Calcul direct des tangentes doubles à la courbe s1+z1-1=0

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **24 (1888)**

Heft 99

PDF erstellt am: **29.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$a'_{11} < 0, \quad \delta = \begin{vmatrix} a'_{11}, & a'_{12} \\ a'_{21}, & a'_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a'_{11}, & a'_{12}, & a'_{13} \\ a'_{21}, & a'_{22}, & a'_{23} \\ a'_{31}, & a'_{32}, & a'_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

Or, les valeurs ci-dessus donnent effectivement

$$a'_{11} = -\frac{4}{5}\pi, \qquad \delta = +\frac{3}{5}\pi^2, \qquad \Delta = -\frac{2}{5}\pi^3.$$

D'ailleurs on voit aisément qu'on peut écrire directement

$$\sum_i \sum_k \alpha_i \alpha_k a'_{ik} = -\pi \left[\frac{4}{5}(\alpha_1 - \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{3}{4}\alpha_3)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{4}(\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3)^2 + \frac{2}{3}\alpha_3^2 \right].$$

Calcul direct des tangentes doubles à la courbe $s^4+z^4-1=0$.

Chaque fonction φ devient infiniment petite du premier ordre en quatre points de la surface T'. Il y en a 28 dont les zéros se confondent deux à deux. Les racines carrées de celles-ci ont été appelées par Riemann *fonctions abéliennes*. Ces 28 fonctions φ, égalées à zéro et interprétées géométriquement, représentent évidemment les tangentes doubles à la courbe $s^4 + z^4 - 1 = 0$. Il est du plus haut intérêt pour la suite de les connaître. Le procédé suivant va les fournir avec la plus grande facilité.

En exprimant s et z en fonction d'une troisième variable t à l'aide des formules

$$z = \sqrt{\cos t}, \qquad s = \sqrt{\sin t},$$

l'équation

$$(1) \qquad s^4 + z^4 - 1 = 0$$

est satisfaite identiquement pour chaque valeur de t. Mais il est avantageux d'introduire des coordonnées tangentielles u, v, moyennant les formules de transformation connues

$$u = -\frac{ds}{zds - sdz}, \quad v = \frac{dz}{zds - sdz}.$$

Il vient

$$u = -(\cos t)^{\frac{3}{2}}, \quad v = -(\sin t)^{\frac{3}{2}}.$$

L'élimination de t entre ces deux équations conduit ensuite à l'équation en coordonnées tangentielles de la courbe (1), soit

$$v^{\frac{4}{3}} + u^{\frac{4}{3}} - 1 = 0$$

qui, rendue rationnelle, prend la forme

$$(u^4 + v^4 - 1)^3 + 27u^4v^4 = 0.$$

Or, les coordonnées u, v d'une tangente double satisfont simultanément aux trois équations

$$f = (u^4 + v^4 - 1)^3 + 27u^4v^4 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 12(u^4 + v^4 - 1)^2u^3 + 4.27u^3v^4 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 12(u^4 + v^4 - 1)^2v^3 + 4.27u^4v^3 = 0$$

ou en supprimant dans les deux dernières équations les facteurs $12u^3$, $12v^3$

$$\alpha) \qquad (u^4 + v^4 - 1)^3 + 27u^4v^4 = 0,$$

$$\beta) \qquad (u^4 + v^4 - 1)^2 + 9v^4 = 0,$$

$$\gamma) \qquad (u^4 + v^4 - 1)^2 + 9u^4 = 0.$$

Les facteurs supprimés correspondent aux huit couples de racines

$$u = 0, \quad v = \sqrt[4]{1} = 1, -1, i, -i,$$

$$v = 0, \quad u = \sqrt[4]{1} = 1, -1, i, -i.$$

Par la comparaison des équations $\beta)$ et $\gamma)$ on trouve la relation $v^4 = u^4$ qui, introduite dans $\alpha)$ et $\beta)$, donne

$$(2u^4 - 1)^3 = -27u^8,$$
$$(2u^4 - 1)^2 = -9u^4,$$

d'où par division

$$2u^4 - 1 = 3u^4$$

ou encore

$$u^4 = -1.$$

Ainsi u peut aussi prendre les valeurs

$$u = e^{\frac{1}{4}\pi i}, \quad u = e^{-\frac{1}{4}\pi i}, \quad u = -e^{\frac{1}{4}\pi i}, \quad u = -e^{-\frac{1}{4}\pi i}.$$

En combinant chacune d'elles avec les quatre valeurs correspondantes de v, on obtient 16 autres couples de racines.

Pour déterminer enfin les quatre derniers couples il suffit de diviser α) par v^{12}, β) et γ) par v^8 :

$$\left[\left(\frac{u}{v}\right)^4 + 1 - \frac{1}{v^4}\right]^3 + \frac{27}{v^4}\left(\frac{u}{v}\right)^4 = 0,$$

$$\left[\left(\frac{u}{v}\right)^4 + 1 - \frac{1}{v^4}\right]^2 + \frac{9}{v^4} \qquad = 0,$$

$$\left[\left(\frac{u}{v}\right)^4 + 1 - \frac{1}{v^4}\right]^2 + \frac{9}{v^4}\left(\frac{u}{v}\right)^4 = 0$$

et l'on voit immédiatement que ces équations admettent les racines

$$v = \infty, \quad \frac{u}{v} = \pm\sqrt{\pm i}.$$

Si l'on pose pour abréger l'écriture

$$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \varepsilon, \quad \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \varepsilon',$$

de sorte que

$$\varepsilon\varepsilon' = 1, \ \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -i, \ \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = i, \ \frac{1}{\varepsilon'} = \varepsilon, \ \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon', \ \varepsilon^2 = i, \ \varepsilon'^2 = -i$$

on a maintenant les 28 couples de racines suivants

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
u & 0, & 0, & 0, & 0 & 1, & -1, & i, & -i & \varepsilon, & \varepsilon, & \varepsilon, & \varepsilon & -\varepsilon, & -\varepsilon, & -\varepsilon, & -\varepsilon \\
v & 1, & -1, & i, & -i & 0, & 0, & 0, & 0 & \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon', & -\varepsilon' & \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon', & -\varepsilon'
\end{array}$$

$$\begin{array}{|cccc|cccc|}
\varepsilon', & \varepsilon', & \varepsilon', & \varepsilon' & -\varepsilon', & -\varepsilon', & -\varepsilon', & -\varepsilon' \\
\varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon', & -\varepsilon' & \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon', & -\varepsilon'
\end{array}$$

$$v = \infty \left| \frac{u}{v} = \varepsilon, \ \frac{u}{v} = -\varepsilon, \ \frac{u}{v} = \varepsilon', \ \frac{u}{v} = -\varepsilon' \right|$$

En les substituant à tour de rôle dans l'équation

$$uz + vs + 1 = 0,$$

modifiée pour plus d'uniformité en

$$s + \frac{u}{v}z + \frac{1}{v} = 0,$$

on a finalement pour les 28 tangentes doubles à la courbe (1) les équations en coordonnées ponctuelles

$s+1=0$	$z+1=0$	$s+z+\varepsilon'=0$	$s-z+\varepsilon'=0$
$s-1=0$	$z-1=0$	$s-z-\varepsilon'=0$	$s+z-\varepsilon'=0$
$s-i=0$	$z-i=0$	$s+iz+\varepsilon=0$	$s-iz+\varepsilon=0$
$s+i=0$	$z+i=0$	$s-iz-\varepsilon=0$	$s+iz-\varepsilon=0$

$s-iz+\varepsilon'=0$	$s+iz+\varepsilon'=0$	$s+\varepsilon z=0$
$s+iz-\varepsilon'=0$	$s-iz-\varepsilon'=0$	$s-\varepsilon z=0$
$s+z+\varepsilon=0$	$s-z+\varepsilon=0$	$s+\varepsilon' z=0$
$s-z-\varepsilon=0$	$s+z-\varepsilon=0$	$s-\varepsilon' z=0$

Points de contact des tangentes doubles.

Dans la suite, on aura plus d'une fois besoin de connaître les points de contact des tangentes doubles, soit les zéros des fonctions abéliennes. Douze des 28 tangentes doubles dans l'exemple choisi présentent cette particularité que leurs deux points de contact se confondent, en sorte qu'elles forment un contact du 3e ordre avec la courbe $s^4+z^4-1=0$. Ce sont les suivantes :

Tangente.	Point de contact.	Nappe.
$s+1=0$	$z=0,\quad s=-1$	III
$s-1=0$	$z=0,\quad s=1$	I
$s-i=0$	$z=0,\quad s=i$	II
$s+i=0$	$z=0,\quad s=-i$	IV
$z+1=0$	$z=-1,\quad s=0$	Ds toutes les 4.
$z-1=0$	$z=1,\quad s=0$	
$z-i=0$	$z=i,\quad s=0$	
$z+i=0$	$z=-i,\quad s=0$	
$s+\varepsilon z=0$	A l'infini ds la direction $-135°$	III
$s-\varepsilon z=0$	» » $45°$	I
$s+\varepsilon' z=0$	» » $+135°$	II
$s-\varepsilon' z=0$	» » $-45°$	IV