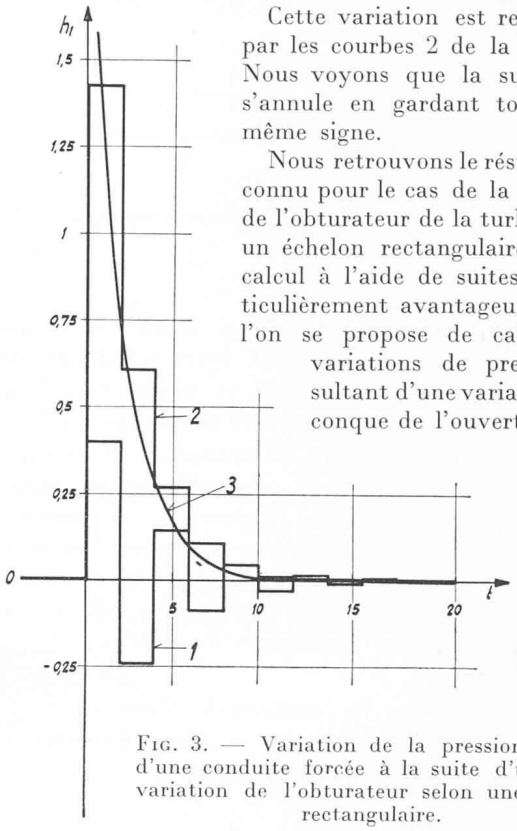

Fig. 3. — Variation de la pression en aval d'une conduite forcée à la suite d'une faible variation de l'obturateur selon une fonction rectangulaire.

Courbe 1 : centrale à haute chute ($z = 0,5$; $r_1 = 0,6$).
Courbe 2 : centrale à moyenne chute ($z = 5$; $r_1 = -0,43$).
Courbe 3 : centrale à basse chute (coup de bélier en masse $T_c = 2$ sec.).

que celle qui est, par exemple, représentée par la courbe 1 de la figure 4 et qui est caractérisée par la suite $S\left(\frac{l}{l_m}\right)$:

$$S\left(\frac{l}{l_m}\right) = [0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1 ; 0,8 ; 0,6 ; 0,4 ; 0,2],$$

d'autre part :

$$\frac{S(h_1)}{l_m} = -\frac{1 - r_1}{2}\,[1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; -r_1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; r_1^2 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; -r_1^3 ; \ldots].$$

Nous obtenons ainsi pour une conduite à haute chute : ($r_1 = 0,6$)

$$\frac{S(h_1)}{l_m} = -0,2\,[1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; -0,6 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,36 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; -0,216 ; 0 ; \ldots]$$
$$* [0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1 ; 0,8 ; 0,6 ; 0,4 ; 0,2 ;].$$

Le résultat de ce produit est représenté par la courbe 2 de la figure 4.

Pour une conduite à moyenne chute, nous obtenons : ($r_1 = -0{,}43$)

$$\frac{S(h_1)}{l_m} = -0{,}715\,[1\,;\,0\,;\,0\,;\,0\,;\,0\,;\,0{,}43\,;\,0\,;\,0\,;\,0\,;\,0\,;\,0{,}184\,;\,0\,;\,0\,;\,0\,;\,0\,;\,0{,}079\,;\,0\,;\,\ldots] * [0{,}2\,;\,0{,}4\,;\,0{,}6\,;\,0{,}8\,;\,1\,;\,0{,}8\,;\,0{,}6\,;\,0{,}4\,;\,0{,}2].$$

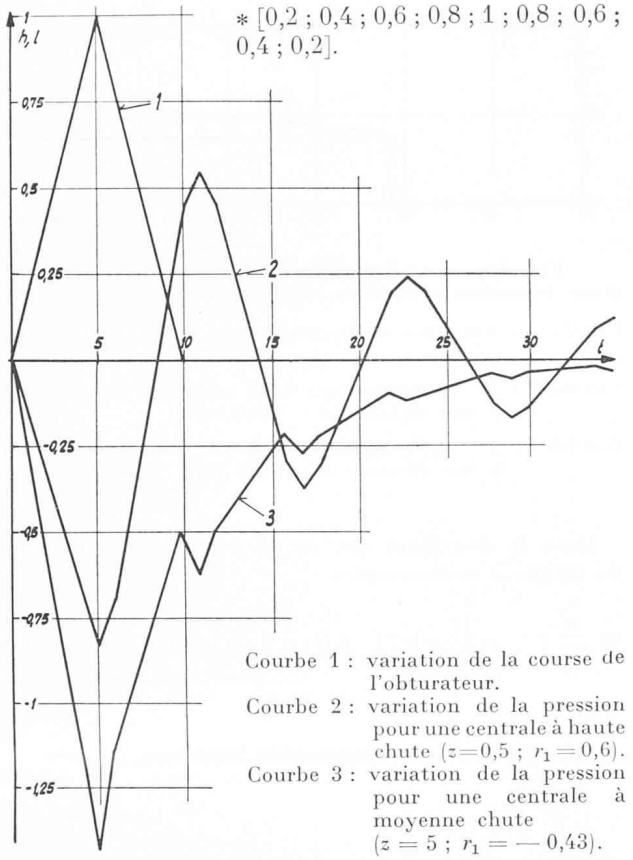

FIG. 4. — Variation de la pression en aval d'une conduite forcée à la suite d'une manœuvre de l'obturateur selon une allure quelconque.

Le résultat de ce produit est représenté par la courbe 3 de la figure 4.

Nous retrouvons le caractère périodique des variations de pression d'une conduite à haute chute, et le caractère apériodique des variations de pression d'une conduite à basse chute.

L'exactitude de ce calcul peut être améliorée en réduisant l'unité de temps choisie. Cette méthode permet d'étudier avec élégance les phénomènes de résonance de conduite forcée, phénomènes qui interviennent pour une variation périodique de l'ouverture, en résonance avec la péroide propre de la conduite.

Si le jet en aval de la conduite n'est pas libre mais si la conduite alimente une turbine à réaction, le facteur z_1 et partant, le facteur de réflexion r_1 n'est pas constant, mais dépend du débit, c'est-à-dire de la vitesse et de l'ouverture de l'obturateur. A chaque réflexion, il est possible de déterminer la valeur de l'ouverture correspondante et de calculer le facteur de réflexion qui s'y rapporte. D'autre part, si la conduite est à caractéristique variable, il intervient des réflexions successives. Il est, sans autre, possible de généraliser le calcul à l'aide de suites de ces phénomènes, en tenant compte de ces facteurs. Cependant, cette généralisation sortirait du cadre de notre exposé. On reconnaît sans peine que la méthode de calcul à l'aide de suites appliquée à ce cas particulier rejoint la méthode semi-graphique de Schnyder-Bergeron. (5, 6).

B. *Etude de la propagation d'une onde électro-magnétique*

Nous avons considéré dans l'exemple précédent le cas d'une propagation sans perte. Nous nous proposons maintenant d'étudier le cas d'une propagation avec perte.

A titre d'illustration, nous considérons l'exemple de la propagation d'une onde électro-magnétique le long d'une transmission électrique homogène.

Le système d'équations qui caractérise cette propagation est bien connu :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial U}{\partial x} = RI + L\dfrac{\partial I}{\partial t} \\[2ex] -\dfrac{\partial I}{\partial x} = GU + C\dfrac{\partial U}{\partial t} \end{cases}$$

avec
R = résistance spécifique
L = inductivité spécifique
G = admittance spécifique
C = capacité spécifique.

Nous considérons qu'à l'instant initial, la ligne n'était pas sous tension et admettons que la tension $E(t)$ lui est appliquée à son début. Nous nous proposons de déterminer la tension qui en résulte en un point quelconque de la ligne, en négligeant les phénomènes de réflexion.

En faisant usage du calcul opérationnel, nous obtenons :

$$-\frac{du}{dx} = (R + pL)\,i$$

$$-\frac{di}{dx} = (G + pC)\,u.$$

u et i sont les expressions de U et I sous forme opérationnelle.

En éliminant le courant i de ce système d'équations, nous obtenons :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \gamma^2 u \quad \text{avec} \quad \gamma = \sqrt{(R + pL)\,(G + pC)}.$$

Nous résolvons cette équation différentielle par rapport à x et obtenons :

$$u = E(p)\,e^{-\gamma x}.$$

$E(p)$ est l'expression sous forme opérationnelle de la tension $E(t)$ appliquée au début de la transmission.

Nous considérons successivement les approximations suivantes :

a) *Première approximation*

Lorsque les pertes sont relativement faibles, il est légitime de développer l'expression qui se trouve sous le radical.

Nous obtenons ainsi

$$\Upsilon = \sqrt{p^2LC + p\,(LC + CR) + GR} \simeq$$

$$\simeq p\sqrt{LC}\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{p}} \simeq \frac{p + \alpha}{w}$$

avec $\alpha = \frac{1}{2}\frac{LG + CR}{LC}$ = facteur d'amortissement

$w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ = vitesse de translation des ondes électro-magnétiques.

Il en résulte :

$$u_x = fe^{-\frac{x}{w}(p+\alpha)} = fe^{-pT_x}e^{-\beta_x}$$

avec $\beta_x = \frac{\alpha x}{w}$ = facteur d'amortissement

$T_x = \frac{x}{w}$ = temps que met l'onde à arriver à l'abscisse x.

A l'aide des suites, nous obtenons :

$$S(U_x) = S(F) * D(+\,T_x)e^{-\beta_x}.$$

La variation de la tension à la distance x est égale à la variation de la tension au début de la transmission décalée du temps T_x et multipliée par $e^{-\beta_x}$.

Exemple numérique

Nous considérons le cas de la propagation d'une onde électro-magnétique sur une ligne haute tension 150 kV, caractérisée par les données suivantes :

écartement entre conducteurs 7 m,
section des conducteurs 450 mm².

Nous obtenons les grandeurs caractéristiques suivantes :

$R = 0{,}123\ \Omega/\text{km}$

$L = 1{,}32\ mH/\text{km}$

$C = 0{,}88 \cdot 10^{-2}\ \mu F/\text{km}$

$G \simeq 0$

$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{0{,}123}{2 \cdot 1.32 \cdot 10^{-3}} = 46{,}5\ 1/\text{sec}$

$w = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2{,}9 \cdot 10^5\ \text{km/sec}$

$\beta_x = \frac{\alpha x}{w} = 1{,}6 \cdot 10^{-4}\,x.$

Nous nous proposons de déterminer la variation de la tension à une distance $x = 6250$ km.

Nous obtenons :

$$e^{-\beta_x} = e^{-10^{-4}.1{,}6.6{,}25.10^3} = e^{-1} = 0{,}368$$

$$T_x = \frac{x}{w} = \frac{6{,}25 \cdot 10^3}{2{,}9 \cdot 10^5} = 21{,}6\ \text{ms}$$

$$S(U(x)) = [S(F) * D(21.6)]\ 0{,}368.$$

Nous considérons deux cas :
la tension E varie selon un échelon rectangulaire,
la tension E varie selon une onde choc.

Dans le premier cas, nous obtenons :

$$S\left(\frac{E}{E_m}\right) = [1\,;1\,;\ldots;1\,;\ldots]$$

(courbe 1 de la fig. 5*a*).

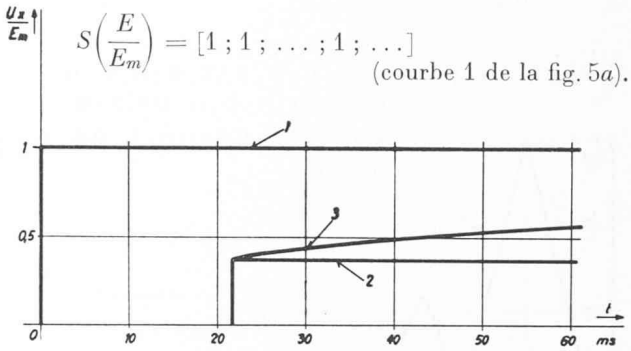

FIG. 5*a*. — Propagation d'une tension le long d'une transmission électrique en tenant compte des pertes.

Courbe 1 : Variation de la tension au début de la transmission.

Courbe 2 : 1re approximation de la variation de la tension à une distance $x = 6250$ km.

Courbe 3 : 2me approximation de la variation de la tension à une distance $x = 6250$ km.

Dans le deuxième cas, en choisissant comme unité de temps 2 millisecondes :

$$S\left(\frac{E}{E_m}\right) = [0{,}5\,;0{,}9\,;1\,;0{,}9\,;0{,}7\,;0{,}54\,;0{,}4\,;0{,}28\,;0{,}18\,;0{,}10\,;0{,}04]$$

(courbe 1 de la figure 5*b*)

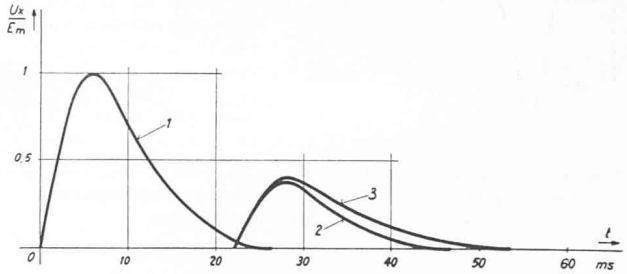

FIG. 5*b* Propagation d'une tension de choc le long d'une transmission électrique.

Courbe 1 : variation de la tension au début de la transmission.

Courbe 2 : 1re approximation de la variation de la tension à une distance $x = 6250$ km.

Courbe 3 : 2e approximation de la variation de la tension à une distance $x = 6250$ km.

Nous choisissons également comme unité de temps 2 ms et obtenons :

dans le premier cas :

$$S\left(\frac{U_x}{E_m}\right) = 0{,}368\,[11 \times 0\,;1\,;1\,;1\,;\ldots;1\,;\ldots]$$

(courbe 2 de la figure 5 *a*)

dans le deuxième cas :

$$S\left(\frac{U_x}{E_m}\right) = 0{,}368\,[11 \times 0\,;0{,}5\,;0{,}9\,;1\,;0{,}7\,;0{,}54\,;0{,}4\,;0{,}28\,;0{,}18\,;0{,}10\,;0{,}04]$$

$$= [11 \times 0\,;0{,}184\,;0{,}332\,;0{,}368\,;0{,}332\,;0{,}268\,;0{,}199\,;0{,}147\,;0{,}103\,;0{,}067\,;0{,}037\,;0{,}018]$$

(courbe 2 de la figure 5 *b*)

b) *Deuxième approximation*

Le calcul rigoureux donne, pour la variation de la tension U_x l'expression suivante, lorsque E varie selon un échelon rectangulaire (7) :

$$\frac{U_x}{E_m} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < \frac{x}{w} \\ e^{-\frac{\alpha x}{w}} - \int\limits_{\alpha \frac{x}{w}}^{\alpha t} e^{-\theta} \frac{1}{\sqrt{\theta^2 - \frac{\alpha x}{w}}} \, j \, J_1 \left\{ j \sqrt{\theta^2 - \frac{\alpha x}{w}} \right\} d\theta & \text{pour} \quad t > \frac{x}{w}. \end{cases}$$

J_1 = fonction de Bessel du premier degré (8).

Ainsi que nous l'avons défini, cette expression donne la courbe de réponse $\Phi_{EU_x}(t)$ de la tension U_x par rapport à la tension E. Sa traduction en valeur numérique est grandement facilitée si l'on effectue l'intégration qu'elle comporte à l'aide de suites, ainsi que cela ressort du tableau II.

Nous obtenons ainsi :

$$S(\Phi_{EU_x}) = [10 \times 0 ; 0{,}370 ; 0{,}387 ; 0{,}403 ; 0{,}418 ; 0{,}432 ; 0{,}445 ; 0{,}457 ; 0{,}468 ; 0{,}478 ; 0{,}487 ; 0{,}495 ; 0{,}502 ; 0{,}508 ; 0{,}514 ; 0{,}519 ; 0{,}524 ; \ldots]$$

(courbe 3 de la figure 5*a*).

Pour une variation de E selon une onde de choc, nous obtenons :

$$S\left(\frac{U_x}{E_m}\right) = S\left(\frac{E}{E_m}\right) * [1 ; -1] * S(\Phi_{EU_x})$$
$$= [0{,}5 ; 0{,}4 ; 0{,}1 ; -0{,}1 ; -0{,}2 ; -0{,}16 ; -0{,}14 ; -0{,}12 ; -0{,}10 ; -0{,}08 ; -0{,}06 ; -0{,}04] * [10 \times 0 ; 0{,}370 ; 0{,}387 ; 0{,}403 ; 0{,}418 ; 0{,}432 ; 0{,}445 ; 0{,}457 ; 0{,}468 ; 0{,}478 ; 0{,}487 ; \ldots].$$

Le résultat de ce produit composé est donné par la courbe 3 de la figure 5*b* qui met en évidence la déformation que subit le signal par suite de sa propagation le long de la ligne.

c) *Propagation compte tenu de l'inertie du champ magnétique à l'intérieur du conducteur*

Nous avons admis dans l'exemple précédent que la résistance spécifique du conducteur était constante, égale à la résistance au courant continu ; cette hypothèse est correcte pour des phénomènes relativement lents de l'ordre de la milliseconde ou supérieurs ; pour des phénomènes plus rapides, il faut tenir compte de la durée d'établissement du champ magnétique à l'intérieur du conducteur. L'inertie de ce champ amortit les oscillations d'une fréquence très élevée. Si l'on considère au début d'une transmission électrique une variation de la tension selon une impulsion ayant une durée de front très courte, il en résulte le long de la transmission un étalement progressif du front de cette onde. Ce phénomène a été étudié par H. Pleijel, étude qui a été reprise par K. W. Wagner et qui conduit au résultat suivant en première approximation en admettant une variation de la tension E au début de la transmission selon un échelon rectangulaire (7) :

$$\frac{U_x}{E} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < \frac{x}{w} \\ 1 - \Phi(z) & \text{pour} \quad t > \frac{x}{w} \end{cases}$$

avec $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-u^2} du$ = intégrale de la courbe d'erreur de Gauss (8)

$$z = \frac{4{,}89}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\frac{w_0}{c}} \frac{\sqrt{\mu\rho}}{Z_0} \frac{x}{a}$$

η = $w_0 t - x$ (km)
w_0 = vitesse de propagation de l'onde électromagnétique (km/sec)
c = vitesse de propagation de la lumière (km/sec)
μ = coefficient de perméabilité
ρ = résistance spécifique du conducteur (Ω mm² m)
Z_0 = impédance caractéristique (Ω)
a = rayon du conducteur (cm).

A titre d'exemple, nous prenons celui d'un conducteur de cuivre de 1 cm de diamètre, caractérisé par les données numériques suivantes (7) :

Z_0 = 500 ohm
c = $w_0 \sim 300\,000$ km/sec
μ = 1
$\sqrt{\rho}$ = 0,1323.

Il en résulte :

$$z = \frac{4{,}89}{\sqrt{\eta}} \cdot \frac{0{,}1323}{500} \cdot \frac{x}{0{,}5} = \frac{2{,}59 \cdot 10^{-3}\, x}{\sqrt{\eta}}.$$

Nous calculons la variation de la tension à une distance de $x = 30$ km du début de la ligne :

$$z = \frac{0{,}0777}{\sqrt{300\,000 \cdot t - 30}} \quad \text{avec} \quad t > \frac{30}{300\,000} = 100 \ \mu\text{s}.$$

Nous admettons tout d'abord une variation de la tension E au début de la ligne selon un échelon rectangulaire représenté par la courbe 1 de la figure 6 ; la variation de la tension U_x qui en résulte au point x calculée au moyen de la formule mentionnée ci-dessus est donnée par la courbe 2 de la même figure.

Nous admettons ensuite au début de la transmission une onde ayant une durée de front de 0,1 microseconde, ainsi que le représente la courbe 3 de la figure 6. Nous choisissons comme unité τ un intervalle de 0,02 microseconde ; cette variation est caractérisée par la suite :

$$S(E) = E_m [0{,}2 ; 0{,}4 ; 0{,}6 ; 0{,}8 ; 1 ; 1 ; \ldots ; 1 ; \ldots]$$

et par la suite échelonnée :

$$S_e(E) = E_m [0{,}1 ; 0{,}2 ; 0{,}2 ; 0{,}2 ; 0{,}2 ; 0{,}1 ; 0 ; 0 ; \ldots ; 0 ; \ldots].$$

La variation de la tension U_x est donnée par le produit composé de la suite $S_e(E)$ par la suite $S(\Phi_{EU_x})$. Le résultat de ce produit est donné par la courbe 4 de la figure 6 qui met en évidence l'étalement du front d'onde qui résulte de la pénétration du champ électromagnétique à l'intérieur du conducteur et des pertes qui accompagnent cette pénétration. Cette méthode de calcul est applicable pour toute autre forme de l'onde de choc.

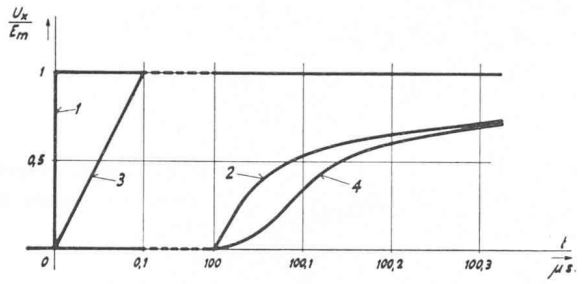

Fig. 6. — Propagation d'une tension le long d'une transmission électrique compte tenu de l'inertie magnétique du champ intérieur du conducteur.

Courbe 1 : Variation de la tension au début de la transmission selon un échelon rectangulaire.

Courbe 2 : Variation de la tension à une distance $x = 30$ km résultant de l'échelon rectangulaire selon la courbe 1.

Courbe 3 : Variation de la tension au début de la transmission selon une onde ayant un front de 0,1 μs.

Courbe 4 : Variation de la tension à une distance $x = 30$ km résultant d'une variation de la tension au début de la transmission selon la courbe 3.

* * *

De nombreux exemples pourraient être encore donnés de l'utilisation des suites pour l'étude des phénomènes de propagation qui obéissent à un système d'équations aux dérivées partielles. On pourrait, en particulier, mettre en évidence que, si les pertes sont très importantes, on retrouve les mêmes conditions que celles qui caractérisent la transmission de la chaleur. On pourrait déterminer l'influence de l'impédance de la source de tension et celle des différents modes de réflexion si la transmission est de longueur limitée. Une étude systématique de ces différents cas sortirait cependant du cadre de notre exposé. [1]

[1] Texte extrait de la thèse de doctorat « Méthode de calcul à l'aide de suites » publiée à l'édition « Sciences et Techniques », P. Feissly, 11 Petit-Chêne, Lausanne.

TABLEAU I

Variables et paramètres caractérisant certains phénomènes de propagation (3)

	H	V	m	w
Onde électro-magnétique	Tension	Courant	Inductivité spécifique	Vitesse de propagation des ondes électro-magnétiques
Vibration de torsion dans une barre circulaire	Tension tangentielle	Vitesse angulaire de torsion	Masse spécifique de la matière constituant la barre	Vitesse de propagation des vibrations de torsion
Vibration longitudinale dans une barre prismatique	Tension normale agissant dans un profil	Vitesse de déplacement des points d'un profil de la barre	Masse spécifique de la matière constituant la barre	Vitesse de propagation des vibrations longitudinales
Onde de pression dans une conduite forcée	Pression hydraulique	Vitesse d'écoulement de l'eau dans la conduite	Masse spécifique de l'eau dans la conduite	Vitesse de propagation des ondes de pression
Onde de translation dans un canal découvert	Hauteur du plan d'eau	Vitesse d'écoulement de l'eau dans le canal	Masse spécifique de l'eau dans le canal	Vitesse de propagation des ondes de translation

TABLEAU II

Détermination de la propagation d'une onde électromagnétique le long d'une ligne à haute tension

θ	t ms	$\frac{1}{\sqrt{\theta^2-1}}$	$e^{-\theta}$	$jJ_1(j\sqrt{\theta^2-1})$	$\frac{e^{-\theta}}{\sqrt{\theta^2-1}}jJ(j\sqrt{\theta^2-1})$	$-\int_1^{\alpha t}\frac{e^{-\theta}}{\sqrt{\theta^2-1}}jJ_1(j\sqrt{\theta^2-1})d\theta$	U_x
1	21,6		0,368		0,184	0,0	0,368
1,2	25,8	1,52	0,303	0,36	0,165	0,0349	0,4029
1,4	30	1,02	0,247	0,55	0,139	0,0653	0,4333
1,6	34,4	0,800	0,202	0,75	0,126	0,0918	0,4598
1,8	38,7	0,671	0,166	0,931	0,104	0,1148	0,4828
2,0	43,1	0,578	0,136	1,10	0,0865	0,1338	0,5018
2,2	47,3	0,510	0,111	1,50	0,0850	0,1509	0,5189
2,4	51,6	0,458	0,091	2,01	0,0838	0,1678	0,5358
2,6	56	0,416	0,0745	2.30	0,0712	0,1833	0,5513
2,8	60,2	0,383	0,0610	2,76	0,0645	0,1968	0,5648
3,0	64,5	0,354	0,050	3,35	0,0592	0,2082	0,5762
3,2	69,2	0,330	0,041	4,0	0,0542	0,2196	0,5876

BIBLIOGRAPHIE

(1) M. Cuénod : *Principe du calcul à l'aide de suites.* Bulletin technique de la Suisse romande, 1955, nos 12 et 13.

(2) M. Cuénod : *Application du calcul à l'aide de suites à la théorie des réglages automatiques.* Bulletin technique de la Suisse romande, 1955, no 24.

(3) H. Favre : *Sur la généralisation d'une analogie entre cinq phénomènes de mécanique.* Bulletin technique de la Suisse romande, 11 et 25 novembre, 9 décembre 1949.

(4) M. Cuénod : *Influence des phénomènes de coups de bélier sur le réglage de la vitesse des turbines hydrauliques.* La Houille Blanche, mars-avril 1949.

(5) O. Schnyder : *Über Druckstösse in Rohrleitungen.* Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 1932, nos 5 et 6.

(6) L. Bergeron : *Etude des variations de régime dans les conduites d'eau.* Revue générale d'hydraulique, 1935, nos 1 et 2.

(7) K.W. Wagner : *Operatorenrechnung.* Ed. J. Ambrosius Barth, Leipzig, 1940.

(8) Janke und Emde : *Funktionen Tafeln.*

ECOLE POLYTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE LAUSANNE

Cours d'introduction à l'énergie atomique

Lausanne, 24 et 25 février 1956

La première Conférence internationale sur l'énergie atomique, qui a eu lieu à Genève en août 1955, a suscité un vif intérêt dans les milieux techniques.

Les expositions présentées dans le cadre de cette conférence ont montré que les pays industriels accordent une importance croissante aux études scientifiques et techniques relatives à l'utilisation pacifique de l'énergie nucléaire. Elles ont aussi dévoilé l'ampleur inattendue des résultats obtenus.

Toutes les questions relatives à l'utilisation de l'énergie nucléaire étant à l'ordre du jour, de nombreux ingénieurs et techniciens suisses ont manifesté le désir de compléter leurs connaissances en la matière. Cependant, les publications traitant ce vaste sujet sont fort diverses, de sorte que les non-initiés peuvent difficilement se faire une idée exacte des possibilités d'application de cette nouvelle source d'énergie.

Pour répondre à ce besoin d'information, l'Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne, avec le concours de l'Institut de physique de Genève, organise les 24 et 25 février 1956, à Lausanne, un *Cours d'introduction à l'énergie atomique*, dont le programme figure ci-dessous.

Cette série de conférences peut être considérée comme une introduction aux « Journées suisses d'étude sur l'énergie nucléaire » que la S.I.A. (Société suisse des ingénieurs et architectes) organise les 5, 6 et 7 avril 1956 à Neuchâtel.

Le cours donné par l'OFIAMT (Office fédéral de l'industrie, des arts et métiers et du travail) le 2 février à Lausanne ne fait pas double emploi avec les conférences précitées de Lausanne et de Neuchâtel, car il concerne surtout les effets physiologiques des rayonnements radioactifs.

Pour illustrer et compléter le Cours d'introduction à l'énergie atomique, une *exposition* relative aux questions nucléaires et comprenant notamment des modèles réduits de réacteurs et un modèle de cyclotron sera installée dans les locaux de l'E.P.U.L.

Un repas, servi vendredi soir à 19 heures au Buffet de la Gare de Lausanne (Salle des Vignerons), donnera aux participants qui le souhaitent l'occasion de faire plus ample connaissance. Il sera suivi de la projection d'un *film*.

PROGRAMME

Vendredi 24 février 1956

Matin : 10 h. 30 - 11 h. 15. Aula de l'E.P.U.L.

Ouverture du cours, par
M. *A. Stucky*, professeur, directeur de l'E.P.U.L., Lausanne.

Physique classique et physique nucléaire, par
M. *R. Mercier*, professeur à l'E.P.U.L., Lausanne. 45 min.

Constitution du noyau — Réaction nucléaire, par
M. *Ch. Haenny*, professeur à l'E.P.U.L., Lausanne. 45 min.

Après-midi : 14 h. 30 - 18 h. Aula de l'E.P.U.L.

Fission — Radioactivité, par
M. *Ch. Haenny*, professeur à l'E.P.U.L., Lausanne. 45 min.

Physique du réacteur nucléaire, par
M. *R. Extermann*, professeur à l'Université de Genève. 45 min.

Pause. 30 min.

Production d'énergie et d'isotopes, par
M. *R. Extermann*, professeur à l'Université de Genève. 45 min.

Certaines actions physiques des radiations, par
M. *R. Mercier*, professeur à l'E.P.U.L., Lausanne. 45 min.

Vendredi soir : 19 h.

Dîner au Buffet de la Gare de Lausanne (Salle des Vignerons).

A l'issue du repas et dans la même salle, projection d'un *film*.

Samedi 25 février 1956

Matin : 9 h. - 12 h. Aula de l'E.P.U.L.

Théorie de la séparation des isotopes, par
M. *P. de Haller*, directeur chez Sulzer Frères, Winterthour. 90 min.

Discussion. 30 min.

Transmission de chaleur dans le réacteur, par
M. *W. Traupel*, professeur à l'E.P.F., Zurich. 45 min.

Discussion. 15 min.

Après-midi : 14 h. - 16 h. 15. Aula de l'E.P.U.L.

Réacteurs expérimentaux, par
M. *J. Lalive d'Epinay*, ingénieur E.P.F., chez Brown, Boveri & Cie, Baden. 45 min.

Discussion. 15 min.

Cycles thermodynamiques, par
M. *W. Traupel*, professeur à l'E.P.F., Zurich. 45 min.

Discussion. 15 min.

Clôture du cours.

Du lundi 20 février au samedi 25 février, dans les locaux de l'E.P.U.L. :

Exposition relative aux questions atomiques (modèles réduits de réacteurs, cyclotron, etc.).

Prix :

Pour le cours complet : Fr. 25.— } (étudiants : Fr. 15.—).
Pour une journée : » 15.— }

Les personnes désirant participer à ce cours sont priées de s'adresser au Secrétariat de l'Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne, 29, avenue de Cour.