Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 67 (1941)
Heft: 21

Artikel: Théorie de l'équilibre des corps élasto-plastiques
Autor: Colonnetti, Gustave
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51346

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

67e année 18 octobre 1941 N° 21

BULLETIN TECHNIQUE
DE LA SUISSE ROMANDE

ABONNEMENTS :
Suisse : 1 an, 13.50 francs
Etranger : 16 francs
Pour sociétaires :
Suisse : 1 an, 11 francs
Etranger : 13.50 francs
Prix du numéro :
75 centimes.
Pour les abonnements s'adresser à la librairie F. Rouge & Cie, à Lausanne.

Paraissant tous les 15 jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale. —

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève ; Vice-président: M. Imer, à Genève; secrétaire: J. Calame, ingénieur, à Genève. Membres : *Fribourg :* MM. L. Hertling, architecte ; A. Rossier, ingénieur ; *Vaud :* MM. F. Chenaux, ingénieur; E. Elskes, ingénieur ; Epitaux, architecte; E. Jost, architecte; A. Paris, ingénieur; Ch. Thévenaz, architecte; *Genève :* MM. L. Archinard, ingénieur; E. Odier, architecte ; Ch. Weibel, architecte ; *Neuchâtel :* MM. J. Béguin, architecte; R. Guye, ingénieur; A. Méan, ingénieur ; *Valais :* M. J. Dubuis, ingénieur; A. de Kalbermatten, architecte.

Rédaction : D. Bonnard, ingénieur, Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Publicité :
TARIF DES ANNONCES
Le millimètre (larg. 47 mm.) 20 cts.
Tarif spécial pour fractions de pages.
Rabais pour annonces répétées.
ANNONCES-SUISSES S.A.
5, Rue Centrale,
LAUSANNE
& Succursales.

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE
A. Stucky, ingénieur, président ; M. Bridel ; G. Epitaux, architecte ; M. Imer.

SOMMAIRE : *Théorie de l'équilibre des corps élasto-plastiques*, (suite), par M. Gustave Colonnetti, membre de l'Académie Pontificale des Sciences, professeur à l'Ecole Polytechnique de Turin. — *Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne : Les cours vont s'ouvrir selon un nouveau plan d'études récemment approuvé par le Conseil d'Etat.* — Nécrologie : *Jean Rivier, ingénieur.* — Bibliographie. — Service de placement.

Théorie de l'équilibre des corps élasto-plastiques

par M. Gustave COLONNETTI,
Membre de l'Académie Pontificale des Sciences,
Professeur à l'Ecole Polytechnique de Turin.

(Suite.) [1]

V. Les systèmes hyperstatiques.

Après avoir précisé les relations entre le moment de flexion, agissant sur une section droite d'une poutre, et la courbure que cette section subit conséquemment en régime élasto-plastique, on soulignera que c'est seulement dans la poutre statiquement déterminée — c'est-à-dire librement dilatable — que les conséquences de la plasticité restent limitées au seul domaine des déformations.

Si, en effet, la poutre appartient à un système statiquement indéterminé — et par conséquent non librement dilatable — les déformations plastiques y détermineront aussi des variations de l'état d'équilibre ; et ceci par des variations de valeur des inconnues hyperstatiques, et par conséquent des composantes de la sollicitation relative à chaque section, composantes qui sont en général des fonctions de ces inconnues.

Ce cas rentre dans la catégorie des phénomènes qu'un illustre mathématicien italien, M. Vito Volterra, dont la perte toute récente affecta vivement le monde scientifique international, a étudié sous le nom de *distorsions*.

Bien entendu, je ne veux pas dire par là que l'état de coaction déterminé par un système quelconque de déformations plastiques puisse s'identifier à une simple distorsion.

Au contraire, c'est, en général, quelque chose de bien différent et même de bien plus compliqué, avec ses tensions intérieures, fonctions en chaque point des déformations plastiques correspondantes.

C'est l'influence de ces déformations plastiques sur l'équilibre général du système qui seule peut toujours être ramenée à une distorsion.

Pour bien préciser ma pensée, je dirai qu'il y a une analogie parfaite entre ce qu'il advient ici en vertu des états de coaction, et ce qui se vérifie dans la théorie classique à propos des états de déformation déterminés par des forces extérieures.

Ces états dépendent bien en effet, dans chaque cas particulier, de la distribution des forces. Mais l'influence de cette distribution est limitée au voisinage immédiat des endroits où les forces sont appliquées ; ainsi l'état d'équilibre dans des régions de poutre suffisamment éloignées peut toujours être défini en fonction des seules caractéristiques : force résultante et moment résultant.

De la même manière, l'état de coaction déterminé dans une poutre par un système de déformations plastiques dépend, sans aucun doute, de la loi de distribution de ces déformations. Toutefois l'influence de cette distribution est limitée au voisinage immédiat de l'endroit où les déformations plastiques se sont produites ; tandis que l'état de coaction déterminé dans des régions suffisamment lointaines de la poutre peut toujours être défini en fonction des seules caractéristiques de translation et de rotation, comme s'il s'agissait tout simplement d'une distorsion.

C'est en ce sens qu'il faut envisager la possibilité que des déformations plastiques, déterminées dans une portion de la poutre par des tensions intérieures dépassant les limites d'élasticité du matériau, entraînent des modifications permanentes dans son état général d'équilibre.

[1] Troisième des conférences données à Lausanne par M. le professeur Colonnetti, les 9 et 10 mai 1941, et organisées par l'*Ecole d'ingénieurs* de l'Université, avec le concours de l'Association des anciens élèves de l'E. I. L., de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes et du groupe des Ponts et Charpentes de la Société suisse des ingénieurs et des architectes. La première conférence a été publiée au *Bulletin technique* du 28 juin 1941, p. 145. La seconde au *Bulletin technique* du 20 septembre 1941, p. 217.

Nous disions en effet que, au moment où les premières déformations plastiques se produisent dans une section de la poutre, le diagramme qui traduit graphiquement la relation entre moments et courbures, fléchit vers l'axe des courbures.

Deux éventualités peuvent alors se présenter.

Ou bien le moment dans la section considérée est complètement déterminé en fonction des charges extérieures par les lois mêmes de la statique, et doit en conséquence s'accroître proportionnellement à ces charges. Dès lors ce seront les déformations, et en particulier les courbures, qu'on verra s'accroître plus rapidement.

Ou bien l'augmentation des charges, n'entraînant pas nécessairement un accroissement proportionnel du moment dans la section considérée, peut être équilibré par un accroissement plus rapide des moments dans d'autres sections de la poutre, tandis que dans la première le moment reste stationnaire ; cela se produisant en pleine compatibilité avec les lois de la statique, grâce à la présence de liaisons surabondantes qui laissent statiquement indéterminée la distribution des moments de flexion.

Dans ce cas, la théorie nous laisse prévoir un nouvel ordre de phénomènes ; quelque chose comme un déplacement automatique ou une migration spontanée des moments, de la section, de la poutre où la limite d'élasticité a été atteinte, à d'autres sections qui étaient jusque-là moins sollicitées.

Et l'expérience confirme, une fois encore, le résultat de la théorie.

Prenons par exemple, pour fixer les idées, le cas de la poutre continue, cas qui a été l'objet de nombreuses recherches de la part d'un grand nombre d'expérimentateurs. Plus précisément, considérons le cas d'une poutre de section, constante, continue sur quatre appuis de niveau, symétrique par rapport à son milieu, et chargée en ce point d'une force concentrée P.

Si l'on prend comme inconnue hyperstatique le moment M sur les appuis intermédiaires — et si l'on convient, comme d'habitude, de faire abstraction de l'effort tranchant — l'équation générale de l'équilibre élasto-plastique peut s'écrire sous la forme

$$\int \left(\frac{\mathfrak{M}}{EJ} + \bar{\mu} \right) \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial M} \, ds = 0$$

$\bar{\mu}$ étant la courbure plastique, et l'intégrale étant étendue à toute la longueur de la poutre.

Dans le cas particulier auquel nous nous rapportons, si l'on représente par l_1 la longueur de la travée latérale, par l_2 celle de la travée du milieu, et si l'on effectue les opérations indiquées, on obtient l'équation

$$\frac{M}{EJ} \left(\frac{2}{3} l_1 + l_2 \right) + \frac{P l_2^2}{8 EJ} + \int \bar{\mu} \, ds = 0$$

dans laquelle l'intégrale doit être étendue à la zone de la travée intermédiaire (proche du milieu) où peut se produire un dépassement de la limite d'élasticité du matériau, et donc une apparition de déformations plastiques.

Mais la courbure plastique

$$\bar{\mu} = \frac{\int_A \bar{\epsilon}^z \, y \, dA}{J}$$

est une fonction connue des déformations plastiques, donc du moment $\mathfrak{M}$ qui leur a donné naissance ; elle est donc aussi une fonction de l'inconnue hyperstatique M dont ce moment dépend linéairement.

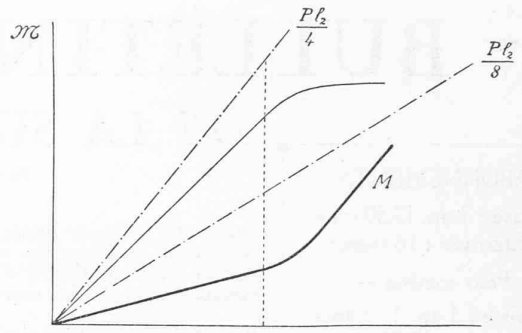

Fig. 12.

De l'équation que nous venons d'écrire on pourra, par conséquent, déduire, dans chaque cas particulier, la loi suivant laquelle M dépend de P.

Cette loi a l'allure indiquée en trait plein sur notre figure 12 ; la courbe en trait mince représente par contre la loi de variation du moment maximum, au milieu de la poutre, telle qu'on peut la déduire de la première par des simples considérations statiques.

Les deux courbes accusent d'une manière très expressive le phénomène de transfert des moments des sections les plus chargées — où apparaissent les premières déformations plastiques — aux sections moins chargées — où les limites d'élasticité n'ont pas encore été atteintes.

Or, des courbes parfaitement semblables à celles-ci ont été obtenues par M. Mayer-Leibnitz en partant d'un diagramme des courbures en fonction des moments de flexion, qu'il avait obtenu expérimentalement par des mesures effectuées sur des poutres à deux appuis.

M. Mayer-Leibnitz a même constaté un accord vraiment remarquable entre ces courbes et celles qu'il obtenait en expérimentant directement sur des poutres continues.

Cet accord peut donc être compté parmi les vérifications expérimentales de la théorie de l'équilibre élasto-plastique.

* * *

Les considérations que nous venons de développer ont été dernièrement utilisées par certains auteurs d'une manière qui les a conduits à des résultats absolument erronés.

Ces auteurs observent très justement que, lorsqu'à mesure de l'accroissement des charges on atteint dans une section de la poutre la limite d'élasticité du matériau, le moment de flexion dans cette section tend vers une valeur limite correspondant à l'hypothèse du régime plastique étendu à la section tout entière. Cette valeur limite ne pourra en aucun cas et pour aucune raison être dépassé.

Ils admettent alors que, là où la valeur limite du moment a été atteinte, la courbure peut croître indéfiniment ; au droit de la section prend naissance ce que ces auteurs appellent une « rotule plastique ».

Ils en déduisent naturellement que tout accroissement ultérieur des charges devra nécessairement provoquer un accroissement du moment de flexion dans les autres sections, et cela jusqu'à ce que, pour elles aussi, on parvienne aux valeurs limites respectives.

Il s'ensuit que l'état critique d'une poutre ayant n liaisons surabondantes peut être considéré comme caractérisé par l'apparition de la $(n+1)^{me}$ rotule, à la suite de quoi le tracé géométrique de la poutre cesse de se trouver défini.

D'où la possibilité, d'après ces auteurs, de déterminer la charge maximum compatible avec une marge de sécurité

fixée à l'avance, en adoptant la fraction correspondante des charges capables de réaliser les valeurs limites des moments de flexion en ces $n + 1$ sections.

Or, comme je le disais, une telle évaluation des marges de sécurité est absolument erronée ; et cela pour une raison que nous avons déjà reconnue d'avance.

En effet, quand les déformations plastiques apparaissent dans une section, le moment de flexion correspondant tend bien vers la valeur limite dont nous avons parlé, mais d'une manière asymptotique, suivant une courbe bien connue ; nous avons même déjà eu l'occasion de remarquer que, de cette manière, le moment peut bien s'approcher de cette valeur limite, mais il ne peut jamais l'atteindre, pendant que la courbure, à laquelle les déformations plastiques donnent lieu, croît indéfiniment.

Or, quel que soit le matériau que l'on emploie, et si grande que soit sa ductilité, il est hors de doute que l'on arrivera inévitablement à la rupture pour une valeur finie de la courbure.

Et rien ne permet d'affirmer que, lorsque cette rupture se produira dans une certaine section, les moments de flexion des autres sections — et précisément de celles où devraient apparaître les autres rotules plastiques — auront pu, je ne dis pas atteindre, mais seulement s'approcher de leurs valeurs limites respectives.

D'ailleurs on n'insistera jamais assez sur le fait que c'est toujours dangereux de pousser les conséquences de la théorie au delà de certaines limites.

Les expériences de Mayer-Leibnitz — comme celles que Stussi et Kollbrunner ont faites dans le même but — ont démontré d'une manière évidente que, dans le cas de la poutre continue, les courbes représentatives des moments au milieu et sur les appuis suivent, seulement jusqu'à un certain point, l'allure théorique que nous avons décrite tout à l'heure ; elles s'en écartent ensuite, empêchant l'égalisation des moments de se produire.

Or je pense que ce fait doit tout simplement être attribué à l'intervention des phénomènes d'écrouissage et plus précisément à la reprise de résistance qui les caractérise.

La vérification expérimentale de la théorie conserve toute sa valeur. J'oserai même dire que cette valeur est encore accrue du fait que nous venons à connaître les limites au delà desquelles la théorie ne pourra et ne devra plus être appliquée.

* * *

Il faut d'ailleurs considérer que le mécanisme du phénomène, que nous sommes en train d'analyser, est plus compliqué qu'il ne paraît à première vue ; et qu'il ne se réduit pas toujours à la seule altération des valeurs relatives des moments de flexion.

On arrive en effet à démontrer que, si les liaisons comportent une opportune indétermination statique ultérieure du système, non seulement la grandeur mais également la nature de la sollicitation dans chaque section peuvent être altérées.

Il suffit par exemple qu'une section soit asymétrique, ou bien que, tout en étant symétrique, elle se comporte de manière asymétrique — ainsi qu'il arrive quand les limites d'élasticité à la traction et à la compression ne sont pas atteintes en même temps — pour que les déformations plastiques donnent naissance non plus seulement à une courbure, mais aussi à un allongement ou à un raccourcissement

$$\lambda = \frac{\mathfrak{M} + E\int_A \overline{\epsilon}_z \, dA}{EA}$$

de l'axe géométrique de la poutre.

Cette expression se compose de deux termes ; le premier

$$\frac{\mathfrak{M}}{EA}$$

se rapporte à la phase élastique du phénomène, c'est-à-dire aux déformations qui s'annulent lorsque s'annule la sollicitation extérieure ;

le second terme

$$\overline{\lambda} = \frac{\int_A \overline{\epsilon}_z \, dA}{A}$$

se rapporte au contraire à la phase plastique du phénomène, c'est-à-dire aux déformations qui persistent même après la disparition des forces extérieures.

Dans ces conditions l'état de coaction qui, par suite des déformations plastiques, vient se superposer à l'état d'équilibre élastique, peut — si les liaisons le permettent — avoir une influence non plus seulement quantitative, mais aussi qualitative sur la sollicitation.

Il peut arriver par exemple qu'une sollicitation par simple flexion se trouve ainsi, par l'intervention des déformations plastiques, transformée en une sollicitation composée de flexion et compression ou de flexion et traction.

Pour nous faire une idée de la manière suivant laquelle joue ce mécanisme — dont nous aurons bientôt l'occasion de reconnaître l'importance — examinons un cas extrêmement simple : celui d'une poutre prismatique rigidement encastrée à ses extrémités (fig. 13).

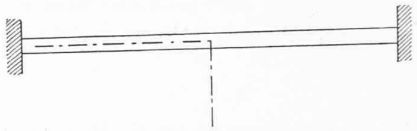

Fig. 13.

Si l'on se borne au cas des charges normales à l'axe de la poutre et symétrique par rapport à son milieu, les équations de l'équilibre élasto-plastique peuvent s'écrire sous la forme

$$H\int \frac{ds}{A} - E\int \overline{\lambda} \, ds = 0$$

$$\int \mathfrak{M}_o \frac{ds}{J} + M\int \frac{ds}{J} + E\int \overline{\mu} \, ds = 0$$

où $\mathfrak{M}_o$ est le moment de flexion que les charges détermineraient dans la section courante de la poutre si celle-ci était rendue isostatique par suppression de l'encastrement de gauche ; H et M sont les deux inconnues hyperstatiques, c'est-à-dire la poussée (composante horizontale de la réaction de l'encastrement de gauche) et le moment de cette même réaction par rapport au centre de gravité élastique de la poutre (centre qui, dans le cas de la symétrie, coïncide naturellement avec le milieu de l'axe) ;

$$\overline{\lambda} = \frac{\int_A \overline{\epsilon}_z \, dA}{A} \qquad \overline{\mu} = \frac{\int_A \overline{\epsilon}_z \, y \, dA}{J}$$

sont les deux paramètres de la déformation plastique pour la section considérée.

La première de ces équations nous dit que

$$H = O \quad si \quad \overline{\lambda} = 0$$

c'est-à-dire que la poussée est nulle non seulement en régime élastique, mais également en présence de déformations plastiques si celles-ci sont dans chaque section disposées symétriquement par rapport à l'axe neutre.

L'autre équation nous montre l'influence des déformations plastiques sur la valeur du moment de flexion. On voit ainsi que les déformations plastiques, provoquées dans les sections situées près des encastrements et ainsi soumises à des moments de flexion négatifs, c'est-à-dire donnant lieu à des courbures plastiques négatives (donc du même signe que le terme $\mathfrak{M}_o$), détermineront une augmentation de M. En conséquence les lignes d'action des réactions — qui, en régime élastique, avaient les positions indiquées dans la figure 14 — tendront à s'approcher des encastrements, ce qui entraînera une limitation des moments négatifs en ces endroits et une augmentation correspondante des moments positifs au milieu de la poutre (fig. 15).

Par contre, les déformations plastiques dans les sections à moment fléchissant positif, qui situées dans la région médiane de la poutre donnent lieu à des courbures positives, détermineront une diminution de M. En conséquence les lignes d'action des réactions tendront à se déplacer vers le milieu, entraînant une limitation de ces moments positifs et un accroissement correspondant des moments négatifs aux encastrements (fig. 16).

La position de ces lignes d'action, et avec elle la valeur du rapport des moments maxima à l'instant où la rupture se produira dans la section la plus chargée, se trouve ainsi dépendre — et d'une manière qui n'est pas toujours très simple — de l'ordre, de la façon et de la grandeur des déformations plastiques qui se sont produites dans les différentes parties de la poutre, et de l'importance relative de leurs effets respectifs.

* * *

Le problème se complique encore si, dans quelque section, $\overline{\lambda}$ est différent de zéro.

On voit alors en effet apparaître une poussée H et la poutre se met à réagir comme un arc (fig. 17).

Ceci arrive dans les poutres à section asymétrique et, d'une manière caractéristique, dans les constructions en béton armé où les déformations plastiques apparaissent dans la région tendue pour des valeurs très faibles du moment de flexion, quand, dans la région comprimée, le matériau suit encore très approximativement la loi de Hooke.

Dès lors, tandis que les $\overline{\mu}$ continuent à avoir le signe des moments de flexion correspondants, les $\overline{\lambda}$ sont tous de même signe, et il peut arriver que l'influence des déformations plastiques se manifeste plus nettement par la valeur de l'intégrale $\int \overline{\lambda}\, ds$ et par celle de H qui en dépend, que par la valeur de l'intégrale $\int \overline{\mu}\, ds$ et de la variation correspondante de M.

Ce cas est particulièrement riche en enseignements ; il met en évidence et distingue bien dans leurs effets les trois catégories d'influences que peut avoir, sur la distribution des tensions intérieures, l'apparition des déformations plastiques au bord d'une section.

La première de ces catégories à trait exclusivement à la répartition des tensions sur la section elle-même, et se manifeste sous forme d'une limitation des tensions sur le bord où la limite élastique a été atteinte ; cette limitation est compensée par un accroissement des tensions à l'intérieur de la section, là où la résistance du matériau était initialement moins utilisée.

Cette redistribution des tensions est rendue possible par l'indétermination statique inhérente à la section elle-même :

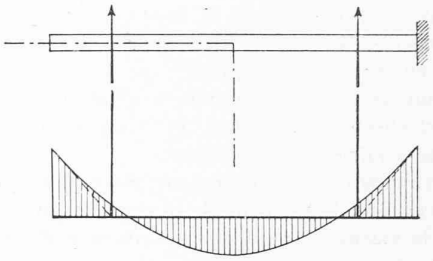

Fig. 14.

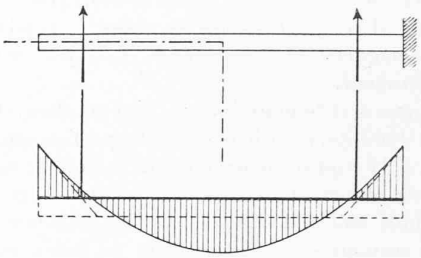

Fig. 15.

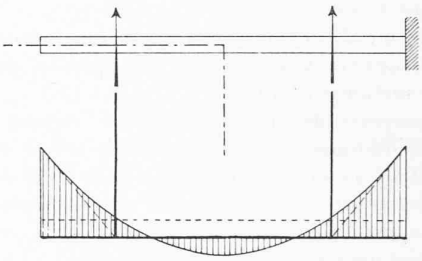

Fig. 16.

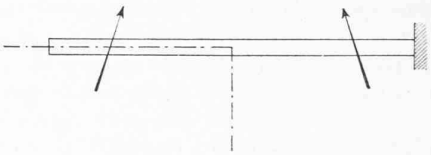

Fig. 17.

elle a donc lieu même quand la poutre est statiquement déterminée au point de vue des liaisons extérieures.

La seconde catégorie, qui suppose au contraire l'indétermination statique du diagramme des moments de flexion, c'est-à-dire l'existence d'au moins une liaison surabondante, se manifeste sous forme d'une limitation du moment dans la section où les déformations plastiques se sont produites, et par un accroissement du moment dans les autres sections initialement moins chargées.

Enfin la troisième catégorie d'influences, qui n'a lieu que si les liaisons comportent une opportune indétermination statique ultérieure du système, se manifeste sous la forme d'une poussée qui modifie la répartition des tensions non seulement dans la, ou dans les sections où les déformations plastiques ont pris naissance, mais dans toutes les sections de la poutre.

Cette poussée tend à limiter celle des tensions maxima qui a atteint la première la limite élastique, et à augmenter celle qui ne l'a pas encore atteinte.

Et c'est par une savante combinaison de ces influences, c'est-à-dire en faisant intervenir chacune d'elles dans la mesure la plus opportune, et suivant des lois que seule une

analyse rigoureuse et complète du phénomène pourra nous révéler, que la nature réalise, dans les limites que les données du problème lui imposent, la meilleure utilisation possible de la résistance des matériaux.

* * *

La conclusion la plus importante que ces considérations comportent, c'est le sens nouveau que nous donnons ainsi au fait de l'hyperstaticité d'une construction.

Nous étions jusqu'ici trop habitués à considérer les constructions hyperstatiques comme des systèmes auxquels la surabondance des liaisons — autant intérieures qu'extérieures — conférait une inquiétante sensibilité aux déformations plastiques.

En effet, cette sensibilité devait fatalement être considérée comme une qualité négative — quelquefois même comme un véritable danger — lorsqu'on regardait aux déformations plastiques comme à des éventualités qui restaient hors du cadre de nos calculs et par conséquent de nos prévisions.

Aujourd'hui que ce cadre s'est agrandi jusqu'à comprendre tout le domaine des déformations plastiques, et que nous sommes en état de tenir un compte exact des effets de ces déformations, et de prévoir les modifications qu'elles détermineront dans l'état d'équilibre du système, nous considérons cette sensibilité comme une qualité positive — et même précieuse — des constructions hyperstatiques.

Qualité dont nous venons de dire que la nature se sert — et dont nous-mêmes pourrons nous servir — pour réaliser la meilleure utilisation des matériaux compatible avec la constitution du système.

Et il faut dire tout de suite que ce mécanisme, qui est désormais à notre disposition depuis que nous en connaissons le secret, fonctionnera sur un plan d'autant plus vaste, et nous permettra de réaliser des résultats d'autant plus importants, que sera plus vaste la gamme des variations de régime que le problème statique comporte, en raison du degré d'hyperstaticité plus élevé du système.

Il faut seulement s'habituer à une présentation nouvelle des problèmes.

La théorie classique nous avait habitués à penser à l'état d'équilibre d'un système soumis à des forces extérieures comme à quelque chose de bien défini en fonction de ces forces.

Même dans les cas hyperstatiques — dans lesquels les équations de la statique se prêtent à une infinité de solutions — l'hypothèse de l'élasticité parfaite conduit à une solution unique et bien déterminée.

Mais un examen plus attentif des faits nous conduit à reconnaître qu'un tel résultat ne correspond pas à la réalité.

La solution déterminée par la théorie de l'élasticité se réalise effectivement dans le seul cas où les hypothèses de cette théorie sont rigoureusement vérifiées, c'est-à-dire s'il n'intervient pas de déformation non élastique.

Ce n'est toutefois qu'un cas limite.

Nous avons déjà dit que, dans les corps naturels, les déformations élastiques sont toujours accompagnées par des déformations plastiques ; il est bien vrai que celles-ci sont souvent très petites, et même négligeables par rapport aux dimensions du système ; mais ce n'est point là une raison pour négliger leur influence sur le régime statique ; cette influence peut même être très importante.

En d'autres termes, il n'est pas prouvé qu'une seule des solutions des équations de la statique soit réalisable.

Au contraire toutes le sont ; et la réalisation de l'une de ces solutions plutôt que d'une autre dépend précisément de l'intervention de déformations plastiques opportunes et des états de coaction qui en dérivent.

En présence de ce fait incontestable, les constructeurs ont pris les positions les plus différentes.

Les uns, dominés par la préoccupation, très légitime d'ailleurs, d'éviter toute incertitude sur l'état effectif d'équilibre de leurs constructions, ont cherché tous les moyens pour s'opposer à la formation d'états de coaction.

Ils ont été ainsi conduits à l'élimination systématique de toute liaison surabondante qui pourrait, par sa présence, s'opposer aux déformations plastiques et donner lieu à un état de coaction.

Leur idéal est le système librement dilatable dans toutes ses parties, dans lequel aucun état de coaction n'est possible ; la solution du problème de l'équilibre est alors statiquement déterminée.

Ils ont multiplié les appuis simples et les articulations de toute sorte.

Mais celles-ci se réalisent et se maintiennent très bien dans les constructions mécaniques qui sont habituellement en mouvement, et où l'on peut assurer une lubrification parfaite et constante ; elles se réalisent et se maintiennent moins bien dans les constructions civiles où elles sont trop souvent appelées à supporter des charges énormes en restant presque immobiles et en étant dans la plupart des cas mal protégées des influences atmosphériques.

Dans ces conditions les résistances au frottement ne tardent pas à prendre des proportions considérables ; le fonctionnement des articulations est douteux ; et l'on voit réapparaître ces états de coaction qu'on voulait rendre impossibles.

Au point de vue pratique l'expédient perd ainsi la plus grande part de sa valeur.

D'ailleurs, même au point de vue théorique, l'idée de renoncer à toute liaison surabondante ne peut être acceptée sans réserve.

Surabondance de liaisons signifie en effet accroissement de résistance aux charges ; signifie donc accroissement des marges de sécurité de la construction.

D'autre part, on pressentait depuis longtemps ce que nous avons dit à propos de la meilleure utilisation des matériaux que la nature réalise automatiquement à l'aide des déformations plastiques, avec d'autant plus d'ampleur que le degré d'hyperstaticité du système est plus élevé.

En effet, certains constructeurs, plutôt que de renoncer aux avantages des liaisons surabondantes, ont préféré accepter les états de coaction qui, grâce à ces liaisons, peuvent se produire ; ils ont fait confiance à la nature pour ce qui a trait à leurs conséquences.

Ici je veux rappeler un nom : celui de François Hennebique, inoubliable pionnier des constructions en béton armé.

C'est à lui, à son exceptionnelle et géniale intuition, que nous autres Italiens sommes redevables du grand pont sur le Tibre qui, sous sa direction, a été construit à Rome il y a presque trente ans, c'est-à-dire à une époque où les arcs en béton armé de grandes dimensions étaient encore une nouveauté et une hardiesse.

M. Hennebique nous apprit dès lors à construire des arcs très minces à la clé et renforcés vers les appuis par des structures cellulaires assez rigides, en nous conseillant d'admettre que la déformabilité plastique du béton tend à centrer la courbe des pressions en clé, et à la rehausser vers les appuis, de manière à maintenir les efforts dans des limites admissibles, même dans le cas où, selon la théorie de l'élasticité, ils auraient dû atteindre des valeurs excessives.

A son école, nos ingénieurs ont appris à choisir celle des

courbes des pressions qui se prêtait le mieux à la stabilité de l'ensemble ; et à faire confiance à la nature pour que cette courbe se réalisât grâce à la plasticité des bétons.

Méthode hardie entre toutes, et qui exigeait, pour donner de bons résultats, d'être employée par des hommes doués d'une profonde et sûre intuition de ce que la nature peut, et de ce qu'elle ne peut pas donner.

C'est seulement depuis peu de temps que nous sommes en état de faire de cette méthode un procédé rationnel, c'est-à-dire de subordonner le choix de la courbe des pressions à une analyse exacte des déformations plastiques qui se produiront effectivement dans la construction.

C'est seulement depuis peu de temps que nous pouvons, dans chaque cas particulier, calculer avec une remarquable exactitude les valeurs de ces déformations plastiques, et nous assurer que le matériau peut les supporter sans danger.

Mais c'est là une raison de plus pour rendre hommage à ceux qui, par leur heureuse intuition, nous ont indiqué la route, en nous donnant la démonstration anticipée de nos théories dans des constructions admirables, dont la stabilité — très douteuse selon les méthodes ordinaires du calcul du béton armé — a été mise hors de doute par les bonnes conditions dans lesquelles elles se trouvent après tant d'années d'existence et de résistance à l'action des charges.

VI. Le cas du béton armé.

J'ai dit que nous avons désormais la possibilité de rendre rationnel le choix de l'état effectif d'équilibre parmi tous les états équilibrés, c'est-à-dire satisfaisant aux équations générales de la statique classique.

Et, en effet, nous avons précisé de quelle manière l'état effectif d'équilibre pouvait être caractérisé en fonction de la sollicitation extérieure et des déformations plastiques.

Dans le cas du béton armé, l'application de notre méthode ne présente pas de difficultés particulières.

Il faut seulement préciser, une fois pour toutes, quelles sont les propriétés qui caractérisent ce matériau au point de vue de son passage de l'état élastique à l'état plastique.

Or, quand on essaie des prismes de béton à la traction ou à la compression, on trouve que la relation entre les tensions unitaires et les déformations unitaires correspondantes, peut se traduire graphiquement par un diagramme analogue à celui qui est représenté dans la figure 18.

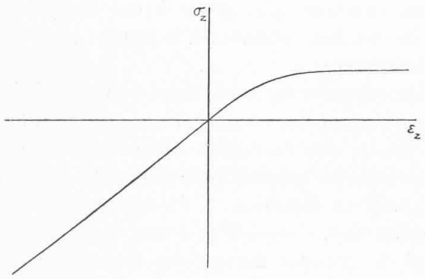

Fig. 18.

Ce diagramme a été tracé en portant les tensions en ordonnées (positivement vers le haut) et les déformations en abscisses (positivement vers la droite).

La branche de courbe qui se rapporte à des tensions négatives (compressions) peut, dans un intervalle assez grand, et avec une bonne approximation, se confondre avec une droite issue de l'origine.

Par contre, celle qui correspond à des tensions positives (tractions) bien que partant de l'origine avec la même inclinaison que l'autre, présente très vite, c'est-à-dire pour des valeurs encore très faibles de la sollicitation, une déviation nettement marquée ; elle prend ainsi une allure sensiblement parallèle à l'axe des déformations.

Si le béton n'était pas armé, cette dernière phase du phénomène serait à peine marquée, parce que l'on arriverait bientôt à la rupture. Mais si le prisme est convenablement armé, le béton devient capable de subir, avant de se rompre, des déformations bien plus grandes, et cette phase devient, comme la précédente, très facile à observer.

Si l'on se propose alors de schématiser le phénomène, le plus naturel est de le représenter, d'une manière approchée, par une ligne brisée à deux côtés. Le premier côté, droite passant par l'origine des axes, représentera la phase élastique du phénomène et comprendra donc, dans les conditions usuelles, toutes les tensions négatives et les tensions positives inférieures à une limite bien déterminée. Le second côté, droite parallèle à l'axe des déformations, et qui traduit donc des déformations croissant indéfiniment sous charge constante, représentera la phase plastique du phénomène.

Naturellement le point d'intersection des deux côtés coïncidera avec ce qu'on nomme habituellement la limite d'élasticité du matériau à la traction.

* * *

Allons maintenant un peu plus loin, et imaginons qu'un prisme de béton, convenablement armé, soit soumis à un moment fléchissant simple ou combiné à une traction ou à une compression.

Théorie et expérience sont parfaitement d'accord pour affirmer que la loi de la conservation des sections planes est dans ce cas vérifiée.

Cela revient à dire que si l'on porte en abscisses les distances à l'axe neutre des divers éléments d'une section droite, et si l'on porte en ordonnées les déformations totales correspondantes, on obtient, comme diagramme, une droite passant par l'origine.

Mais, par suite de ce que nous venons de dire, un tel diagramme peut, par un simple changement d'échelle, être interprété comme diagramme des tensions dans toute la portion de la section qui se trouve en régime élastique.

Dans la portion restante, qui se trouve en régime plastique, les tensions doivent évidemment se conserver constantes.

On voit donc réapparaître la ligne brisée à deux côtés dont nous avons déjà parlé (fig. 19) comme diagramme d'ensemble des tensions.

Si l'on revient alors de l'échelle des tensions à celle des déformations, on pourra considérer cette même ligne brisée

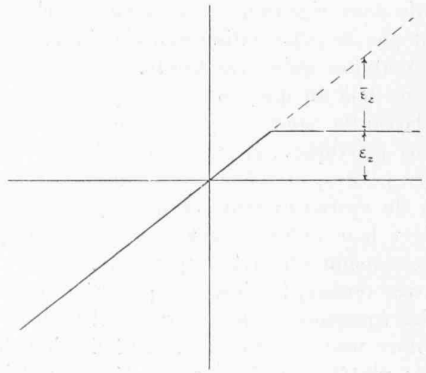

Fig. 19.

comme la ligne représentative des déformations élastiques ϵ_e, puisque celles-ci sont toujours, par définition, proportionnelles aux tensions. D'autre part, l'aire triangulaire restante, comprise entre les deux côtés de la ligne brisée dans la région en régime plastique, pourra s'interpréter comme diagramme des déformations plastiques $\overline{\epsilon_e}$.

Naturellement, puisque le béton est armé, la section métallique doit, dans les conditions normales de charge, être considérée comme faisant partie de la portion de la section qui se trouve en régime élastique.

Pour l'armature, seul le premier côté de la ligne brisée est donc valable, puisque sa déformation est partout élastique. C'est donc exclusivement sur le premier côté de la ligne brisée que l'on devra lire les tensions dans les armatures, et cela naturellement à l'échelle qu'implique la différente valeur du module d'élasticité.

* * *

Avec ces simples prémisses, la solution du problème est, dans chaque cas particulier, complètement définie.

Commençons par le cas le plus général d'une flexion combinée à une extension (positive ou négative).

Supposons donc connu l'effort normal N appliqué à la section, ainsi que son point d'application C, dit centre de pression, situé sur l'un des axes principaux centraux d'inertie. Pour plus de simplicité, nous supposerons que cet axe soit un axe de symétrie pour la section (fig. 20).

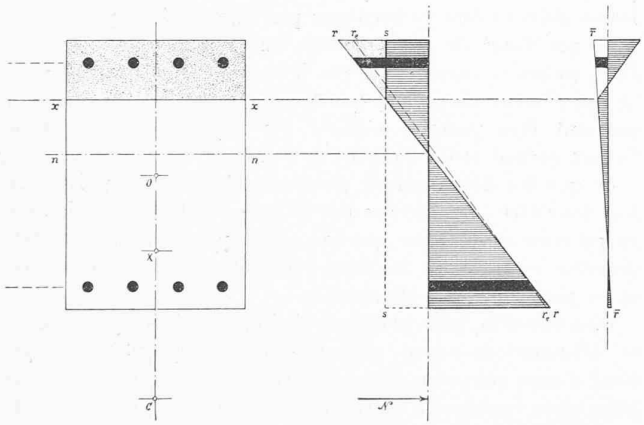

Fig. 20.

Admettons que la sollicitation ainsi définie détermine dans le béton des tensions positives dépassant la limite d'élasticité de ce matériau, et que, par conséquent, elle donne naissance à des déformations plastiques.

Il faut d'abord délimiter la région où ces déformations plastiques se produisent ; plus précisément, il faut trouver la position de la droite qui sépare la portion de la section en régime élastique de celle qui se trouve en régime plastique.

Or, nous avons dit que, dans cette dernière région, les tensions doivent être constantes et égales à la limite d'élasticité du matériau à la traction.

Si donc, suivant un artifice que nous avons déjà signalé, on imagine de superposer à l'état de tension inconnu, que nous sommes en train d'étudier, une distribution auxiliaire de tensions uniformément réparties sur toute la section, avec une intensité justement égale à celle de cette limite changée de signe, la tension résultante devra s'annuler sur toute la zone en régime plastique.

Sur la portion en régime élastique, on aura par contre une distribution linéaire de tensions, avec une intensité, sur chaque élément d'aire, proportionnelle à la distance de cet élément à la droite de séparation.

Mais cette distribution de tensions doit avoir pour résultante la résultante de la sollicitation extérieure appliquée en C et de la distribution auxiliaire qui équivaut évidemment à une force connue appliquée au centre de gravité de la section.

Le point d'application X de cette résultante, que nous savons donc immédiatement déterminer, devra coincider avec le centre de gravité des moments statiques, c'est-à-dire avec l'antipole de la droite de séparation par rapport à l'ellipse centrale d'inertie de la portion de section, limitée par cette même droite, qui se trouve en régime élastique.

Ceci permet la détermination immédiate de la position de l'axe de séparation par des méthodes graphiques que nous avons déjà indiquées et sur lesquelles nous ne nous arrêterons donc plus.

Après avoir délimité la région en régime élastique, on calculera la valeur moyenne de la tension. Du fait que cette valeur doit coïncider avec la valeur locale en correspondance du centre de gravité de la même région, on déduira la position du premier côté *rr* de la ligne brisée par rapport au deuxième côté *ss* dont la position — par rapport à la droite de référence du diagramme — est connue dès qu'a été fixée la limite d'élasticité à la traction du béton.

En même temps se trouve déterminée la position de l'axe neutre *nn*.

Si l'on annule alors la sollicitation auxiliaire, et si l'on considère la ligne brisée comme directement rapportée à la droite de référence, on a aussitôt tous les diagrammes qui peuvent nous intéresser : celui des déformations élastiques (hachuré) qui est aussi celui des tensions dans le béton ; celui des déformations et des tensions dans les armatures (représenté par des traits de force) ; enfin celui des déformations plastiques dans le béton (triangle pointillé).

Il ressort de ces diagrammes que la limitation imposée aux valeurs positives des déformations élastiques, et donc aussi des tensions, dans le béton, est accompagnée nécessairement par un déplacement plus ou moins accentué de l'axe neutre vers le bord comprimé de la section, et en même temps par une augmentation appréciable de la valeur maximum, négative, de la tension unitaire sur ce bord.

Ces trois faits — à savoir : la réduction de la tension maximum positive dans le béton ; l'augmensation de la tension maximum négative ; le déplacement de l'axe neutre vers le bord comprimé — ont depuis longtemps été mis en évidence expérimentalement.

Bach et Graf les avaient observés bien avant que l'on fût en état d'en donner une explication rationnelle. Et leurs expériences constituent la plus belle et la plus sûre preuve de la fidélité avec laquelle nos déductions théoriques reflètent et interprètent les faits.

* * *

La ligne brisée dont nous venons de parler, rapportée à la droite $r_e\, r_e$ qui limite le diagramme des déformations élastiques, et donc aussi des tensions, dans l'hypothèse de la parfaite élasticité, nous donne le diagramme des déformations élastiques résiduelles, et donc aussi des tensions résiduelles, quand la sollicitation extérieure s'annule.

Ce diagramme a été reproduit à droite dans notre figure 20.

Il nous offre une représentation très suggestive de l'état de coaction que les déformations plastiques ont déterminé dans la poutre.

On y remarque l'inversion caractéristique du signe des déformations élastiques, et donc aussi des tensions, qui se

manifeste dans le béton quand cesse la sollicitation extérieure, et cela précisément aux endroits où le béton a subi les plus grandes déformations plastiques.

Par contre, dans le fer, qui s'est maintenu élastique même quand il a dû absorber de plus grandes tensions, subsiste un état de tension résiduel.

Ce fait a été également confirmé par l'expérience ; bien plus, il avait été constaté depuis bien longtemps.

On peut rappeler à ce propos les premières expériences faites à Lausanne à la fin de l'année 1894 et réalisées en découvrant en certains points les barres de fer pour en relever directement les déformations par un appareil Frankel.

F. Schüle répéta ces expériences en 1902, à Zurich, avec encore plus de précision et en employant pour les mesures des déformations des appareils à miroir extrêmement sensibles.

On put ainsi mettre en évidence que, dans une poutre soumise à flexion, les fers de l'armature conservent une partie notable de la traction à laquelle ils ont été soumis, même quand la charge a été totalement enlevée.

C'est dans cet état de tension résiduel du fer, et dans le changement de signe des tensions dans le béton qui nécessairement l'accompagne, qu'il faut chercher l'explication du fait bien connu que, quand on rétablit la sollicitation extérieure, on ne constate plus aucune déformation plastique, et le matériau suit partout, d'une façon presque parfaite, les lois de l'élasticité.

* * *

Bien entendu, les cas où la sollicitation se réduit à un simple effort normal ou à un simple moment de flexion peuvent désormais se traiter comme des cas particuliers.

Il suffit évidemment que, dans le cas général, s'annule le moment de flexion ou bien que s'annule l'effort normal.

Dans le premier cas, le point d'application de l'effort vient coïncider avec le centre de gravité de la section, tandis que dans l'autre cas il s'éloigne à l'infini sur l'axe de sollicitation.

Il ne faut pas oublier cependant que, par opposition à ce qui se produit dans la théorie classique de l'élasticité, il n'est pas dit ici que l'on doive nécessairement tomber dans le premier, ou respectivement dans le second cas particulier du problème de de Saint-Venant.

On peut, en effet, démontrer que, pour que dans le cas de l'équilibre élasto-plastique on puisse parler d'extension simple ou de simple flexion, il ne suffit pas que la sollicitation se réduise à un effort normal (appliqué au centre de gravité) ou à un moment de flexion ; il faut aussi que les déformations plastiques vérifient respectivement la première et la deuxième des deux conditions suivantes

$$\int_A \overline{\epsilon_z}\, y\, dA = 0$$

$$\int_A \overline{\epsilon_z}\, dA = 0$$

Or, dans le cas du béton armé, ces deux conditions ne se trouvent presque jamais vérifiées ; cela parce que le béton de la zone tendue a atteint sa limite d'élasticité quand celui de la zone comprimée et le fer — où qu'il se trouve — se comportent encore comme parfaitement élastiques.

Il arrive ainsi que, bien qu'une seule des composantes de la sollicitation soit différente de zéro, l'état de déformation du prisme présente les caractéristiques de la combinaison d'une extension avec une flexion.

Plus précisément, il arrive que, à côté de la déformation élastique réduite soit à la seule extension

$$\frac{\mathfrak{N}}{EA}$$

soit à la seule flexion

$$\frac{\mathfrak{M}}{EJ}$$

coexistent une extension plastique

$$\overline{\lambda} = \frac{\int_A \overline{\epsilon_z}\, dA}{A}$$

et une flexion plastique

$$\overline{\mu} = \frac{\int_A \overline{\epsilon_z}\, y\, dA}{J}$$

qui ramènent le problème au cas composé.

* * *

C'est d'ailleurs précisément dans les problèmes les plus complexes qu'on peut le mieux juger de l'importance des considérations que nous venons d'exposer et des conséquences qui en découlent.

Prenons par exemple le problème classique de l'arc encastré.

Nous considérerons ce problème sous sa forme la plus simple, en supposant :

1° qu'aussi bien l'arc que les forces qui y sont appliquées admettent un plan vertical de symétrie, dans lequel nécessairement se trouvera l'axe géométrique ;

2° que l'arc soit également symétrique par rapport à un plan vertical normal au précédent, sans pour cela que les forces doivent être symétriques par rapport à ce plan ;

3° que l'état de tension, dans une section quelconque de l'arc, puisse se caractériser par la seule tension normale ; ou, ce qui revient au même, que les effets de l'effort tranchant puissent être partout négligés par rapport aux effets de l'effort normal et du moment de flexion ;

4° que les déformations plastiques éventuelles puissent à leur tour être caractérisées par la seule dilatation axiale ; ou, ce qui revient au même, que l'on puisse, par rapport aux effets de cette composante, négliger ceux des autres composantes, et en particulier des glissements.

Bien entendu, nous avons admis implicitement que tensions et déformations soient, comme d'usage, rapportées au système d'axes qui coïncident respectivement avec les deux axes principaux centraux d'inertie de la section, et avec la normale menée par son centre de gravité.

Les forces extérieures et les déplacements de leurs points d'application seront, au contraire, rapportés aux axes de l'ellipse des déplacements élastiques terminaux : axes principaux centraux d'inertie du système des poids élastiques selon Culmann.

En conséquence, nous adopterons comme inconnues hyperstatiques les deux composantes H et V, prises suivant ces deux axes, de la réaction de l'un des encastrements — par exemple de celui de gauche — et le moment M de cette même réaction, pris par rapport à l'origine, c'est-à-dire au centre de gravité élastique de l'arc.

Ceci posé — et avec toutes les réserves que comporte la théorie de Barré de Saint-Venant — l'expression dont, pour l'équilibre, on devra imposer le minimum, pourra, dans le cas particulier, s'écrire sous la forme

$$\int_s \frac{\mathfrak{N}^2\, ds}{2\, EA} + \int_s \frac{\mathfrak{M}^2\, ds}{2\, EJ} + \int_s \overline{\lambda}\, \mathfrak{N}\, ds + \int_s \overline{\mu}\, \mathfrak{M}\, ds$$

où les deux premiers termes représentent la valeur de l'énergie potentielle élastique, et le troisième celle du travail dû aux déformations plastiques.

Cette condition de minimum conduit tout de suite aux trois équations suivantes

$$\int_s \mathfrak{M}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial H}\frac{ds}{EA}+\int_s \mathfrak{M}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial H}\frac{ds}{EJ}+\int_s \bar{\lambda}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial H}ds+\int_s \bar{\mu}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial H}ds=0$$

$$\int_s \mathfrak{M}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial V}\frac{ds}{EA}+\int_s \mathfrak{M}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial V}\frac{ds}{EJ}+\int_s \bar{\lambda}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial V}ds+\int_s \bar{\mu}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial V}ds=0$$

$$\int_s \mathfrak{M}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial M}\frac{ds}{EA}+\int_s \mathfrak{M}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial M}\frac{ds}{EJ}+\int_s \bar{\lambda}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial M}ds+\int_s \bar{\mu}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial M}ds=0$$

Ces équations définissent l'état d'équilibre du système en fonction de la sollicitation extérieure et des déformations plastiques.

Elles le définissent même d'une manière très simple ; grâce au choix très particulier des axes de référence, chacune d'elles ne contient en effet qu'une seule des inconnues, et peut-être immédiatement résolue par rapport à cette inconnue.

Nous pouvons donc nous servir de ces équations pour rendre rationnel le choix de l'état effectif d'équilibre, parmi tous les états équilibrés, en le subordonnant à l'analyse des déformations plastiques.

Le problème peut ainsi se présenter sous deux aspects complètement différents.

Dans la première élaboration d'un projet — c'est-à-dire tant que les dimensions de la construction ne sont pas encore établies d'une manière définitive — rien ne nous empêche de nous placer justement au point de vue auquel je faisais allusion en rappelant les enseignements de M. Hennebique.

Si on attribue en effet aux inconnues hyperstatiques des valeurs arbitraires, les équations que je vous ai présentées peuvent être interprétées comme les conditions auxquelles doivent satisfaire les déformations plastiques — ou du moins leurs paramètres — pour que la configuration définie par ces valeurs devienne possible ; et l'ingénieur pourra en tenir compte pour proportionner la construction de manière que ces déformations se réalisent effectivement, tout en restant contenues dans les limites que le matériau peut supporter sans danger.

Quand, au contraire, on se propose de vérifier les conditions statiques d'une construction déjà réalisée — ou du moins déjà projetée, et donc parfaitement définie en toutes ses parties — les déformations plastiques doivent être, elles aussi, considérées comme parfaitement définies en fonction de l'état de tension, c'est-à-dire en fonction des valeurs des inconnues hyperstatiques.

Or, si l'on pouvait — et si l'on savait — exprimer sous forme simple la loi de dépendance des déformations plastiques des valeurs des inconnues hyperstatiques, le problème serait aussitôt ramené à la résolution des équations par rapport à ces inconnues. La situation serait tout à fait semblable à celle où l'on se trouve dans les applications ordinaires de la théorie classique de l'élasticité.

Mais cette loi est au contraire très complexe, quelquefois même impossible à traduire analytiquement d'une manière utilisable. En tout cas nous savons qu'elle n'est jamais linéaire.

Par conséquent, en pratique on est presque toujours forcé d'avoir recours à la méthode des approximations successives.

On constate cependant qu'un petit nombre de tâtonnements, s'ils sont bien conduits, suffit presque toujours pour préciser la solution du problème avec une approximation plus que suffisante pour les besoins et les exigences de la technique.

Quant aux résultats auxquels on parvient, ils sont souvent de la plus grande importance.

Un cas typique, à ce propos, est celui des arcs très surbaissés qui sont d'un usage courant dans la technique du béton armé.

Dans ces arcs, la courbe des pressions, définie par la théorie de l'élasticité pour les conditions de sollicitation les plus défavorables, prend souvent une allure du type représenté en pointillé dans la figure 21 ; elle s'éloigne fortement de la ligne

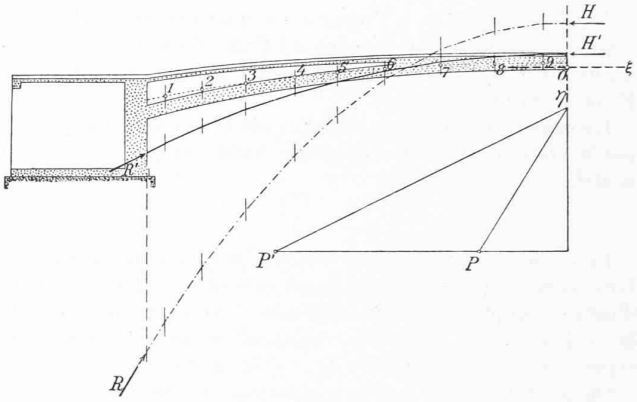

Fig. 21.

moyenne de l'arc aussi bien vers les appuis qu'au voisinage de la clé.

Cela revient à dire que les efforts dans le béton, dans les régions indiquées, devraient atteindre des valeurs très élevées, souvent inadmissibles, tandis que l'expérience est là pour prouver qu'aucun inconvénient ne se manifeste.

Or, à l'aide du théorème général que nous avons démontré, et des équations que nous en avons déduites, ces contradictions s'expliquent ; l'adaptation plastique des matériaux suffit pour déterminer une sorte de centrage spontané de la courbe des pressions.

Dans chaque cas particulier, on peut fixer les caractéristiques réelles du phénomène et préciser, en fonction des déformations plastiques, supposées choisies à l'avance, la nouvelle allure de la courbe des pressions — représentée en trait plein dans la même figure — et les valeurs correspondantes des efforts dans les différentes régions de l'arc.

Réciproquement, les mêmes équations peuvent être utilisées pour calculer les déformations plastiques qui doivent se produire dans le béton pour que puisse se réaliser une variation de l'état d'équilibre choisie au préalable.

Un tel résultat peut nous conduire à déterminer l'époque la mieux indiquée pour le décintrement, et les charges à imposer à la construction pendant que la plasticité du béton est encore considérable, en vue de se servir de cette plasticité pour réaliser une meilleure distribution de l'état de tension.

Le même résultat peut encore être d'une grande utilité à l'occasion des épreuves de charge. Il nous permettra d'interpréter les mesures des déformations permanentes et de nous faire une idée de leur importance au point de vue de l'état d'équilibre de la construction.

Les épreuves de charge acquièrent ainsi une signification toute nouvelle et une importance bien plus grande que celle qu'on leur a donnée dans le passé.

Il ne faudra plus se borner à vérifier les déformations permanentes dans le seul but de constater qu'elles ne dépassent pas une certaine fraction — fixée par les règlements — de la déformation élastique.

On pourra même être conduits à exiger qu'elles se manifestent dans une certaine mesure — prévue dans les calculs — afin d'être sûrs que la construction atteint l'état d'équilibre pour lequel elle a été conçue. *(A suivre).*