Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier

Autor(en): **Amstein, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **24 (1888)**

Heft 99

PDF erstellt am: **14.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-261785

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles.
Vol. XXIV. N° 99. 1888.

FONCTIONS ABÉLIENNES DU GENRE 3

UN CAS PARTICULIER

PAR
H. AMSTEIN

Pl. VI à X.

Avec quelques-uns de mes camarades d'études, j'ai eu la bonne fortune de suivre un cours général sur la théorie des fonctions abéliennes que mon vénéré maître, M. H. Weber, a fait une seule fois, en 1875, à l'Ecole polytechnique fédérale à Zurich. Ce n'est que plusieurs années après que j'ai eu connaissance de son remarquable ouvrage intitulé : *Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht 3.* (Berlin, 1876, chez Georg Reimer.) A la page 4 de l'introduction, l'auteur s'exprime comme suit : « Es ist damit nicht ausgeschlossen, dass es ausser den hyperelliptischen Functionen noch andere besondere Fälle gibt, in denen die Verzweigungspunkte eine wichtige Rolle spielen. Es würde dies z. B. eintreten bei den Functionen, welche von der Gleichung $x^4 + y^4 + z^4 = 0$ abhängen, welche überhaupt, obwohl (oder vielleicht gerade weil) sie durch elliptische Functionen vollständig dargestellt werden können, ein interessantes Beispiel für unsere Theorie liefern würden. »

« *Cela n'exclut pas l'existence, en dehors des fonctions hyperelliptiques, d'autres cas particuliers, dans lesquels les points de ramification jouent un rôle important. Ce serait, par exemple, le cas des fonctions dépendant de l'équation* $x^4 + y^4 + z^4 = 0$, *qui fourniraient un exemple intéressant à l'appui de notre théorie, lors même que (ou peut-être justement parce que) elles peuvent être représentées complètement par des fonctions elliptiques.* »

Après avoir lu et relu cet ouvrage avec le plus vif intérêt, je me suis décidé à traiter l'exemple proposé. Chemin faisant, j'ai rencontré certaines difficultés, auxquelles il fallait d'ailleurs s'attendre, de sorte qu'il m'a paru que ce travail, entrepris dans l'unique but de me familiariser autant que possible avec une théorie plus ou moins ardue, pourrait rendre quelque service à

ceux qui ont l'intention d'aborder ces régions de la science. C'est dans cet espoir, qu'encouragé par quelques amis, j'ose soumettre le présent mémoire au public mathématique.

Je me représente un lecteur, en possession de la théorie des fonctions ϑ à trois variables et des caractéristiques à six éléments, et ayant devant lui l'ouvrage de M. Weber; à l'aide de ce travail, il lui sera aisé de suivre pas à pas l'ouvrage original.

Dans un second mémoire, je me propose de reprendre les problèmes fondamentaux de Jacobi et de Riemann, en ramenant ces questions sur le terrain des fonctions elliptiques.

Je saisis enfin cette occasion pour témoigner à mon vénéré maître toute ma gratitude de ce qu'il a bien voulu, à plusieurs reprises, s'intéresser aux efforts de son ancien élève.

Introduction.

L'équation qui sert de base à l'étude qu'on va entreprendre est la suivante :

$$x^4 + y^4 + z^4 = 0$$

ou

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4 + \left(\frac{z}{x}\right)^4 = 0.$$

Si l'on pose

$$\frac{y}{x} = z\sqrt{i}, \qquad i = \sqrt{-1}$$

et

$$\frac{z}{x} = s\sqrt{i},$$

elle prend la forme

$$(1) \qquad s^4 + z^4 - 1 = 0,$$

d'où

$$(1^a) \qquad s = \sqrt[4]{1 - z^4}.$$

On remarque tout d'abord que les variables s et z entrent d'une manière symétrique dans l'équation (1). Les relations entre s et z seront donc parfaitement connues lorsqu'on aura étudié s en fonction de z.

Si, en premier lieu, on attribue à s et z des valeurs réelles et que l'on rapporte ces variables à un système de coordonnées rectangulaires, en choisissant, par exemple, z comme abscisse et s comme ordonnée d'un point, l'équation (1) représente une courbe du 4^{me} degré, dépourvue de points doubles et qui, de ce fait, appartient au genre 3 (fig. 1, pl. VI). Cette courbe, évidemment symétrique par rapport aux deux axes, possède aux points $z=0$, $s=\pm 1$; $z=\pm 1$, $s=0$ des tangentes qui forment avec elle un contact de l'ordre 3. Ces droites ont quatre points infiniment voisins communs avec la courbe, et peuvent, par conséquent, être considérées comme des tangentes doubles dont les deux points de contact coïncident. Cette particularité, la seule qui mérite d'être signalée ici, se reconnaît aisément, si l'on développe s en série, ordonnée suivant les puissances croissantes de z, par exemple dans le voisinage du point $z=0$, $s=1$, ce qui donne

$$s-1=-\frac{1}{4}z^4\ldots$$

Mais si, d'une manière plus générale, on admet que z et s puissent prendre des valeurs aussi bien imaginaires que réelles, il faudra assigner aux points représentatifs de ces variables deux plans que l'on désignera par (z) et (s). Lorsque z parcourt une courbe quelconque dans son plan, le point représentatif de s, à son tour, parcourra une courbe dans le plan (s). D'après Gauss, on appelle volontiers cette dernière courbe l'*image* dont la première serait l'*original*. Le plan (z) se compose de quatre feuilles ou nappes superposées. Le plan (s), on l'a déjà reconnu, se trouve exactement dans les mêmes conditions. Pour établir les rapports qui existent entre les plans (z) et (s), il est utile d'étudier brièvement la représentation du plan (z) sur le plan (s) par l'intermédiaire de la fonction s. A cet effet, il suffit de considérer les courbes dans le plan (s) qui correspondent à un système de circonférences concentriques dans le plan (z) avec O comme centre commun.

Soit

$$(2)\qquad \begin{cases} z=x+yi=re^{\varphi i}, \\ s=\xi+\eta i=\varrho e^{\psi i}. \end{cases}$$

A l'aide de ces formules, l'équation (1^a) peut s'écrire

$$\varrho e^{\psi i}=\sqrt[4]{1-r^4e^{4\varphi i}},$$

d'où l'on tire

$$\varrho^4 (\cos 4\psi + i \sin 4\psi) = 1 - r^4 (\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi),$$

puis en séparant les parties réelles des parties imaginaires

$$\varrho^4 \cos 4\psi = 1 - r^4 \cos 4\varphi,$$
$$\varrho^4 \sin 4\psi = - r^4 \sin 4\varphi$$

et enfin

$$\begin{cases} \varrho = \sqrt[8]{1 - 2r^4 \cos 4\varphi + r^8}, \\ \cos 4\psi = \dfrac{1 - r^4 \cos 4\varphi}{\varrho^4}, \\ \sin 4\psi = - \dfrac{r^4 \sin 4\varphi}{\varrho^4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = \varrho \cos \psi, \\ \eta = \varrho \sin \psi. \end{cases}$$

Afin d'obtenir, par exemple, l'image de la circonférence dont l'équation en coordonnées polaires est $r = a$, on donnera, dans ces formules, à r la valeur constante a, et on fera varier φ de 0 à 2π. (Voir les fig. 2 et 3, pl. VII. Pour les construire, on s'est servi des valeurs $r = \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\sqrt[4]{15}, 1, \frac{1}{2}\sqrt[4]{17}, \sqrt[4]{2}, \frac{3}{2}$.)

A une valeur déterminée de z correspondent, en général, quatre valeurs différentes de s. Une fois pour toutes, on conviendra que selon la feuille dans laquelle se trouve le point représentatif de z, la fonction s prendra les valeurs suivantes :

Dans la 1re feuille $s = \sqrt[4]{1 - z^4}$, $s = +1$ pour $z = 0$,
» 2e » $s = i\sqrt[4]{1 - z^4}$, $s = +i$ » $z = 0$,
» 3e » $s = -\sqrt[4]{1 - z^4}$, $s = -1$ » $z = 0$,
» 4e » $s = -i\sqrt[4]{1 - z^4}$, $s = -i$ » $z = 0$.

Ces quatre valeurs se confondent pour $z = \pm 1$, $z = \pm i$. Il s'ensuit que ces quatre points sont des points de ramification pour la fonction s; ils satisfont, en effet, seuls aux deux équations

$$F(s, z) = s^4 + z^4 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 4s^3 = 0.$$

Chacun d'eux compte pour trois points de ramification simples, vu qu'en ces points, non-seulement deux, mais les quatre valeurs correspondantes de s coïncident. Ainsi, la fonction s possède douze points de ramification simples.

Pour transformer le plan (z) en une surface de Riemann, on peut appliquer les *lignes de passage* de différentes manières. Guidé par la représentation susmentionnée, on les conduira dans les quatre nappes, le long des axes coordonnés, de l'origine O jusqu'aux points $z = \pm 1$, $z = \pm i$, en reliant les quatre feuilles de la manière indiquée dans les fig. 4, 5 et 6, pl. VI. Les fig. 4 et 5 représentent des coupes à travers les quatre nappes, la première perpendiculaire à la ligne de passage $O + 1$, la dernière perpendiculaire à la ligne de passage $O + i$. L'œil de l'observateur se trouve au-dessus de la première feuille. Il va sans dire qu'on aurait pu ajouter encore deux figures analogues relatives aux lignes de passage $O - 1$ et $O - i$. Pour bien comprendre la fig. 6, on remarquera que les quatre circonférences devraient être superposées et se trouver chacune dans la nappe que lui assigne le chiffre inscrit dans la figure. Afin d'augmenter encore la clarté, on a mis en regard, le long des lignes de passage, dans les fig. 2 et 3, pl. VII, les chiffres qui indiquent le passage d'une feuille à l'autre. Ainsi, par exemple, le long de la ligne $O + 1$, le point z peut passer du bord positif de la première nappe au bord négatif de la quatrième, du bord positif de la deuxième nappe au bord négatif de la première, etc. Obéissant aux exigences de la représentation, la disposition des chiffres dans le plan (s) diffère de celle adoptée pour le plan (z).

Ceci posé, s pourra être considéré comme une fonction uniforme de z. On s'en convainc aisément à l'aide des fig. 2 et 3. En effet, si z parcourt le 1er quadrant d'une circonférence de rayon < 1, par exemple dans la 1re feuille, en partant du bord négatif de l'axe $O + 1$, le point s décrit un ovale complet. Lorsque z, après avoir franchi la ligne de passage $O + i$, décrit ensuite le second quadrant dans la quatrième nappe, le point s parcourra une seconde fois le même ovale. A la circonférence entière correspond donc quatre fois le même ovale. Dans le cas où z serait parti de la seconde nappe, le point s aurait décrit un autre ovale identique au premier, mais tourné contre celui-ci d'un angle de $+ 90°$. Et ainsi de suite.

Si le point z, tout en restant dans la première nappe, suit le bord positif de l'axe des X de 0 à $+ 1$, le point s longe le bord

positif de l'axe des Ξ de $+1$ à 0; mais au-delà du point $+1$, l'image de l'axe des X est la droite $\eta = \xi$ de $\xi = 0$ jusqu'à $\xi = +\infty$.

Pour une circonférence de rayon > 1, les lignes de passage perdent leur influence. Par conséquent, à une telle circonférence correspond uniformément une courbe fermée dans le plan (s). La circonférence $r = 1$ constitue le cas limite, en ce sens que la courbe correspondante dans le plan (s) peut être considérée indifféremment comme une courbe fermée ou comme l'ensemble de quatre ovales allongés se rencontrant en O.

Incidemment, on reconnaît aussi que la fonction s sert d'intermédiaire à la *représentation conforme* de l'extérieur du cercle des unités sur l'extérieur de la courbe

$$\varrho^4 = 2 \cos 4\psi$$

ou

$$(\xi^2 + \eta^2)^4 = 2\,(\xi^4 - 6\,\xi^2\eta^2 + \eta^4).$$

En vertu des lois qui régissent la représentation conforme, les tangentes principales à cette courbe au point quadruple $\xi = 0$, $\eta = 0$, doivent former avec l'axe positif des Ξ des angles de $\pm 22\frac{1}{2}^0$ et $\pm 67\frac{1}{2}^0$.

Intégrales de première espèce.

La surface de Riemann, T, qui accompagne la fonction s, se compose, on l'a vu, de quatre nappes superposées. Sa connexion est de l'ordre 7, c'est-à-dire qu'elle peut, moyennant six coupures, être transformée en une surface T′ à connexion simple. Dans l'intérieur de cette nouvelle surface T′, les intégrales de fonctions rationnelles de s et de z sont des fonctions uniformes de leurs limites supérieures. Le long des deux bords des coupures, elles prennent des valeurs dont la différence est en général finie, mais constante, et que l'on appelle les *modules de périodicité* de ces intégrales. Par là, ne sont pas exclues d'autres lignes à différence constante situées dans l'intérieur même de la surface. (Intégrales de 3^e espèce.)

On conviendra d'appeler positif le bord d'une coupure qui se trouve à gauche lorsqu'on la parcourt dans le sens positif, c'est-à-dire dans le sens des angles croissants. Ceci posé, on peut éta-

blir un *système normal de coupures* de la manière suivante: D'un point A de la surface, on mène une coupure qui ne partage pas la surface en plusieurs morceaux détachés et qui aboutit à un point de son propre parcours. Cette coupure peut être considérée comme une ligne fermée a_1, reliée au point A par une autre ligne c_1. D'un point du côté positif de a_1, on trace ensuite une autre coupure b_1 qui vient rejoindre son point initial, mais sur le bord négatif de a_1. De la même manière, toujours en partant du point A, on pourra mener encore deux autres couples de coupures. (Comp. W., p. 63.) Il va de soi, qu'à l'exception de $a_\nu b_\nu$, $a_\nu c_\nu$ qui se coupent en un point, jamais deux coupures ne doivent se croiser.

Dans le cas particulier qui fait l'objet de cette étude, une des manières possibles d'appliquer les coupures est celle indiquée dans la fig. 7, pl. VI, où les lignes noires pleines sont censées se trouver dans la première nappe, les lignes noires pointillées dans la deuxième, les lignes rouges dans la troisième, et enfin les lignes bleues dans la quatrième. Sans doute, la surface de Riemann T', ainsi obtenue, n'est pas la plus simple; mais d'une part elle a l'avantage d'être basée sur la surface T, adoptée déjà précédemment pour l'étude de la fonction s; d'autre part, il est à espérer que ce travail rendra d'autant plus de services au lecteur studieux que les intégrales à considérer exigeront plus de précautions.

Les intégrales de 1re espèce restent finies et continues dans toute l'étendue de la surface T', à l'exception des coupures dont les deux bords constituent la limite de la surface. Elles sont de la forme

$$w = \int \frac{\varphi(s,z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}\, dz,$$

ou bien

$$w = -\int \frac{\varphi(s,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}}\, ds \qquad \left(\text{puisque } \frac{dz}{\frac{\partial F}{\partial s}} = -\frac{ds}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right),$$

où $F = s^4 + z^4 - 1$ et $\varphi(s,z)$ signifie une fonction entière et rationnelle de s et de z qu'il s'agit de déterminer.

En admettant que $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ reste finie pour toutes les valeurs finies de x, on sait que $\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$ conserve aussi une valeur finie, si la fonction $f(x)$ pour $x = \infty$ tend vers zéro d'un ordre supérieur au premier. Or, dans l'intégrale

$$w = \int \frac{\varphi\,dz}{4s^3}$$

la fonction $s = \sqrt[4]{1 - z^4}$ devient infinie du 1er ordre et, partant, s^3 du 3e ordre pour $z = \infty$. Il s'ensuit que la variable s (et pour des raisons analogues aussi la variable z) entre dans la fonction φ tout au plus au 1er degré. Les points de ramification $z = \pm 1$, $z = \pm i$ ne produisent pas de discontinuité. On peut donc poser

$$\varphi = A + Bz + Cs.$$

En disposant des constantes A, B, C de sorte que φ s'annule en deux points arbitraires, on peut obtenir trois fonctions φ différentes entre lesquelles il n'existe pas d'équation linéaire et homogène. Par contre, il est aisé de démontrer qu'entre quatre de ces fonctions, il existe nécessairement une équation linéaire et homogène, à coefficients constants *.

Soient maintenant φ_1, φ_2, φ_3 les trois fonctions en question, satisfaisant à la condition de s'annuler

$$\varphi_1 \text{ pour } \begin{cases} s = \infty, & z = 0 \\ s = 0, & z = \infty \end{cases}, \quad \text{d'où } B = C = 0 \text{ et } \varphi_1 = A,$$

$$\varphi_2 \text{ pour } \begin{cases} s = 0, & z = 0 \\ s = 1, & z = 0 \end{cases}, \quad \text{d'où } A = C = 0 \text{ et } \varphi_2 = Bz,$$

$$\varphi_3 \text{ pour } \begin{cases} s = 0, & z = 0 \\ s = 0, & z = 1 \end{cases}, \quad \text{d'où } A = B = 0 \text{ et } \varphi_3 = Cs.$$

* La géométrie analytique offre l'analogie suivante : Si $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 0$, $g_4 = 0$ sont les équations de quatre droites dans un plan, il est toujours possible d'établir l'identité $k_1 g_1 + k_2 g_2 + k_3 g_3 + k_4 g_4 = 0$, à moins que trois des droites données ne fassent partie d'un faisceau.

Abstraction faite de facteurs constants, les trois fonctions φ prennent la forme

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = z, \quad \varphi_3 = s$$

et les trois intégrales de première espèce sont

$$w_1 = \int \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}, \quad w_2 = \int \frac{zdz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}, \quad w_3 = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

dont la dernière est elliptique. (Comp. W., p. 47, et Riemann, *Gesammelte math. Werke*, p. 459.)

Avant de procéder à la détermination des modules de périodicité, il est utile d'étudier quelques intégrales dont on aura souvent besoin. Il a déjà été dit que $\sqrt[4]{1-z^4}$ prend les facteurs $+1, i, -1, -i$ suivant que z se trouve dans la 1re, 2e, 3e ou 4e nappe de la surface T'. Par conséquent, dans ces mêmes nappes, $\frac{1}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}$ sera affecté des facteurs $+1, i, -1, -i$, tandis que $\frac{1}{\sqrt{1-z^4}}$ prendra les facteurs $1, -1, 1, -1$.

Dans la suite, la nappe dans laquelle la variable d'intégration se meut, sera indiquée par un chiffre romain placé au-dessous du signe $\int$, et le signe $(+)$ ou $(-)$, appliqué en guise d'exposant au haut de la fonction à intégrer, fera connaître le bord le long duquel l'intégrale devra être prise.

Soient maintenant, dans la 1re nappe et prises le long du bord positif,

$$\int_{0\,\mathrm{I}}^{1} dw_1^{(+)} = \mathrm{K}_1, \quad \int_{0\,\mathrm{I}}^{1} dw_2^{(+)} = \mathrm{K}_2, \quad \int_{0\,\mathrm{I}}^{1} dw_3^{(+)} = \mathrm{K}_3;$$

conformément à la convention qui vient d'être rappelée, on aura alors évidemment

$$\int_{0\,\mathrm{II}}^{1} dw_1^{(+)} = i\mathrm{K}_1, \quad \int_{0\,\mathrm{II}}^{1} dw_2^{(+)} = i\mathrm{K}_2, \quad \int_{0\,\mathrm{II}}^{1} dw_3^{(+)} = -\mathrm{K}_3;$$

$$\int_{0\,\mathrm{III}}^{1} dw_1^{(+)} = -\mathrm{K}_1, \quad \int_{0\,\mathrm{III}}^{1} dw_2^{(+)} = -\mathrm{K}_2, \quad \int_{0\,\mathrm{III}}^{1} dw_3^{(+)} = \mathrm{K}_3;$$

$$\int_{0\,\mathrm{IV}}^{1} dw_1^{(+)} = -i\mathrm{K}_1, \quad \int_{0\,\mathrm{IV}}^{1} dw_2^{(+)} = -i\mathrm{K}_2, \quad \int_{0\,\mathrm{IV}}^{1} dw_3^{(+)} = -\mathrm{K}_3.$$

Dans ces intégrales, l'intervalle d'intégration s'étendait sur le bord positif de l'axe des X, de 0 à $+1$. Une rotation de $+90°$ autour de l'origine 0 le transporte sur le bord positif de l'axe des Y, et la variable z a passé respectivement de la 1re nappe à la 4e, de la 2e à la 1re, de la 3e à la 2e, et de la 4e à la 3e. L'équivalent analytique de cette opération est la substitution $z = it$, où t prend toutes les valeurs réelles de 0 à $+1$. Il s'ensuit que

$$\int_{\text{IV}}^{i} dw_1^{(+)} = i\int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt[4]{(1-t^4)^3}} = i\int_{\text{I}}^{1} dw_1^{(+)} = iK_1$$

et de même

$$\int_{\text{IV}}^{i} dw_2^{(+)} = -K_2, \quad \int_{\text{IV}}^{i} dw_3^{(+)} = iK_3;$$

$$\int_{\text{I}}^{i} dw_1^{(+)} = i\int_{\text{II}}^{1} dw_1^{(+)} = -K_1, \quad \int_{\text{II}}^{i} dw_1^{(+)} = i\int_{\text{III}}^{1} dw_1^{(+)} = -iK_1,$$

$$\int_{\text{III}}^{i} dw_1^{(+)} = i\int_{\text{IV}}^{1} dw_1^{(+)} = +K_1, \text{ etc.}$$

Si l'on fait faire à l'intervalle $0+1$ une rotation de $+180°$, son bord positif viendra se confondre entre 0 et -1 avec le bord positif de l'axe des X négatifs, et la variable z passera respectivment de la 1re nappe à la 3e, de la 2e à la 4e, de la 3e à la 1re et de la 4e à la 2e. A cette opération correspond la substitution $z = -t$, où t se meut de 0 à $+1$. On a, par conséquent,

$$\int_{\text{III}}^{-1} dw_1^{(+)} = -\int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt[4]{(1-t^4)^3}} = -\int_{\text{I}}^{1} dw_1^{(+)} = -K_1,$$

$$\int_{\text{III}}^{-1} dw_2^{(+)} = K_2, \quad \int_{\text{III}}^{-1} dw_3^{(+)} = -K_3;$$

$$\int_{\text{V}}^{-1} dw_1^{(+)} = -\int_{\text{II}}^{1} dw_1^{(+)} = -iK_1, \int_{\text{I}}^{-1} dw_1^{(+)} = -\int_{\text{III}}^{1} dw_1^{(+)} = K_1,$$

$$\int_{\text{II}}^{-1} dw_1^{(+)} = -\int_{\text{IV}}^{1} dw_1^{(+)} = iK_1, \text{ etc.}$$

D'une manière analogue, on peut obtenir les intégrales prises sur le bord positif de 0 à $-i$. En ce qui concerne les intégrales relatives aux bords négatifs, il suffit de tenir compte de la connexion des nappes le long des lignes de passage. Ainsi, par exemple, le long de la ligne de passage $0+1$, le bord négatif de la 1re nappe se rattache au bord positif de la 2e. On en conclut que

$$\int_{0\,\mathrm{I}}^{1} dw_1^{(-)} = \int_{0\,\mathrm{II}}^{1} dw_1^{(+)} = iK_1 ;$$

de même

$$\int_{0\,\mathrm{II}}^{1} dw_1^{(-)} = \int_{0\,\mathrm{III}}^{1} dw_1^{(+)} = -K_1 , \quad \int_{0\,\mathrm{III}}^{1} dw_1^{(-)} = \int_{0\,\mathrm{IV}}^{1} dw_1^{(+)} = -iK_1 ,$$

$$\int_{0\,\mathrm{IV}}^{1} dw_1^{(-)} = \int_{0\,\mathrm{I}}^{1} dw_1^{(+)} = K_1 , \text{ etc.}$$

Au lieu d'employer le procédé indiqué pour la détermination de ces intégrales rectilignes, on pourrait se servir avantageusement de la représentation au moyen des fonctions w_1, w_2, w_3. A cet effet, on remarquera les particularités suivantes : La fonction w_2 transforme les angles à l'origine en angles doubles. Autour des points singuliers $\pm 1, \pm i$ les angles de l'original sont réduits au quart par les fonctions w_1 et w_2 et à la moitié par la fonction w_3. En tout autre point, les angles correspondants de l'original et de son image sont égaux.

Pour plus de facilité, les valeurs des intégrales rectilignes relatives aux intervalles de 0 à ± 1 et de 0 à $\pm i$ sont réunies dans le tableau suivant (voir p. 12).

Détermination des modules de périodicité.

Soient $A_\nu^{(h)}$ et $B_\nu^{(h)}$ les modules de périodicité de w_h relatifs aux coupures a_ν et b_ν, c'est-à-dire

$A_\nu^{(h)} = w_h^{(+)} - w_h^{(-)}$ le long de la coupure a_ν et

$B_\nu^{(h)} = w_h^{(+)} - w_h^{(-)}$ le long de la coupure b_ν.

w_1

Nappe.	$\int_0^1$		$\int_0^i$		$\int_0^{-1}$		$\int_0^{-i}$	
	Bord pos.	Bord nég.	Bord pos.	Bord nég.	Bord pos.	Bord nég.	Bord pos.	Bord nég.
I	K_1	iK_1	$-K_1$	$-iK_1$	K_1	iK_1	$-K_1$	$-iK_1$
II	iK_1	$-K_1$	$-iK_1$	K_1	iK_1	$-K_1$	$-iK_1$	K_1
III	$-K_1$	$-iK_1$	K_1	iK_1	$-K_1$	$-iK_1$	K_1	iK_1
IV	$-iK_1$	K_1	iK_1	$-K_1$	$-iK_1$	K_1	iK_1	$-K_1$

w_2

I	K_2	iK_2	$-iK_2$	K_2	$-K_2$	$-iK_2$	iK_2	$-K_2$
II	iK_2	$-K_2$	K_2	iK_2	$-iK_2$	K_2	$-K_2$	$-iK_2$
III	$-K_2$	$-iK_2$	iK_2	$-K_2$	K_2	iK_2	$-iK_2$	K_2
IV	$-iK_2$	K_2	$-K_2$	$-iK_2$	iK_2	$-K_2$	K_2	iK_2

w_3

I	K_3	$-K_3$	$-iK_3$	iK_3	$-K_3$	K_3	iK_3	$-iK_3$
II	$-K_3$	K_3	iK_3	$-iK_3$	K_3	$-K_3$	$-iK_3$	iK_3
III	K_3	$-K_3$	$-iK_3$	iK_3	$-K_3$	K_3	iK_3	$-iK_3$
IV	$-K_3$	K_3	iK_3	$-iK_3$	K_3	$-K_3$	$-iK_3$	iK_3

La fig. 7, pl. VI, permet de reconnaître immédiatement que l'on a

$$A_\nu^{(h)} = \int_{(-b_\nu)} dw_h \quad \text{et} \quad B_\nu^{(h)} = \int_{(+a_\nu)} dw_h .$$

En d'autres termes, $A_\nu^{(h)}$ est égal à la valeur que prend $\int dw_h$, lorsque z parcourt le circuit entier b_ν dans le sens négatif, et $B_\nu^{(h)}$ la valeur de w_h qui résulte d'un parcours positif du circuit fermé a_ν. Pour faciliter le calcul de ces modules, on a, dans les fig. 8^a ... 8_f, pl. VIII, dessiné isolément les six coupures $a_\nu b_\nu$, en modifiant leur forme de façon qu'elles suivent, d'aussi près que

possible, les axes coordonnés, déformation permise en vertu d'un théorème bien connu de Cauchy. Il vient ainsi successivement

$$A_1^{(1)} = \int_{(-b_1)} dw_1 = \int_{\text{I}}^{i}_{0} dw_1^{(-)} + \int_{\text{I}}^{0}_{i} dw_1^{(+)} + \int_{\text{II}}^{-i}_{0} dw_1^{(-)} + \int_{\text{IV}}^{0}_{-i} dw_1^{(+)} = 2(1-i)K_1 \qquad \text{(Fig. 8}^a\text{.)}$$

$$A_2^{(1)} = \int_{(-b_2)} dw_1 = \int_{\text{IV}}^{i}_{0} dw_1^{(+)} + \int_{\text{III}}^{0}_{i} dw_1^{(+)} + \int_{\text{III}}^{1}_{0} dw_1^{(-)} + \int_{\text{IV}}^{0}_{1} dw_1^{(-)} = -2K_1 \qquad \text{(Fig. 8}^b\text{.)}$$

$$A_3^{(1)} = \int_{(-b_3)} dw_1 = \int_{\text{I}}^{i}_{0} dw_1^{(-)} + \int_{\text{I}}^{0}_{i} dw_1^{(+)} + \int_{\text{II}}^{-i}_{0} dw_1^{(-)} + \int_{\text{I}}^{0}_{-i} dw_1^{(+)} + \int_{\text{I}}^{-1}_{0} dw_1^{(-)} + \int_{\text{I}}^{0}_{-1} dw_1^{(+)} = 2K_1 \quad \text{(Fig.8}^c\text{.)}$$

$$B_1^{(1)} = \int_{(+a_1)} dw_1 = \int_{\text{I}}^{1}_{0} dw_1^{(+)} + \int_{\text{II}}^{0}_{1} dw_1^{(-)} + \int_{\text{I}}^{-1}_{0} dw_1^{(+)} + \int_{\text{II}}^{0}_{-1} dw_1^{(-)} = 4K_1 \qquad \text{(Fig. 8}^d\text{.)}$$

$$B_2^{(1)} = \int_{(+a_2)} dw_1 = \int_{\text{IV}}^{i}_{0} dw_1^{(-)} + \int_{\text{III}}^{0}_{i} dw_1^{(-)} + \int_{\text{III}}^{-1}_{0} dw_1^{(+)} + \int_{\text{IV}}^{0}_{-1} dw_1^{(+)} = -2K_1 \qquad \text{(Fig. 8}^e\text{.)}$$

$$B_3^{(1)} = \int_{(+a_3)} dw_1 = \int_{\text{II}}^{1}_{0} dw_1^{(+)} + \int_{\text{II}}^{0}_{1} dw_1^{(-)} + \int_{\text{II}}^{i}_{0} dw_1^{(+)} + \int_{\text{II}}^{0}_{i} dw_1^{(-)} + \int_{\text{I}}^{-i}_{0} dw_1^{(+)} + \int_{\text{II}}^{0}_{-i} dw_1^{(-)} = -2K_1 \quad \text{(Fig. 8}^f\text{.)}$$

Pour obtenir les douze modules relatifs aux intégrales w_2 et w_3, il suffit de remplacer dans les formules précédentes w_1 tour à tour par w_2 et w_3. Le tableau p. 12 fournit ensuite les valeurs désirées.

Résumé des modules de périodicité.

$$w_1$$

$$\begin{array}{l|l} A_1^{(1)} = 2(1-i)K_1 & B_1^{(1)} = 4K_1 \\ A_2^{(1)} = -2K_1 & B_2^{(1)} = -2K_1 \\ A_3^{(1)} = 2K_1 & B_3^{(1)} = -2K_1 \end{array}$$

$$w_2$$

$$\begin{array}{l|l} A_1^{(2)} = 0 & B_1^{(2)} = 0 \\ A_2^{(2)} = -2(1+i)K_2 & B_2^{(2)} = 2(1-i)K_2 \\ A_3^{(2)} = 2(1-i)K_2 & B_3^{(2)} = 2(1+i)K_2 \end{array}$$

$$w_3$$

$$\begin{array}{l|l} A_1^{(3)} = 4iK_3 & B_1^{(3)} = 0 \\ A_2^{(3)} = -2(1-i)K_3 & B_2^{(3)} = -2(1+i)K_3 \\ A_3^{(3)} = 2(1+i)K_3 & B_3^{(3)} = -2(1-i)K_3 \end{array}$$

Si l'on pose

$$A_h^{(k)} = \alpha_h^{(k)} + i\,\beta_h^{(k)},\quad B_h^{(k)} = \gamma_h^{(k)} + i\,\delta_h^{(k)},$$

on sait que pour chacune des trois intégrales on doit avoir $\sum_1^3(\beta_h\gamma_h - \alpha_h\delta_h) < 0$. Or, dans le cas actuel,

$$\begin{array}{l|l|l|l} \alpha_1^{(1)} = 2K_1 & \beta_1^{(1)} = -2K_1 & \gamma_1^{(1)} = 4K_1 & \delta_1^{(1)} = 0 \\ \alpha_2^{(1)} = -2K_1 & \beta_2^{(1)} = 0 & \gamma_2^{(1)} = -2K_1 & \delta_2^{(1)} = 0 \\ \alpha_3^{(1)} = 2K_1 & \beta_3^{(1)} = 0 & \gamma_3^{(1)} = -2K_1 & \delta_3^{(1)} = 0 \end{array}$$

d'où il suit

$$\Sigma(\beta\gamma - \alpha\delta) = -8K_1^2.$$

Pour w_2 et w_3 on obtient par un calcul analogue

$$\Sigma(\beta\gamma - \alpha\delta) = -16K_2^2, \qquad \Sigma(\beta\gamma - \alpha\delta) = -16K_3^2.$$

D'après Riemann, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)}, & A_1^{(2)}, & A_1^{(3)} \\ A_2^{(1)}, & A_2^{(2)}, & A_2^{(3)} \\ A_3^{(1)}, & A_3^{(2)}, & A_3^{(3)}, \end{vmatrix}$$

doit être différent de zéro. Cette condition essentielle est encore remplie, attendu que

$$\begin{vmatrix} 2(1-i)K_1, & 0, & 4iK_3 \\ -2K_1, & -2(1+i)K_2, & -2(1-i)K_3 \\ 2K_1, & 2(1-i)K_2, & 2(1+i)K_3 \end{vmatrix} = -32(2+i)K_1K_2K_3$$

Intégrales normales de première espèce.

Les intégrales de première espèce u_1, u_2, u_3 sont dites *normales* quand elles possèdent les modules de périodicité suivants :

Le long des coupures	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
modules de périodicité de u_1 :	πi	0	0	a_{11}	a_{12}	a_{13}
» » u_2 :	0	πi	0	a_{21}	a_{22}	a_{23}
» » u_3 :	0	0	πi	a_{31}	a_{32}	a_{33}.

Pour les former, il suffit de poser

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1^{(1)} w_1 + \alpha_2^{(1)} w_2 + \alpha_3^{(1)} w_3, \\ u_2 = \alpha_1^{(2)} w_1 + \alpha_2^{(2)} w_2 + \alpha_3^{(2)} w_3, \\ u_3 = \alpha_1^{(3)} w_1 + \alpha_2^{(3)} w_2 + \alpha_3^{(3)} w_3, \end{cases}$$

et de déterminer les 9 constantes $\alpha_k^{(i)}$ à l'aide des conditions

	u_1.
Coupure a_1	$\alpha_1^{(1)} A_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} A_1^{(2)} + \alpha_3^{(1)} A_1^{(3)} = \pi i$
» a_2	$\alpha_1^{(1)} A_2^{(1)} + \alpha_2^{(1)} A_2^{(2)} + \alpha_3^{(1)} A_2^{(3)} = 0$
» a_3	$\alpha_1^{(1)} A_3^{(1)} + \alpha_2^{(1)} A_3^{(2)} + \alpha_3^{(1)} A_3^{(3)} = 0$

u_2.

Coupure a_1	$\alpha_1^{(2)} A_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)} A_1^{(2)} + \alpha_3^{(2)} A_1^{(3)} = 0$
» a_2	$\alpha_1^{(2)} A_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} A_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} A_2^{(3)} = \pi i$
» a_3	$\alpha_1^{(2)} A_3^{(1)} + \alpha_2^{(2)} A_3^{(2)} + \alpha_3^{(2)} A_3^{(3)} = 0$

u_3.

Coupure a_1	$\alpha_1^{(3)} A_1^{(1)} + \alpha_2^{(3)} A_1^{(2)} + \alpha_3^{(3)} A_1^{(3)} = 0$
» a_2	$\alpha_1^{(3)} A_2^{(1)} + \alpha_2^{(3)} A_2^{(2)} + \alpha_3^{(3)} A_2^{(3)} = 0$
» a_3	$\alpha_1^{(3)} A_3^{(1)} + \alpha_2^{(3)} A_3^{(2)} + \alpha_3^{(3)} A_3^{(3)} = \pi i$

ce qui est possible, vu que le déterminant

$$D = \Sigma \pm A_1^{(1)} A_2^{(2)} A_3^{(3)} < 0.$$

De ces équations on tire successivement

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_2^{(2)} & A_2^{(3)} \\ A_3^{(2)} & A_3^{(3)} \end{vmatrix} = -\frac{2\pi(2-i)}{20 K_1},$$

$$\alpha_2^{(1)} = -\frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_2^{(1)} & A_2^{(3)} \\ A_3^{(1)} & A_3^{(3)} \end{vmatrix} = \frac{\pi(2-i)}{20 K_2},$$

$$\alpha_3^{(1)} = \frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \\ A_3^{(1)} & A_3^{(2)} \end{vmatrix} = \frac{\pi(2-i)}{20 K_3};$$

$$\alpha_1^{(2)} = -\frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(2)} & A_1^{(3)} \\ A_3^{(2)} & A_3^{(3)} \end{vmatrix} = \frac{\pi(1-3i)}{20 K_1},$$

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(3)} \\ A_3^{(1)} & A_3^{(3)} \end{vmatrix} = -\pi i \frac{1-3i}{20 K_2},$$

$$\alpha_3^{(2)} = -\frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} \\ A_3^{(1)} & A_3^{(2)} \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1+i)(1-3i)}{20 K_3};$$

$$\alpha_1^{(3)} = \frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(2)} & A_1^{(3)} \\ A_2^{(2)} & A_2^{(3)} \end{vmatrix} = \frac{\pi(3+i)}{20 K_1},$$

$$\alpha_2^{(3)} = -\frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(3)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(3)} \end{vmatrix} = -\pi \frac{(1-i)(3+i)}{20 K_2},$$

$$\alpha_3^{(3)} = \frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1+i)(3+i)}{20 K_3}.$$

Par conséquent les intégrales normales sont maintenant

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\pi(2-i)}{20}\left[-2\dfrac{w_1}{K_1} + \dfrac{w_2}{K_2} + \dfrac{w_3}{K_3}\right] \\ u_2 = \dfrac{\pi(1-3i)}{20}\left[\dfrac{w_1}{K_1} - i\dfrac{w_2}{K_2} + \dfrac{1+i}{2}\dfrac{w_3}{K_3}\right] \\ u_3 = \dfrac{\pi(3+i)}{20}\left[\dfrac{w_1}{K_1} - (1-i)\dfrac{w_2}{K_2} + \dfrac{1+i}{2}\dfrac{w_3}{K_3}\right] \end{cases}$$

Les modules a_{ik}.

Leur valeur est donnée par les équations

$$\begin{cases} a_{1h} = \dfrac{\pi(2-i)}{20}\left[-2\dfrac{B_h^{(1)}}{K_1} + \dfrac{B_h^{(2)}}{K_2} + \dfrac{B_h^{(3)}}{K_3}\right], \\ a_{2h} = \dfrac{\pi(1-3i)}{20}\left[\dfrac{B_h^{(1)}}{K_1} - i\dfrac{B_h^{(2)}}{K_2} + \dfrac{1+i}{2}\dfrac{B_h^{(3)}}{K_3}\right], \\ a_{3h} = \dfrac{\pi(3+i)}{20}\left[\dfrac{B_h^{(1)}}{K_1} - (1-i)\dfrac{B_h^{(2)}}{K_2} + \dfrac{1+i}{2}\dfrac{B_h^{(3)}}{K_3}\right], \quad h=1,2,3. \end{cases}$$

En effectuant ces calculs on trouve

$$a_{11} = -\frac{2}{5}\pi(2-i), \quad a_{12} = -\frac{1}{5}\pi i(3+i), \quad a_{13} = \frac{1}{5}\pi(3+i),$$

$$a_{21} = -\frac{1}{5}\pi i(3+i), \quad a_{22} = -\frac{2}{5}\pi(2-i), \quad a_{23} = -\frac{1}{5}\pi(2-i),$$

$$a_{31} = \frac{1}{5}\pi(3+i), \quad a_{32} = -\frac{1}{5}\pi(2-i), \quad a_{33} = -\frac{2}{5}\pi(3+i).$$

D'une part on constate que $a_{ik} = a_{ki}$, comme cela doit être d'après un théorème démontré par Riemann. D'autre part, pour que les fonctions ϑ qu'on peut former avec ces modules, existent, il est nécessaire que la forme quadratique $\sum_{i=1,2,3}\sum_{k=1,2,3} \alpha_i \alpha_k a'_{ik}$, où α_i, α_k parcourent tous les nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$ et a'_{ik} signifie la partie réelle du module a_{ik}, puisse être décomposée en une somme de trois carrés négatifs. A cet effet il suffit que l'on ait

$$a'_{11}<0,\quad \delta=\begin{vmatrix} a'_{11}, a'_{12} \\ a'_{21}, a'_{22}\end{vmatrix}>0,\quad \Delta=\begin{vmatrix} a'_{11}, a'_{12}, a'_{13} \\ a'_{21}, a'_{22}, a'_{23} \\ a'_{31}, a'_{32}, a'_{33}\end{vmatrix}<0.$$

Or, les valeurs ci-dessus donnent effectivement

$$a'_{11}=-\frac{4}{5}\pi,\qquad \delta=+\frac{3}{5}\pi^2,\qquad \Delta=-\frac{2}{5}\pi^3.$$

D'ailleurs on voit aisément qu'on peut écrire directement

$$\sum_i\sum_k \alpha_i\alpha_k a'_{ik}=-\pi\left[\frac{4}{5}(\alpha_1-\frac{1}{4}\alpha_2-\frac{3}{4}\alpha_3)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{4}(\alpha_2+\frac{1}{3}\alpha_3)^2+\frac{2}{3}\alpha_3^2\right].$$

Calcul direct des tangentes doubles à la courbe $s^4+z^4-1=0$.

Chaque fonction φ devient infiniment petite du premier ordre en quatre points de la surface T'. Il y en a 28 dont les zéros se confondent deux à deux. Les racines carrées de celles-ci ont été appelées par Riemann *fonctions abéliennes*. Ces 28 fonctions φ, égalées à zéro et interprétées géométriquement, représentent évidemment les tangentes doubles à la courbe $s^4+z^4-1=0$. Il est du plus haut intérêt pour la suite de les connaître. Le procédé suivant va les fournir avec la plus grande facilité.

En exprimant s et z en fonction d'une troisième variable t à l'aide des formules

$$z=\sqrt{\cos t},\qquad s=\sqrt{\sin t},$$

l'équation

(1) $$s^4+z^4-1=0$$

est satisfaite identiquement pour chaque valeur de t. Mais il est avantageux d'introduire des coordonnées tangentielles u, v, moyennant les formules de transformation connues

$$u=-\frac{ds}{zds-sdz},\quad v=\frac{dz}{zds-sdz}.$$

Il vient

$$u=-(\cos t)^{\frac{3}{2}},\quad v=-(\sin t)^{\frac{3}{2}}.$$

L'élimination de t entre ces deux équations conduit ensuite à l'équation en coordonnées tangentielles de la courbe (1), soit

$$v^{\frac{4}{3}} + u^{\frac{4}{3}} - 1 = 0$$

qui, rendue rationnelle, prend la forme

$$(u^4 + v^4 - 1)^3 + 27u^4v^4 = 0.$$

Or, les coordonnées u, v d'une tangente double satisfont simultanément aux trois équations

$$f = (u^4 + v^4 - 1)^3 + 27u^4v^4 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 12(u^4 + v^4 - 1)^2u^3 + 4.27u^3v^4 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 12(u^4 + v^4 - 1)^2v^3 + 4.27u^4v^3 = 0$$

ou en supprimant dans les deux dernières équations les facteurs $12u^3$, $12v^3$

$$\alpha) \qquad (u^4 + v^4 - 1)^3 + 27u^4v^4 = 0,$$

$$\beta) \qquad (u^4 + v^4 - 1)^2 + 9v^4 = 0,$$

$$\gamma) \qquad (u^4 + v^4 - 1)^2 + 9u^4 = 0.$$

Les facteurs supprimés correspondent aux huit couples de racines

$$u = 0, \quad v = \sqrt[4]{1} = 1, -1, i, -i,$$

$$v = 0, \quad u = \sqrt[4]{1} = 1, -1, i, -i.$$

Par la comparaison des équations $\beta)$ et $\gamma)$ on trouve la relation $v^4 = u^4$ qui, introduite dans $\alpha)$ et $\beta)$, donne

$$(2u^4 - 1)^3 = -27u^8,$$
$$(2u^4 - 1)^2 = -9u^4,$$

d'où par division

$$2u^4 - 1 = 3u^4$$

ou encore

$$u^4 = -1.$$

Ainsi u peut aussi prendre les valeurs

$$u = e^{\frac{1}{4}\pi i}, \quad u = e^{-\frac{1}{4}\pi i}, \quad u = -e^{\frac{1}{4}\pi i}, \quad u = -e^{-\frac{1}{4}\pi i}.$$

En combinant chacune d'elles avec les quatre valeurs correspondantes de v, on obtient 16 autres couples de racines.

Pour déterminer enfin les quatre derniers couples il suffit de diviser $\alpha)$ par v^{12}, $\beta)$ et $\gamma)$ par v^8 :

$$\left[\left(\frac{u}{v}\right)^4+1-\frac{1}{v^4}\right]^3+\frac{27}{v^4}\left(\frac{u}{v}\right)^4=0,$$

$$\left[\left(\frac{u}{v}\right)^4+1-\frac{1}{v^4}\right]^2+\frac{9}{v^4}\qquad=0,$$

$$\left[\left(\frac{u}{v}\right)^4+1-\frac{1}{v^4}\right]^2+\frac{9}{v^4}\left(\frac{u}{v}\right)^4=0$$

et l'on voit immédiatement que ces équations admettent les racines

$$v=\infty,\quad \frac{u}{v}=\pm\sqrt{\pm i}.$$

Si l'on pose pour abréger l'écriture

$$\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\varepsilon,\quad \sqrt{-i}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\varepsilon',$$

de sorte que

$$\varepsilon\varepsilon'=1,\ \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}=-i,\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=i,\ \frac{1}{\varepsilon'}=\varepsilon,\ \frac{1}{\varepsilon}=\varepsilon',\ \varepsilon^2=i,\ \varepsilon'^2=-i$$

on a maintenant les 28 couples de racines suivants

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
u & 0, & 0, 0, & 0 & 1, & -1, i, & -i & \varepsilon, & \varepsilon, \varepsilon, & \varepsilon & -\varepsilon, & -\varepsilon, -\varepsilon, & -\varepsilon \\
v & 1, & -1, i, & -i & 0, & 0, 0, & 0 & \varepsilon, & -\varepsilon, \varepsilon', & -\varepsilon' & \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon', -\varepsilon'
\end{array}$$

$$\begin{array}{|ccc|ccc|}
\varepsilon', & \varepsilon', \varepsilon', & \varepsilon' & -\varepsilon', & -\varepsilon', -\varepsilon', & -\varepsilon' \\
\varepsilon, & -\varepsilon, \varepsilon', & -\varepsilon' & \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon', -\varepsilon'
\end{array}$$

$$v=\infty\ \left|\ \frac{u}{v}=\varepsilon,\ \frac{u}{v}=-\varepsilon,\ \frac{u}{v}=\varepsilon',\ \frac{u}{v}=-\varepsilon'\ \right|$$

En les substituant à tour de rôle dans l'équation

$$uz+vs+1=0,$$

modifiée pour plus d'uniformité en

$$s+\frac{u}{v}z+\frac{1}{v}=0,$$

on a finalement pour les 28 tangentes doubles à la courbe (1) les équations en coordonnées ponctuelles

$$\begin{array}{|l|l|l|l|}
s+1=0 & z+1=0 & s+z+\varepsilon'=0 & s-z+\varepsilon'=0 \\
s-1=0 & z-1=0 & s-z-\varepsilon'=0 & s+z-\varepsilon'=0 \\
s-i=0 & z-i=0 & s+iz+\varepsilon=0 & s-iz+\varepsilon=0 \\
s+i=0 & z+i=0 & s-iz-\varepsilon=0 & s+iz-\varepsilon=0
\end{array}$$

$$\begin{array}{|l|l|l|}
s-iz+\varepsilon'=0 & s+iz+\varepsilon'=0 & s+\varepsilon z=0 \\
s+iz-\varepsilon'=0 & s-iz-\varepsilon'=0 & s-\varepsilon z=0 \\
s+z+\varepsilon=0 & s-z+\varepsilon=0 & s+\varepsilon' z=0 \\
s-z-\varepsilon=0 & s+z-\varepsilon=0 & s-\varepsilon' z=0
\end{array}$$

Points de contact des tangentes doubles.

Dans la suite, on aura plus d'une fois besoin de connaître les points de contact des tangentes doubles, soit les zéros des fonctions abéliennes. Douze des 28 tangentes doubles dans l'exemple choisi présentent cette particularité que leurs deux points de contact se confondent, en sorte qu'elles forment un contact du 3e ordre avec la courbe $s^4+z^4-1=0$. Ce sont les suivantes :

Tangente.	Point de contact.	Nappe.
$s+1=0$	$z=0,\quad s=-1$	III
$s-1=0$	$z=0,\quad s=1$	I
$s-i=0$	$z=0,\quad s=i$	II
$s+i=0$	$z=0,\quad s=-i$	IV
$z+1=0$	$z=-1,\quad s=0$	D^s toutes les 4.
$z-1=0$	$z=1,\quad s=0$	
$z-i=0$	$z=i,\quad s=0$	
$z+i=0$	$z=-i,\quad s=0$	
$s+\varepsilon z=0$	A l'infini d^s la direction $-135°$	III
$s-\varepsilon z=0$	» » $45°$	I
$s+\varepsilon' z=0$	» » $+135°$	II
$s-\varepsilon' z=0$	» » $-45°$	IV

Seuls les quatre derniers cas demandent une petite explication. Soit à déterminer la nappe dans laquelle se trouve le point de contact par exemple de la tangente

$$s + \varepsilon z = 0.$$

D'après cette équation, si z parcourt l'axe réel de $+1$ à $+\infty$, s décrira la droite $\eta = \xi$ de $\xi = \eta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ à $\xi = \eta = -\infty$. Cette correspondance, on l'a déjà vu, n'a lieu que dans la 3e nappe.

En ce qui concerne les 16 autres tangentes doubles, on peut procéder de la manière suivante. Soit, par exemple, à déterminer les points de contact de la tangente

$$s + z + \varepsilon' = 0.$$

De cette équation on tire

$$s = -(z + \varepsilon').$$

Cette valeur de s introduite dans l'équation $s^4 + z^4 - 1 = 0$, il vient

$$(z + \varepsilon')^4 + z^4 - 1 = 0$$

ou bien, en développant et en supprimant le facteur 2,

$$z^4 + 2\varepsilon' z^3 - 3iz^2 - 2\varepsilon z - 1 = 0.$$

Or, si l'on désigne par z_1 et z_2 les racines doubles de cette équation, on doit avoir identiquement

$$z^4 + 2\varepsilon' z^3 - 3iz^2 - 2\varepsilon z - 1 = (z - z_1)^2 (z - z_2)^2 =$$

$$= z^4 - 2(z_1 + z_2) z^3 + (z_1^2 + 4z_1 z_2 + z_2^2) z^2 - 2z_1 z_2 (z_1 + z_2) z + z_1^2 z_2^2.$$

La comparaison des coefficients qu'affectent de part et d'autre les mêmes puissances de z, fournit ensuite les égalités

$$\alpha) \qquad z_1 + z_2 = -\varepsilon',$$

$$\beta) \qquad z_1^2 + 4z_1 z_2 + z_2^2 = -3i,$$

$$\gamma) \qquad z_1 z_2 (z_1 + z_2) = \varepsilon,$$

$$\delta) \qquad z_1^2 z_2^2 = -1,$$

dont on tire, en divisant $\gamma)$ par $\alpha)$

$$z_1 z_2 = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = -i.$$

Connaissant maintenant la somme et le produit des quantités z_1 et z_2, on obtient celles-ci en résolvant l'équation quadratique

$$z^2 + \varepsilon' z - i = 0$$

dont les racines sont

$$z_1 = \varepsilon' \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$z_2 = \varepsilon' \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Mais

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -e^{-\frac{1}{3}\pi i} = e^{\frac{2}{3}\pi i},$$

$$\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -e^{\frac{1}{3}\pi i} = e^{-\frac{2}{3}\pi i} \quad \text{et} \quad \varepsilon' = e^{-\frac{1}{4}\pi i};$$

on peut donc donner à z_1 et z_2 la forme

$$z_1 = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\, e^{\frac{2}{3}\pi i} = e^{\frac{5}{12}\pi i},$$

$$z_2 = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\, e^{-\frac{2}{3}\pi i} = e^{-\frac{11}{12}\pi i}.$$

Ces valeurs vérifient les quatre équations $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$. Les valeurs correspondantes de s sont

$$s_1 = -(z_1 + \varepsilon') = -\left(e^{\frac{5}{12}\pi i} + e^{-\frac{1}{4}\pi i}\right) = -\left(e^{\frac{5}{12}\pi i} + e^{-\frac{3}{12}\pi i}\right) =$$

$$= -e^{\frac{1}{12}\pi i}\left(e^{\frac{4}{12}\pi i} + e^{-\frac{4}{12}\pi i}\right) = -e^{\frac{1}{12}\pi i}\left(e^{\frac{1}{3}\pi i} + e^{-\frac{1}{3}\pi i}\right) =$$

$$= -e^{\frac{1}{12}\pi} = e^{-\frac{11}{12}\pi i},$$

$$s_2 = -(z_2 + \varepsilon') = -\left(e^{-\frac{11}{12}\pi i} + e^{-\frac{3}{12}\pi i}\right) =$$

$$= -e^{-\frac{7}{12}\pi i}\left(e^{-\frac{1}{3}\pi i} + e^{\frac{1}{3}\pi i}\right) = -e^{-\frac{7}{12}\pi i} = e^{\frac{5}{12}\pi i}.$$

Ainsi les points de contact de la tangente considérée sont donnés par

$$z_1 = e^{\frac{5}{12}\pi i}, \quad s_1 = e^{-\frac{11}{12}\pi i},$$

$$z_2 = e^{-\frac{11}{12}\pi i}, \quad s_2 = e^{\frac{5}{12}\pi i},$$

Reste à savoir dans quelles nappes de la surface T′ ces points se trouvent. A cet effet, on remarque aisément, à l'aide des fig. 2 et 3, que si $z_1 = e^{\frac{5}{12}\pi i}$ était pris dans la 1re nappe, la valeur correspondante de s serait $s = e^{\frac{7}{12}\pi i}$. Or,

$$s_1 = is = e^{\frac{6}{12}\pi i}\, e^{\frac{7}{12}\pi i} = e^{\frac{13}{12}\pi i} = e^{-\frac{11}{12}\pi i}.$$

Il s'ensuit que le point z_1 est situé dans la 2e nappe. D'une manière analogue, on reconnaît que le point z_2 se trouve dans la 3e nappe.

Plus loin, lorsque cette étude sera un peu plus avancée, tout ce qui concerne les 28 fonctions abéliennes sera réuni dans un tableau. Incidemment, on peut constater dès à présent que leurs 56 zéros se répartissent également sur les quatre nappes de la surface T′.

Fonctions abéliennes correspondant à un système complet de caractéristiques impaires.

La théorie des caractéristiques, traitée complètement dans l'ouvrage de M. Weber (p. 17 à 33), est supposée connue. A chaque tangente double on peut adjoindre une des 28 caractéristiques impaires. Une caractéristique paire quelconque (p) est accompagnée de 8 systèmes complets de 7 caractéristiques impaires. Les tangentes doubles répondant à un tel système se distinguent par la propriété que jamais les six points de contact de trois d'entre elles ne sont situés sur une conique. Dans la théorie générale, on a la facilité d'attribuer à ces tangentes un système complet quelconque de caractéristiques impaires. Il n'en est plus de même lorsque l'équation de la courbe du 4e degré et ses 28 tangentes doubles sont connues et que l'on a fait choix de la surface T′. Dans ce cas, la difficulté essentielle consiste précisément à trouver 7 tangentes doubles et leurs caractéristiques satisfaisant à la condition indiquée. Ce problème résolu,

les caractéristiques des 21 autres tangentes doubles sont données par la théorie générale. Voici de quelle manière on peut arriver à la solution désirée. (Comp. Riemann, p. 460 et suiv.)

D'après Riemann et Weber (p. 82), il est possible de mettre l'équation de la courbe du 4e degré sous la forme

$$f^2 - x_1\xi_1 x_2\xi_2 = 0,$$

$f=0$ désignant l'équation d'une conique, et $x_1=0$, $\xi_1=0$, $x_2=0$, $\xi_2=0$, exprimées en fonction des coordonnées z et s, celles de quatre tangentes doubles à la courbe proposée, telles que leurs points de contact se trouvent sur la conique $f=0$. Or,

$$s-1=0, \quad s+1=0, \quad z-1=0, \quad z+1=0$$

représentent évidemment quatre tangentes doubles dont les points de contact sont situés sur la circonférence

$$s^2+z^2-1=0.$$

Par conséquent, l'équation $s^4+z^4-1=0$ peut prendre la forme

$$(s^2+z^2-1)^2-2(s^2-1)(z^2-1)=0.$$

Il existe six couples de tangentes doubles pour lesquels la somme des caractéristiques est la même et qui, de ce fait, constituent un groupe. Si l'on considère, par exemple,

$$s-1=0,\ s+1=0; \quad z-1=0,\ z+1=0$$

comme deux couples d'un groupe, il est intéressant de chercher les quatre autres couples du même groupe. A cet effet, il est aisé de voir que l'équation

$$\alpha^2(s^2-1)+\alpha(s^2+z^2-1)+\frac{1}{2}(z^2-1)=0,$$

où α signifie un paramètre variable, représente une conique qui touche la courbe du 4e degré en quatre points. Toutes les fois que cette conique dégénère en deux droites, on obtient un couple de tangentes doubles appartenant au même groupe, vu que leurs points de contact, de même que ceux du couple $s+1=0$, $s-1=0$ satisfont à l'équation

$$2\alpha(s^2-1)+(s^2+z^2-1)=0.$$

La condition bien connue qui entraîne la dégénération de la conique

$$a_{11}z^2 + 2a_{12}zs + a_{22}z^2 + 2a_{13}z + 2a_{23}s + a_{33} =$$

$$= \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)z^2 + \alpha(\alpha+1)s^2 + \left(-\alpha^2 - \alpha - \frac{1}{2}\right) = 0$$

fournit la relation

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + \frac{1}{2}, & 0, & 0 \\ 0, & \alpha(\alpha+1), & 0 \\ 0, & 0, & -\left(\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{2}\right. \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\alpha(\alpha+1)\left(\alpha + \frac{1-i}{2}\right)\left(\alpha + \frac{1+i}{2}\right) = 0$$

que l'on peut considérer comme une équation du 6e degré en α dont une racine est $= \infty$. A ses six racines répondent les couples suivants :

α	Couples.	
∞	$s - 1 = 0$	$s + 1 = 0$
0	$z - 1 = 0$	$z + 1 = 0$
-1	$z - i = 0$	$z + i = 0$
$-\frac{1}{2}$	$s - i = 0$	$s + i = 0$
$\frac{-1+i}{2}$	$s - \varepsilon z = 0$	$s + \varepsilon z = 0$
$-\frac{1+i}{2}$	$s - \varepsilon' z = 0$	$s + \varepsilon' z = 0$

Ceci posé, on introduit un système de coordonnées homogènes, en choisissant pour x_1, x_2, x_3 trois tangentes doubles telles que leurs points de contact ne sont pas situés sur une conique. Les tangentes

$$x_1 = A(s-1), \qquad x_2 = B(z+1), \qquad x_3 = C(z-i)$$

remplissent cette condition, et les fonctions qui forment des couples avec les précédentes sont

$$\xi_1 = s+1, \quad \xi_2 = z-1, \quad \xi_3 = z+i.$$

Les constantes A, B, C doivent être déterminées de telle sorte que l'équation

$$\sqrt{x_1\xi_1} + \sqrt{x_2\xi_2} + \sqrt{x_3\xi_3} = 0,$$

exprimée en fonction de s et de z et rendue rationnelle, produise, à un facteur constant près, l'équation donnée $s^4+z^4-1=0$. On trouve sans difficulté

$$A=1, \quad B=\frac{1}{2}, \quad C=-\frac{1}{2}.$$

On posera donc provisoirement

$$\begin{cases} x_1 = s-1, & x_2 = \frac{1}{2}(z+1), & x_3 = -\frac{1}{2}(z-i), \\ \xi_1 = s+1, & \xi_2 = z-1, & \xi_3 = z+i. \end{cases}$$

Or, Riemann (l. c. p. 464) et Weber (p. 91) démontrent qu'entre les six fonctions $x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ il existe quatre équations linéaires et homogènes de la forme

$$(1) \qquad \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \alpha'\xi_1 + \beta'\xi_2 + \gamma'\xi_3 = 0,$$

pourvu que les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ satisfassent aux conditions

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'.$$

Une de ces équations est alors nécessairement une conséquence des trois autres. Les quatre expressions $\sqrt{\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3}$ sont les fonctions abéliennes désirées, c'est-à-dire celles qui, jointes à $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \sqrt{x_3}$ répondent à un système complet de caractéristiques impaires.

Pour les déterminer, on partira des trois équations faciles à vérifier

$$\begin{aligned} x_1 + 2(1-i)x_2 + 2(1-i)x_3 - \xi_1 &= 0, \\ 2ix_2 - 2(1-i)x_3 - \xi_2 &= 0, \\ 2(1+i)x_2 + \qquad 2ix_3 - \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

En les multipliant respectivement par l_1, l_2, l_3 et en ajoutant, il vient une nouvelle équation que l'on peut identifier avec (1) :

$$l_1x_1 + 2[l_1(1-i) + l_2i + l_3(1+i)]x_2 +$$
$$+ 2[l_1(1-i) - l_2(1-i) + l_3i]x_3 - l_1\xi_1 - l_2\xi_2 - l_3\xi_3 =$$
$$= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \alpha'\xi_1 + \beta'\xi_2 + \gamma'\xi_3 .$$

On en tire

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha = l_1 , & \alpha' = -l_1 , \\ \beta = 2[l_1(1-i) + l_2i + l_3(1+i)], & \beta' = -l_2 , \\ \gamma = 2[l_1(1-i) - l_2(1-i) + l_3i], & \gamma' = -l_3 . \end{cases}$$

Les conditions $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'$ donnent lieu aux équations

$$-l_1^2 = -2l_2[l_1(1-i) + l_2i + l_3(1+i)] =$$
$$= -2l_3[l_1(1-i) - l_2(1-i) + l_3i]$$

qui, à leur tour, servent à déterminer les rapports $l_1 : l_2 : l_3$.

Soit, à cet effet,

$$l_2 = ml_1 , \qquad l_3 = nl_1 .$$

Les équations précédentes, après la suppression du facteur commun $-l_1^2$ prennent maintenant la forme

$$(3) \qquad m(1-i) + m^2i + mn(1+i) = \frac{1}{2} ,$$

$$(4) \qquad n(1-i) + n^2i - mn(1-i) = \frac{1}{2} .$$

En les ajoutant il vient

$$(1-i)(m+n) + i(m^2+n^2) + 2imn = 1 ,$$

ou bien

$$(m+n)^2 - (1+i)(m+n) + i = 0.$$

Il s'ensuit

$$m+n = \frac{1+i}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+i)^2}{4} - i} = \frac{1+i}{2} \pm \sqrt{-\frac{i}{2}} =$$
$$= \frac{1+i}{2} \pm \frac{1-i}{2} ,$$

soit

$$a)\quad m+n=1, \qquad b)\quad m+n=i.$$

La substitution de $n=1-m$ dans l'équation (3) donne

$$m=1\pm\sqrt{\frac{1}{2}},$$

tandis que $n=i-m$ fournit

$$m=\pm\frac{i}{\sqrt{2}}.$$

On a ainsi les quatre couples de valeurs

$$\begin{cases} m_1=1+\sqrt{\frac{1}{2}},\ m_2=1-\sqrt{\frac{1}{2}},\ m_3=\frac{i}{\sqrt{2}}, & m_4=-\frac{i}{\sqrt{2}}, \\ n_1=-\sqrt{\frac{1}{2}},\ n_2=\sqrt{\frac{1}{2}},\ n_3=i\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right),\ n_4=i\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \end{cases}$$

lesquelles, introduites dans les formules (2), conduisent aux systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1=l_1 \\ \beta_1=2l_1\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \\ \gamma_1=-\frac{2l_1}{\sqrt{2}} \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} \alpha'_1=-l_1 \\ \beta'_1=-\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)l_1 \\ \gamma'_1=\frac{l_1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\|$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_2=l_1 \\ \beta_2=2l_1\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \\ \gamma_2=\frac{2l_1}{\sqrt{2}} \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} \alpha'_2=-l_1 \\ \beta'_2=-\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)l_1 \\ \gamma'_2=-\frac{l_1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\|$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_3=l_1 \\ \beta_3=-\frac{2il_1}{\sqrt{2}} \\ \gamma_3=-2il_1\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} \alpha'_3=-l_1 \\ \beta'_3=-\frac{i}{\sqrt{2}}l_1 \\ \gamma'_3=-i\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)l_1 \end{array}\right\|$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} \alpha_4 = l_1 & \alpha'_4 = -l_1 \\ \beta_4 = \dfrac{2il_1}{\sqrt{2}} & \beta'_4 = \dfrac{il_1}{\sqrt{2}} \\ \gamma_4 = -2il_1\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right) & \gamma'_4 = -i\left(1+\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)l_1 \end{array}\right\|$$

Les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ étant connues, on a maintenant aussi, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3}{l_1} = -\frac{\alpha'_1\xi_1 + \beta'_1\xi_2 + \gamma'_1\xi_3}{l_1} =$$

$$= x_1 + (2-\sqrt{2})x_2 - \sqrt{2}\,x_3 = s - 1 + \left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)(z+1) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}(z-i) = s + z - \frac{1+i}{\sqrt{2}} = s + z - \varepsilon$$

et de même

$$\frac{\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3}{l_1} = -\frac{\alpha'_2\xi_1 + \beta'_2\xi_2 + \gamma'_2\xi_3}{l_1} = s + z + \varepsilon,$$

$$\frac{\alpha_3 x_1 + \beta_3 x_2 + \gamma_3 x_3}{l_1} = -\frac{\alpha'_3\xi_1 + \beta'_3\xi_2 + \gamma'_3\xi_3}{l_1} = s + iz + \varepsilon',$$

$$\frac{\alpha_4 x_1 + \beta_4 x_2 + \gamma_4 x_3}{l_1} = -\frac{\alpha'_4\xi_1 + \beta'_4\xi_2 + \gamma'_4\xi_3}{l_1} = s + iz - \varepsilon'.$$

Ainsi qu'on l'a déjà fait remarquer, les fonctions

$$x_1,\ x_2,\ x_3$$

$g^\circ = s+z-\varepsilon$, $g = s+z+\varepsilon$, $g' = s+iz+\varepsilon'$, $g'' = s+iz-\varepsilon'$,

ou, pour mieux dire, leurs racines carrées forment un système complet. Pour amener l'identité

$$g^\circ = x_1 + x_2 + x_3 = -(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)$$

il est nécessaire de munir les fonctions $x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ de certains facteurs constants; en d'autres termes, on remplacera

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3,$$

par x_1, $\dfrac{x_2}{2-\sqrt{2}}$, $-\dfrac{x_3}{\sqrt{2}}$, $-\xi_1$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\xi_2$, $\sqrt{2}\,\xi_3$,

de sorte que dorénavant

$$\begin{cases} x_1 = \quad s-1, \quad x_2 = \quad \left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)(z+1), \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z-i), \\ \xi_1 = -(s+1), \quad \xi_2 = -\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)(z-1), \quad \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z+i). \end{cases}$$

Ces six expressions, dans leur nouvelle acception, satisfont également à l'équation

$$\sqrt{x_1\xi_1}+\sqrt{x_2\xi_2}+\sqrt{x_3\xi_3}=0.$$

Cela posé, les équations (23) de M. Weber (p. 93) deviennent maintenant

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3+x_1+x_2+x_3=0.$$

$$\frac{\xi_1}{\alpha_1}+\frac{\xi_2}{\alpha_2}+\frac{\xi_3}{\alpha_3}+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=\xi_1+(\sqrt{2}-1)^2\xi_2-\xi_3+$$
$$+x_1+(\sqrt{2}+1)^2x_2-x_3=0,$$

$$\frac{\xi_1}{\alpha'_1}+\frac{\xi_2}{\alpha'_2}+\frac{\xi_3}{\alpha'_3}+\alpha'_1x_1+\alpha'_2x_2+\alpha'_3x_3=\xi_1+i(\sqrt{2}-1)\xi_2-$$
$$-i(\sqrt{2}-1)\xi_3+x_1-i(\sqrt{2}+1)x_2+i(\sqrt{2}+1)x_3=0,$$

$$\frac{\xi_1}{\alpha''_1}+\frac{\xi_2}{\alpha''_2}+\frac{\xi_3}{\alpha''_3}+\alpha''_1x_1+\alpha''_2x_2+\alpha''_3x_3=\xi_1-i(\sqrt{2}-1)\xi_2-$$
$$-i(\sqrt{2}+1)\xi_3+x_1+i(\sqrt{2}+1)x_2+i(\sqrt{2}-1)x_3=0.$$

On en conclut

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1, & \alpha_2 = \quad (\sqrt{2}+1)^2, & \alpha_3 = -1, \\ \alpha'_1 = 1, & \alpha'_2 = -i(\sqrt{2}+1), & \alpha'_3 = \quad i(\sqrt{2}+1), \\ \alpha''_1 = 1, & \alpha''_2 = \quad i(\sqrt{2}+1), & \alpha''_3 = \quad i(\sqrt{2}-1). \end{cases}$$

Ces quantités ont été appelées par M. Weber *modules de classe* (p. 103). Les *modules dérivés* $\alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3$ dépendent des α et α' et les formules (28), p. 95 de l'ouvrage de M. W., indiquent le moyen de les déterminer. Bien qu'il ne soit pas nécessaire de vérifier ces formules, l'esprit éprouve toujours une certaine satisfaction lorsqu'en appliquant une théorie générale à un cas parti-

culier il arrive à des résultats prévus. C'est à ce point de vue que les quelques lignes suivantes figurent dans le présent mémoire.

Ecrivant, pour abréger,

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3 \end{vmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \alpha_1, & \frac{1}{\alpha_2}, & \frac{1}{\alpha_3} \\ \alpha'_1, & \frac{1}{\alpha'_2}, & \frac{1}{\alpha'_3} \end{vmatrix} = \left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right), \text{ etc.}$$

on trouve successivement

$$\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right) = \left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right) = -2\sqrt{2}(1+i)(\sqrt{2}+1),$$

$$\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right) = \left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right) = -2\sqrt{2}(1+i)(\sqrt{2}-1),$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \alpha_3\right) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -2\sqrt{2}(1-i)(\sqrt{2}+1),$$

$$\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right) = \left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right) = -2\sqrt{2}(1-i)(\sqrt{2}-1).$$

Ensuite

$$\frac{\alpha_2 \alpha'_2 \alpha''_2 \cdot \alpha_2 \alpha'_2 \alpha''_2 \cdot \alpha_3 \alpha'_3 \alpha''_3}{\alpha_3 \alpha'_3 \alpha''_3} =$$

$$= (\alpha_2 \alpha'_2 \alpha''_2)^2 = \frac{\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \alpha_3\right)}{\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right)\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right)^2 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^2}{\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right)^2 \left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right)^2} = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^4 = (\sqrt{2}+1)^8;$$

or,

$$\alpha_2 \alpha'_2 = -i(\sqrt{2}+1)^3, (\alpha_2 \alpha'_2)^2 = -(\sqrt{2}+1)^6,$$

par conséquent,

$$\alpha''_2{}^2 = -\frac{(\sqrt{2}+1)^8}{(\sqrt{2}+1)^6} = -(\sqrt{2}+1)^2 \text{ et } \alpha''_2 = \pm i(\sqrt{2}+1).$$

De la même manière il vient

$$(\alpha_3\alpha'_3\alpha''_3)^2 = \frac{\left(\frac{1}{\alpha_1},\alpha_2,\alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\alpha_3\right)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_2},\alpha_3\right)}{\left(\alpha_1,\alpha_2,\frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1},\alpha_2,\frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)} =$$

$$= \frac{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^2\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_2},\alpha_3\right)^2}{\left(\alpha_1,\alpha_2,\frac{1}{\alpha_3}\right)^2\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)^2} = 1,$$

mais

$$(\alpha_3\alpha'_3)^2 = -(\sqrt{2}+1)^2,$$

par conséquent,

$$\alpha_3''{}^2 = -(\sqrt{2}-1)^2 \text{ et } \alpha_3'' = \pm i(\sqrt{2}-1).$$

Enfin on trouve

$$(\alpha_1\alpha'_1\alpha''_1)^2 = \frac{\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_2},\alpha_3\right)\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\left(\alpha_1,\alpha_2,\frac{1}{\alpha_3}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_1},\alpha_2,\alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1},\alpha_2,\frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)} = 1$$

et puisque

$$(\alpha_1\alpha'_1)^2 = 1, \text{ on a } \alpha''_1{}^2 = 1 \text{ et } \alpha''_1 = \pm 1.$$

Ainsi, au signe près, les modules dérivés α''_1, α''_2, α_3'', sont connus. Si, pour une raison ou pour une autre, on a choisi l'un des signes, les deux autres ne sauraient plus être douteux. En effet, soit par exemple $\alpha''_2 = +1$; alors l'égalité

$$\frac{\alpha_3\alpha'_3\alpha''_3}{\alpha_1\alpha'_1\alpha''_1} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha_1},\alpha_2,\alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\alpha_3\right)}{\left(\alpha_1,\alpha_2,\frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)} = +1$$

fournit

$$\alpha''_3 = \frac{\alpha_1 \alpha'_1 \alpha''_1}{\alpha_3 \alpha'_3} = i(\sqrt{2} - 1)$$

et

$$\frac{\alpha_1 \alpha'_1 \alpha''_1}{\alpha_2 \alpha'_2 \alpha''_2} = \frac{\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right)\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right)} = (\sqrt{2} - 1)^4$$

donne de même

$$\alpha''_2 = \frac{\alpha_1 \alpha'_1 \alpha''_1}{\alpha_2 \alpha'_2}(\sqrt{2} + 1)^4 = i(\sqrt{2} + 1).$$

Les 18 autres fonctions abéliennes.

Les 28 fonctions abéliennes ont déjà été trouvées précédemment. On fera connaître plus loin un moyen qui permet de déterminer leurs caractéristiques d'une manière directe; toutefois, dans l'intérêt de la brièveté, il est préférable d'appliquer les formules de M. W. (p. 96 et s.) qui donnent non-seulement la forme de ces fonctions, mais encore les caractéristiques correspondantes. On obtient successivement

$$\gamma_1^\circ = x_1 + \xi_2 + \xi_3 = s - 1 - \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)(z-1) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}(z+i) = s - z + \varepsilon,$$

$$\gamma_1 = \alpha_1 x_1 + \frac{\xi_2}{\alpha_2} + \frac{\xi_3}{\alpha_3} = s - 1 - \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)(z-1) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}}(z+i) = s - z - \varepsilon,$$

$$\gamma'_1 = \alpha'_1 x_1 + \frac{\xi_2}{\alpha'_2} + \frac{\xi_3}{\alpha'_3} = s - 1 - \frac{i}{\sqrt{2}}(z-1) -$$

$$- i\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)(z+i) = s - iz - \varepsilon',$$

$$\gamma''_1 = \alpha''_1 x_1 + \frac{\xi_2}{\alpha''_2} + \frac{\xi_3}{\alpha''_3} = s - 1 + \frac{i}{\sqrt{2}}(z-1) -$$

$$- i\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)(z+i) = s - iz + \varepsilon',$$

$$\gamma_2^\circ = \xi_1 + x_2 + \xi_3 = -(s - z + \varepsilon')$$

$$\gamma_2 = \frac{\xi_1}{\alpha_1} + \alpha_2 x_2 + \frac{\xi_3}{\alpha_3} = -(s - z - \varepsilon')$$

$$\gamma'_2 = \frac{\xi_1}{\alpha'_1} + \alpha'_2 x_2 + \frac{\xi_3}{\alpha'_3} = -(s + iz + \varepsilon)$$

$$\gamma''_2 = \frac{\xi_1}{\alpha''_1} + \alpha''_2 x_2 + \frac{\xi_3}{\alpha''_3} = -(s + iz - \varepsilon)$$

$$\gamma_3^\circ = \xi_1 + \xi_2 + x_3 = -(s + z - \varepsilon')$$

$$\gamma_3 = \frac{\xi_1}{\alpha_1} + \frac{\xi_2}{\alpha_2} + \alpha_3 x_3 = -(s + z + \varepsilon')$$

$$\gamma'_3 = \frac{\xi_1}{\alpha'_1} + \frac{\xi_2}{\alpha'_2} + \alpha'_3 x_3 = -(s - iz - \varepsilon)$$

$$\gamma''_3 = \frac{\xi_1}{\alpha''_1} + \frac{\xi_2}{\alpha''_2} + \alpha''_3 x_3 = -(s - iz + \varepsilon).$$

Les six dernières fonctions ne peuvent être autre chose que trois des couples qu'on a déjà rencontrés p. 124. En effet

$$\xi_4 = \frac{\xi_1}{\alpha_1(1-\alpha_2\alpha_3)} + \frac{\xi_2}{\alpha_2(1-\alpha_3\alpha_1)} + \frac{\xi_3}{\alpha_3(1-\alpha_1\alpha_2)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)(s-i),$$

$$x_4 = \frac{x_1}{1-\alpha_2\alpha_3} + \frac{x_2}{1-\alpha_3\alpha_1} + \frac{x_3}{1-\alpha_1\alpha_2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)(s+i);$$

$$\xi_5 = \frac{\xi_1}{\alpha'_1(1-\alpha'_2\alpha'_3)} + \frac{\xi_2}{\alpha'_2(1-\alpha'_3\alpha'_1)} + \frac{\xi_3}{\alpha'_3(1-\alpha'_1\alpha'_2)} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)(s+\varepsilon' z),$$

$$x_5 = \frac{x_1}{1-\alpha'_2\alpha'_3} + \frac{x_2}{1-\alpha'_3\alpha'_1} + \frac{x_3}{1-\alpha'_1\alpha'_2} =$$

$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)(s-\varepsilon' z);$$

$$\xi_6 = \frac{\xi_1}{\alpha''_1(1-\alpha''_2\alpha''_3)} + \frac{\xi_2}{\alpha''_2(1-\alpha''_3\alpha''_1)} + \frac{\xi_3}{\alpha''_3(1-\alpha''_1\alpha''_2)} = -\frac{1}{2}(s-\varepsilon z),$$

$$x_6 = \frac{x_1}{1-\alpha''_2\alpha''_3} + \frac{x_2}{1-\alpha''_3\alpha''_1} + \frac{x_3}{1-\alpha''_1\alpha''_2} = \frac{1}{2}(s+\varepsilon z).$$

Si l'on désigne par

$$(\sqrt{x_1}) = (\beta_1), (\sqrt{x_2}) = (\beta_2), (\sqrt{x_3}) = (\beta_3), (\sqrt{g^\circ}) = (\beta_4),$$
$$(\sqrt{g}) = (\beta_5), (\sqrt{g'}) = (\beta_6), (\sqrt{g''}) = (\beta_7)$$

les sept caractéristiques impaires formant un système complet, en indiquant de cette façon en même temps la caractéristique et la fonction à laquelle elle appartient, les autres sont (W. p. 100 et 101):

$(\sqrt{\xi_1}) = (p+\beta_2+\beta_3)$	$(\sqrt{\gamma^\circ_1}) = (p+\beta_1+\beta_4)$
$(\sqrt{\xi_2}) = (p+\beta_3+\beta_1)$	$(\sqrt{\gamma_1}) = (p+\beta_1+\beta_5)$
$(\sqrt{\xi_3}) = (p+\beta_1+\beta_2)$	$(\sqrt{\gamma'_1}) = (p+\beta_1+\beta_6)$
	$(\sqrt{\gamma''_1}) = (p+\beta_1+\beta_7)$
$(\sqrt{\gamma^\circ_2}) = (p+\beta_2+\beta_4)$	$(\sqrt{\gamma^\circ_3}) = (p+\beta_3+\beta_4)$
$(\sqrt{\gamma_2}) = (p+\beta_2+\beta_5)$	$(\sqrt{\gamma_3}) = (p+\beta_3+\beta_5)$
$(\sqrt{\gamma'_2}) = (p+\beta_2+\beta_6)$	$(\sqrt{\gamma'_3}) = (p+\beta_3+\beta_6)$
$(\sqrt{\gamma''_2}) = (p+\beta_2+\beta_7)$	$(\sqrt{\gamma''_3}) = (p+\beta_3+\beta_7)$
$(\sqrt{\xi_4}) = (p+\beta_4+\beta_5)$	$(\sqrt{x_4}) = (p+\beta_6+\beta_7)$
$(\sqrt{\xi_5}) = (p+\beta_4+\beta_6)$	$(\sqrt{x_5}) = (p+\beta_7+\beta_5)$
$(\sqrt{\xi_6}) = (p+\beta_4+\beta_7)$	$(\sqrt{x_6}) = (p+\beta_5+\beta_6)$

$$(p) = (\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5+\beta_6+\beta_7).$$

Détermination des caractéristiques.

Il s'agit seulement des sept caractéristiques $(\sqrt{x_1}), (\sqrt{x_2}), (\sqrt{x_3}), (\sqrt{g^0}), (\sqrt{g}), (\sqrt{g'}), (\sqrt{g''})$ qui forment un système complet. M. Weber, à la p. 79 de son ouvrage dit : « Lorsqu'une fonction abélienne $\sqrt{x}$ s'annule dans les mêmes points que $\vartheta_{(\omega)}\left(\int_{\zeta'}^{\zeta} du_h\right)$, on appellera (ω) la caractéristique de cette fonction abélienne et on la désignera par $(\sqrt{x})$. » A ce propos, une observation importante se présente tout naturellement. De même que l'égalité de deux quotients n'entraîne pas nécessairement l'égalité des dividendes d'une part et des diviseurs d'autre part, de même l'équation

$$C\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = \frac{\vartheta_{(\omega_1)}\left(\int_{\zeta'}^{\zeta} du_h\right)}{\vartheta_{(\omega_2)}\left(\int_{\zeta'}^{\zeta} du_h\right)}$$

ne permet pas de conclure que la fonction $\sqrt{x_1}$ affecte exactement le système de facteurs indiqué par la caractéristique $(\sqrt{x_1})$. En effet, lorsque la variable ζ, soit le point (z, s) franchit les six coupures, les deux membres de cette équation prennent bien le même système de facteurs, mais il se peut que, dans le quotient, un certain nombre de facteurs (-1) se soient détruits. Ainsi donc, si l'on veut déterminer, par exemple, la caractéristique $(\sqrt{x_1})$, en observant combien de fois la fonction $\sqrt{x_1} = \sqrt{s-1}$ change de signe, lorsque ζ traverse les coupures, la combinaison de nombres, ainsi obtenue, ne donne pas directement $(\sqrt{x_1})$, mais $(\sqrt{x_1}) + (q)$, où (q) signifie une caractéristique encore inconnue, qui d'ailleurs conserve toujours la même valeur.

Il est à peine besoin de rappeler ici qu'une racine carrée change de signe toutes les fois que la variable, en parcourant une courbe fermée quelconque, contourne un des points pour lesquels la quantité sous le radical s'annule, pourvu que le zéro soit du 1er ordre ou d'une manière plus générale, d'un ordre impair. Or, franchir la coupure a_ν revient à décrire la coupure complète b_ν ; l'effet produit est évidemment le même.

Pour la fonction $\sqrt{x_2} = \sqrt{z+1}$ cette détermination est très simple, attendu que dans ce cas la surface de Riemann T′ fournit tous les éléments nécessaires. En effet, il suffit d'observer combien de fois chacune des coupures contourne le point $z = -1$. Un coup d'œil, jeté sur les fig. 8^a..... 8^f, montre que

la coupure a_1 fait 2 contours, la coupure b_1 fait 0 contour
» a_2 » 1 contour, » b_2 » 0 »
» a_3 » 0 » » b_3 » 1 »

En réduisant encore ces nombres à 0 et 1 (mod. 2), on a ainsi

$$(\sqrt{x_2}) + (q) = \binom{001}{010}.$$

D'une manière analogue le point $z = i$ donne

$$(\sqrt{x_3}) + (q) = \binom{111}{011}.$$

Pour faciliter le contrôle ultérieur on peut ajouter

$$(\sqrt{\xi_2}) + (q) = \binom{010}{001}, \quad \text{fonction } \sqrt{z-1}, \quad \text{point } z = 1,$$

$$(\sqrt{\xi_3}) + (q) = \binom{100}{000}, \quad » \quad \sqrt{z+i}, \quad » \quad z = -i,$$

Afin d'obtenir la caractéristique de $\sqrt{x_1} = \sqrt{s-1}$, il est utile de représenter les six coupures au moyen de la fonction $s = \sqrt[4]{1-z^4}$. D'après ce qui précède, cette représentation n'offre aucune difficulté. Cependant, il n'est peut-être pas superflu de rappeler que, pour la fonction s, le point $z = 0$ est un point singulier *(Windungspunkt)*, en ce sens qu'à un circuit de z autour de ce point correspondent quatre circuits de s autour du point $s = 1$. En d'autres termes, dans le voisinage de ce point, les angles de l'image sont 4 fois aussi grands que les angles correspondants de l'original. On le reconnaît aisément à l'aide du développement

$$s - 1 = -\frac{1}{4} z^4 ...$$

Il va de soi qu'il faudra tenir compte des différentes nappes dans lesquelles le point z peut se mouvoir. Les fig. 9^a... 9^f, ainsi établies (les chiffres appliqués sur ces contours se rapportent aux points correspondants du plan (z)), on observera combien de fois chacune de ces courbes contourne le point $s = 1$. De cette manière, on trouve

$$(\sqrt{x_4}) + (q) = \binom{010}{010}.$$

Les mêmes figures donnent encore, pour contrôle

$$(\sqrt{\xi_1}) + (q) = \binom{001}{001}, \quad \text{fonction } \sqrt{s+1}, \quad \text{point } s=-1,$$

$$(\sqrt{\xi_4}) + (q) = \binom{000}{011}, \quad \text{» } \sqrt{s-i}, \quad \text{» } s = i,$$

$$(\sqrt{x_4}) + (q) = \binom{011}{000}, \quad \text{» } \sqrt{s+i}, \quad \text{» } s=-i.$$

La représentation des six coupures sur un plan (u), à l'aide de la fonction $u = s + z$, conduira facilement à la caractéristique de $\sqrt{g^0} = \sqrt{s+z-\varepsilon}$, car cette fonction ne peut évidemment s'annuler que pour $s + z = \varepsilon$.

Si l'on écrit

$$u = z + m\sqrt[4]{1-z^4},$$

m prendra les valeurs $\pm 1, \pm i$, suivant la nappe et le bord sur lequel le point z se meut. A cet égard, les fig. 2 et 3 fournissent tous les renseignements nécessaires. Pour plus de facilité on pourra se servir du petit tableau suivant :

Bord		+	—	+	—	+	—	+	—
Chemin parcouru par z		01	01	$0i$	$0i$	$0-1$	$0-1$	$0-i$	$0-i$
Facteur de s dans la nappe	I	1	i	i	-1	-1	$-i$	$-i$	1
	II	i	-1	-1	$-i$	$-i$	1	1	i
	III	-1	$-i$	$-i$	1	1	i	i	-1
	IV	$-i$	1	1	i	i	-1	-1	$-i$

Par exemple, lorsque z longe le bord négatif de l'axe $0i$ dans la 4me nappe, la racine $\sqrt[4]{1-z^4}$ affecte le facteur i. Il est à remarquer, en outre, que pour la fonction u les points $z = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$, $z = \pm i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ sont des points singuliers tels que, dans le voisinage des points correspondants $u = \pm 2\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$, $u = \pm 2i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$, les angles de l'image sont le double de ceux de l'original, car on a les développements

$$u-2\sqrt[4]{\frac{1}{2}}=-6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(z-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^{2} \text{ ... si } s \text{ prend le facteur } 1,$$

$$u-2i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}=6i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(z-i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^{2} \text{ ... si } s \text{ » » } i,$$

$$u+2\sqrt[4]{\frac{1}{2}}=6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(z+\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^{2} \text{ ... si } s \text{ » » } -1,$$

$$u+2i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}=-6i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(z+i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^{2} \text{ ... si } s \text{ » » } -i.$$

Dans les fig. 10^a... 10^f, construites d'après ces indications, les points marqués $\pm n$, $\pm ni$ répondent aux points singuliers $\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$, $\pm i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ de l'original. Maintenant on voit immédiatement que

$$(\sqrt{g^\circ})+(q)=\binom{010}{011}, \quad \text{fonction } \sqrt{s+z-\varepsilon}, \quad \text{point } u=\varepsilon,$$

$$(\sqrt{g})+(q)=\binom{101}{000}, \quad \text{» } \sqrt{s+z+\varepsilon}, \quad \text{» } u=-\varepsilon,$$

et pour contrôle

$$(\sqrt{\gamma^\circ_3})+(q)=\binom{010}{000}, \quad \text{fonction } \sqrt{s+z-\varepsilon'}, \quad \text{point } u=\varepsilon',$$

$$(\sqrt{\gamma_3})+(q)=\binom{101}{011}, \quad \text{» } \sqrt{s+z+\varepsilon'}, \quad \text{» } u=-\varepsilon'.$$

En dernier lieu, il s'agit de trouver les caractéristiques des fonctions $\sqrt{g'}=\sqrt{s+iz+\varepsilon'}$ et $\sqrt{g''}=\sqrt{s+iz-\varepsilon'}$. La voie suivie déjà deux fois conduit encore au but, c'est-à-dire qu'on représentera les six coupures sur un plan (v) moyennant la fonction

$$v=s+iz=iz+m\sqrt[4]{1-z^4}.$$

Au sujet du facteur m, l'observation relative au cas précédent est encore applicable. La fonction v présente les mêmes singularités que la fonction u, avec les modifications qui ressortent des développements

$$v-2i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}=-6i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(z-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^2 \text{ ... si } s \text{ prend le facteur } i,$$

$$v+2\sqrt[4]{\frac{1}{2}}=-6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(z-i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^2 \text{ ... si } s \text{ » » } -1,$$

$$v+2i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}=6i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(z+\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^2 \text{ ... si } s \text{ » » } -i,$$

$$v-2\sqrt[4]{\frac{1}{2}}=6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(z+i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^2 \text{ ... si } s \text{ » » } 1.$$

Enfin, les fig. 11^a ... 11^f donnent immédiatement

$(\sqrt{g'})+(q)=\binom{101}{111}$, fonction $\sqrt{s+iz+\varepsilon'}$, point $v=-\varepsilon'$,

$(\sqrt{g''})+(q)=\binom{001}{111}$, » $\sqrt{s+iz-\varepsilon'}$, » $v=\varepsilon'$,

$(\sqrt{\gamma''_2})+(q)=\binom{111}{101}$, » $\sqrt{s+iz-\varepsilon}$, » $v=\varepsilon$,

$(\sqrt{\gamma'_2})+(q)=\binom{011}{101}$, » $\sqrt{s+iz+\varepsilon}$, » $v=-\varepsilon$.

En résumé, on vient de trouver

$$(\sqrt{x_1})+(q)=\binom{010}{010},\ (\sqrt{x_2})+(q)=\binom{001}{010},\ (\sqrt{x_3})+(q)=\binom{111}{011},$$

$$(\sqrt{g^\circ})+(q)=\binom{010}{011},\ (\sqrt{g})+(q)=\binom{101}{000},\ (\sqrt{g'})+(q)=\binom{101}{111},$$

$$(\sqrt{g''})+(q)=\binom{001}{111}$$

et pour contrôle

$$(\sqrt{\xi_2})+(q)=\binom{010}{001},\ (\sqrt{\xi_3})+(q)=\binom{100}{000},\ (\sqrt{\xi_1})+(q)=\binom{001}{001},$$

$$(\sqrt{\xi_4})+(q)=\binom{000}{011},\ (\sqrt{x_4})+(q)=\binom{011}{000},\ (\sqrt{\gamma_3^\circ})+(q)=\binom{010}{000},$$

$$(\sqrt{\gamma_3})+(q)=\binom{101}{011},\ (\sqrt{\gamma''_3})+(q)=\binom{111}{101},\ (\sqrt{\gamma'_2})+(q)=\binom{011}{101}.$$

Afin d'obtenir finalement la caractéristique $(\sqrt{x_1})$ et avec elle (q) et toutes les autres, on peut former les 6 groupes

$$(\sqrt{x_1x_2}),\ (\sqrt{x_1x_3}),\ \sqrt{x_1g^\circ}),\ \sqrt{x_1g}),\ \sqrt{x_1g'}),\ \sqrt{x_1g''}).$$

Evidemment, ceux-ci ont une seule caractéristique commune, à savoir $(\sqrt{x_1})$ qui, de ce fait, est parfaitement déterminée. Or, les tables de M. W. (p. 180 et suiv.), donnent

$$(\sqrt{x_1x_2})=\binom{010}{010}+\binom{001}{010}=\binom{011}{000}=\underset{1}{\binom{100}{100}}+\binom{111}{100}=\binom{100}{111}+\underset{2}{\binom{111}{111}}=\underset{3}{\binom{010}{011}}+$$
$$+\binom{001}{011}=\binom{010}{111}+\underset{4}{\binom{001}{111}}=\binom{101}{100}+\underset{5}{\binom{110}{100}}=\binom{101}{011}+\underset{6}{\binom{110}{011}},$$

$$(\sqrt{x_1x_3})=\binom{010}{010}+\binom{111}{011}=\binom{101}{001}=\underset{1}{\binom{100}{100}}+\binom{001}{101}=\binom{100}{110}+\underset{4}{\binom{001}{111}}=\binom{010}{110}+$$
$$+\underset{2}{\binom{111}{111}}=\underset{3}{\binom{010}{011}}+\binom{111}{010}=\binom{011}{010}+\underset{6}{\binom{110}{011}}=\binom{011}{101}+\underset{5}{\binom{110}{100}},$$

$$(\sqrt{x_1g^\circ})=\binom{010}{010}+\binom{010}{011}=\binom{000}{001}=\underset{1}{\binom{100}{100}}+\binom{100}{101}=\binom{100}{110}+\binom{100}{111}=\binom{010}{010}+$$
$$+\underset{3}{\binom{010}{011}}=\binom{010}{110}+\binom{010}{111}=\underset{5}{\binom{110}{100}}+\binom{110}{101}=\binom{110}{010}+\underset{6}{\binom{110}{011}},$$

$$(\sqrt{x_1g})=\binom{010}{010}+\binom{101}{000}=\binom{111}{010}=\underset{1}{\binom{100}{100}}+\binom{011}{110}=\binom{100}{111}+\binom{011}{101}=\binom{010}{110}+$$
$$+\binom{101}{100}=\underset{3}{\binom{010}{011}}+\binom{101}{001}=\binom{001}{001}+\underset{6}{\binom{110}{011}}=\underset{4}{\binom{001}{111}}+\binom{110}{101},$$

$$(\sqrt{x_1g'})=\binom{010}{010}+\binom{101}{111}=\binom{111}{101}=\underset{1}{\binom{100}{100}}+\binom{011}{001}=\binom{100}{111}+\binom{011}{010}=\binom{010}{110}+$$
$$+\binom{101}{011}=\underset{3}{\binom{010}{011}}+\binom{101}{110}=\binom{001}{001}+\underset{5}{\binom{110}{100}}=\underset{4}{\binom{001}{111}}+\binom{110}{010},$$

$$(\sqrt{x_1g''})=\binom{010}{010}+\binom{001}{111}=\binom{011}{101}=\underset{1}{\binom{100}{100}}+\binom{111}{001}=\binom{100}{111}+\binom{111}{010}=\binom{010}{010}+$$
$$+\underset{4}{\binom{001}{111}}=\binom{010}{110}+\binom{001}{011}=\binom{101}{001}+\underset{5}{\binom{110}{100}}=\binom{101}{110}+\underset{6}{\binom{110}{011}},$$

Il s'ensuit $$(\sqrt{x_1})=\binom{100}{100}$$

et par conséquent $(q)=\binom{110}{110}$, $(p)=\sum_1^7(\beta_i)=\binom{001}{110}$.

On a ainsi

$$(\sqrt{x_1})=\binom{100}{100},\quad (\sqrt{x_2})=\binom{111}{100},\quad (\sqrt{x_3})=\binom{001}{101},\quad (\sqrt{g^\circ})=\binom{100}{101},$$
$$(\sqrt{g})=\binom{011}{110},\quad (\sqrt{g'})=\binom{011}{001},\quad (\sqrt{g''})=\binom{111}{001}$$

et pour contrôle

$$(\sqrt{\xi_2})=\binom{100}{111},\ (\sqrt{\xi_3})=\binom{010}{110},\ (\sqrt{\xi_1})=\binom{111}{111},\ (\sqrt{\xi_4})=\binom{110}{101},\ (\sqrt{x_4})=\binom{101}{110},$$

$$(\sqrt{\gamma^{\circ}_3})=\binom{100}{110},\ (\sqrt{\gamma_3})=\binom{011}{101},\ (\sqrt{\gamma''_2})=\binom{001}{011},\ (\sqrt{\gamma'_2})=\binom{101}{011}.$$

On est maintenant en état de dresser le tableau suivant, contenant les 28 fonctions abéliennes avec leurs caractéristiques et leurs zéros (voir p. 142 et 143 ci-après).

Transformation des intégrales w_1, w_2, w_3.

Avant de continuer cette étude, il est bon de soumettre les intégrales de première espèce à un examen un peu plus attentif.

$$w_1=\int\frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}$$

On peut d'abord transformer l'intégrale proposée au moyen de la fonction

$$\zeta=e^{\frac{1}{4}\pi i}\frac{z}{s}.$$

Il vient successivement

$$z=e^{-\frac{1}{4}\pi i}\frac{\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}},\quad s=\frac{1}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}},\quad dz=e^{-\frac{1}{4}\pi i}\frac{d\zeta}{(1-\zeta^4)^{\frac{5}{4}}},$$

$$w_1=e^{-\frac{1}{4}\pi i}\int\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}.$$

La substitution

$$\zeta=e^{\frac{1}{4}\pi i}\eta$$

donne ensuite

$$w_1=\int\frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}}.$$

Pour ramener cette intégrale elliptique à la forme normale de Legendre, on posera en premier lieu

Nos	Notat.	Expression.	Caract.	z_1	s_1	Nappe.	z_2	s_2	Nappe.
1	$\sqrt{x_1}$	$\sqrt{s-1}$	100 100	0	1	I	0	1	I
2	$\sqrt{x_2}$	$\sqrt{z+1}$	111 100	-1	0	I II III IV	-1	0	I II III IV
3	$\sqrt{x_3}$	$\sqrt{z-i}$	001 101	i	0	I II III IV	i	0	I II III IV
4	$\sqrt{g^\circ}$	$\sqrt{s+z-\varepsilon}$	100 101	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	III	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	II
5	$\sqrt{g}$	$\sqrt{s+z+\varepsilon}$	011 110	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	III	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	II
6	$\sqrt{g'}$	$\sqrt{s+iz+\varepsilon'}$	011 001	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	IV	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	III
7	$\sqrt{g''}$	$\sqrt{s+iz-\varepsilon'}$	111 001	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	IV	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	III
8	$\sqrt{\xi_1}$	$\sqrt{s+1}$	111 111	0	-1	III	0	-1	III
9	$\sqrt{\xi_2}$	$\sqrt{z-1}$	100 111	1	0	I II III IV	1	0	I II III IV
10	$\sqrt{\xi_3}$	$\sqrt{z+i}$	010 110	$-i$	0	I II III IV	$-i$	0	I II III IV
11	$\sqrt{\gamma^\circ_1}$	$\sqrt{s-z+\varepsilon}$	001 111	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	I	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	IV
12	$\sqrt{\gamma_1}$	$\sqrt{s-z-\varepsilon}$	110 100	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	I	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	IV
13	$\sqrt{\gamma'_1}$	$\sqrt{s-iz-\varepsilon'}$	110 011	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	II	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	I
14	$\sqrt{\gamma''_1}$	$\sqrt{s-iz+\varepsilon'}$	010 011	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	II	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	I

15	$\sqrt{\gamma^{\circ}_{2}}$	$\sqrt{s-z+\varepsilon'}$	010 111	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	IV	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	I
16	$\sqrt{\gamma_{2}}$	$\sqrt{s-z-\varepsilon'}$	101 100	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	IV	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	I
17	$\sqrt{\gamma'_{2}}$	$\sqrt{s+iz+\varepsilon}$	101 011	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	III	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	IV
18	$\sqrt{\gamma''_{2}}$	$\sqrt{s+iz-\varepsilon}$	001 011	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	III	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	IV
19	$\sqrt{\gamma^{\circ}_{3}}$	$\sqrt{s+z-\varepsilon'}$	100 110	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	II	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	III
20	$\sqrt{\gamma_{3}}$	$\sqrt{s+z+\varepsilon'}$	011 101	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	II	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	III
21	$\sqrt{\gamma'_{3}}$	$\sqrt{s-iz-\varepsilon}$	011 010	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	I	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	II
22	$\sqrt{\gamma''_{3}}$	$\sqrt{s-iz+\varepsilon}$	111 010	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	I	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	II
23	$\sqrt{\xi_{4}}$	$\sqrt{s-i}$	110 101	0	i	II	0	i	II
24	$\sqrt{\xi_{5}}$	$\sqrt{s+\varepsilon' z}$	110 010	∞ de sorte que $\frac{s}{z}=-\varepsilon'$		II	∞ de sorte que $\frac{s}{z}=-\varepsilon'$		II
25	$\sqrt{\xi_{6}}$	$\sqrt{s-\varepsilon z}$	010 010	∞ de sorte que $\frac{s}{z}=\varepsilon$		I	∞ de sorte que $\frac{s}{z}=\varepsilon$		I
26	$\sqrt{x_{4}}$	$\sqrt{s+i}$	101 110	0	$-i$	IV	0	$-i$	IV
27	$\sqrt{x_{5}}$	$\sqrt{s-\varepsilon' z}$	101 001	∞ de sorte que $\frac{s}{z}=\varepsilon'$		IV	∞ de sorte que $\frac{s}{z}=\varepsilon'$		IV
28	$\sqrt{x_{6}}$	$\sqrt{s+\varepsilon z}$	001 001	∞ de sorte que $\frac{s}{z}=-\varepsilon$		III	∞ de sorte que $\frac{s}{z}=-\varepsilon$		III

$$\eta = \frac{y-1}{y+1}, \qquad d\eta = \frac{2dy}{(y+1)^2},$$

d'où il suit

$$w_1 = \sqrt{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y^4+6y^2+1}} = \sqrt{2}\int \frac{dy}{\sqrt{[y^2+(\sqrt{2}+1)^2][y^2+(\sqrt{2}-1)^2]}}$$

puis

$$y = (\sqrt{2}+1)\operatorname{cotg}\varphi,\ dy = -(\sqrt{2}+1)\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi},$$

ce qui conduit à la forme

$$w_1 = -\sqrt{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2\cos^2\varphi + (\sqrt{2}-1)^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= -\sqrt{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 - 4\sqrt{2}\sin^2\varphi}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}+1}\right)^2\sin^2\varphi}}.$$

Afin de transformer cette dernière intégrale en une autre dont le module est plus petit, on peut employer la substitution de Landen, soit la formule

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\varphi) = \frac{1+k_1}{2}F(k_1,\varphi_1),$$

dans laquelle les amplitudes φ et φ_1 sont reliées par l'équation

$$\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi) = k'\operatorname{tg}\varphi, \text{ où } k' = \sqrt{1-k^2}$$

et le nouveau module

$$k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}.$$

Appliquées au cas actuel, où

$$k = \frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}+1}, \qquad k' = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

ces formules donnent

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } w_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1}}.$$

Pour faciliter la détermination des limites, voici encore une fois la série des substitutions employées :

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i}\frac{z}{s} = e^{\frac{1}{4}\pi i}\frac{z}{\sqrt[4]{1-z^4}},\ \eta = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\zeta,\ y = \frac{1+\eta}{1-\eta},$$

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{y}{\sqrt{2}+1},\ \operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi) = (\sqrt{2}-1)^2\operatorname{tg}\varphi.$$

Ceci posé, on trouve, par exemple, en désignant par ∞ le point à l'infini de l'axe des X positifs et, d'une manière analogue, par $\varepsilon.\infty$ le point à l'infini de la droite $y=x$ du côté des X positifs :

$$K_1 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = \varepsilon' \int_0^{\varepsilon.\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} = \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}} + \int_1^{\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}}.$$

Si, dans la dernière intégrale, on remplace η par $\frac{1}{\eta}$, on remarque que

$$\int_1^{\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}} = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}},$$

par conséquent

$$K_1 = 2\int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}}.$$

Aux limites 0 et 1 de η correspondent les limites 1 et ∞ de y, arctg $(\sqrt{2}+1)$ et 0 de φ. Reste encore à déterminer celles de φ_1. A l'aide de l'équation

$$\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi) = (\sqrt{2}-1)^2\operatorname{tg}\varphi,$$

dont on tire

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1+(\sqrt{2}+1)^2}{1-(\sqrt{2}-1)^2\operatorname{tg}^2\varphi}\cdot\operatorname{tg}\varphi,$$

il vient $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$ pour $\operatorname{tg}\varphi = (\sqrt{2}+1)$ et $\varphi_1 = 0$ pour $\varphi = 0$, de sorte que

$$K_1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{1}{2}\pi}^{0}\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1}}.$$

$$w_2 = \int\frac{z\,dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}.$$

En introduisant s comme variable d'intégration, on a immédiatement

$$z = \sqrt{1-s^4},\ dz = -\frac{s^3 ds}{(1-s^4)^{\frac{3}{4}}} \text{ et } w_2 = -\int\frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}.$$

Puis la substitution

$$s = \cos\varphi,\ ds = -\sin\varphi\,d\varphi$$

donne

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Il s'ensuit, par exemple,

$$K_2 = \int_0^1\frac{z\,dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}K_1.$$

$$w_3 = \int\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

Il suffit de poser

$$z = \cos\varphi,\ dz = -\sin\varphi\,d\varphi$$

pour ramener cette intégrale elliptique à la forme normale

$$w_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

On en tire

$$K_3 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K_1.$$

Ainsi, on vient de trouver

$$K_2 = K_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} K_1.$$

Valeur numérique de K_1.

En vue d'une représentation qui sera faite ultérieurement, il est utile de connaître la valeur numérique de K_1. Pour la déterminer, on peut se servir de la méthode de Gauss.

Si l'on pose, pour abréger,

$$f(a, b, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

et que l'on soumette cette fonction n fois de suite à la transformation de Landen, il vient

$$f(a, b, \varphi) = \frac{1}{2} f(a_1, b_1, \varphi_1) = \frac{1}{2^2} f(a_2, b_2, \varphi_2) = \ldots$$

$$= \frac{1}{2^n} f(a_n, b_n, \varphi_n), \text{ où}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1+b_1), \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{b_1}{a_1}\operatorname{tg}\varphi_1,$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2+b_2), \quad b_3 = \sqrt{a_2 b_2}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{b_2}{a_2}\operatorname{tg}\varphi_2,$$

. . . . . .

Le calcul doit être poussé jusqu'à ce que $\lim \frac{b_n}{a_n} = 1$. Alors, si l'on écrit encore $\lim \left(\frac{\varphi_n}{2^n}\right) = \Phi$ et $\lim a_n = \lim b_n = A$, on a $f(a, b, \varphi) = \frac{\Phi}{A}$. Lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, Φ est évidemment aussi $= \frac{1}{2}\pi$ et par conséquent

$$f(a, b\, \frac{1}{2}\, \pi) = \frac{\frac{1}{2}\pi}{A}.$$

Or, dans le cas actuel,

$$K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}},$$

où

$$a = \sqrt{2} = 1,41421356, \quad b = 1,$$

on trouve successivement

$$a_1 = 1,20710678, \quad b_1 = 1,18920722,$$
$$a_2 = 1,19815695, \quad b_2 = 1,19812352,$$
$$a_3 = 1,19814023, \quad b_3 = 1,19814023.$$

Il s'ensuit

$$A = 1,19814023, \quad K_1 = \frac{1}{2}\pi . \sqrt{2} . 0,83462684 = 1,85407468.$$

Il est intéressant de constater que les sommes

$$W_h = \int_0^{\alpha} dw_h + \int_0^{\beta} dw_h,$$

où α et β signifient les zéros d'une fonction abélienne quelconque, s'expriment d'une manière très simple au moyen des

quantités K_1, K_2, K_3. A cet effet, et afin de faciliter le contrôle des calculs par la vue, on opérera la représentation du cercle des unités à l'aide des intégrales w_1, w_2, w_3. Pour mieux distinguer les différentes nappes, on tracera chaque dessin quatre fois. Dans les fig. $12^a \ldots 12^m$, pl. X, les chiffres ± 1, $\pm i$ se rapportent aux points correspondants de la surface (z). Le cercle des unités entre successivement dans chacune des quatre nappes. Si l'on exigeait que le point z restât constamment dans la même nappe, il faudrait faire intervenir les modules de périodicité des intégrales w_h; mais il n'y a aucune utilité de procéder de cette façon.

Zéros de $\sqrt{g^\circ}$.

Soit à déterminer

$$W_1 = \int_{0\,\mathrm{III}}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} dw_1 + \int_{0\,\mathrm{II}}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} dw_1.$$

En soumettant l'intégrale w_1 à la transformation $\zeta = \varepsilon \frac{z}{s}$, on obtient l'intégrale indéfinie $\varepsilon' \int \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}$ (comp. p. 141). Dans le calcul des limites de ζ, on se servira des valeurs de s qui correspondent à $z = e^{\frac{7}{12}\pi i}$ dans la 3me nappe et à $z = e^{-\frac{1}{12}\pi i}$ dans la 2me nappe.

On trouve

$$z_{\mathrm{III}} = e^{\frac{7}{12}\pi i},\ s = e^{-\frac{1}{12}\pi i},\ \zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i + \frac{7}{12}\pi i + \frac{1}{12}\pi i} = e^{\frac{14}{12}\pi i}$$ (Voir les fig. 2 et 3.)

$$z_{\mathrm{II}} = e^{-\frac{1}{12}\pi i},\ s = e^{\frac{7}{12}\pi i},\ \zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i - \frac{1}{12}\pi i - \frac{7}{12}\pi i} = e^{-\frac{5}{12}\pi i}.$$

Si l'on admet, en outre, que $\sqrt{1-\zeta^4} = +1$ pour $\zeta = 0$, le signe de $\sqrt{1-\zeta^4}$ dépend de la relation

$$s^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^4}}.$$

Or, lorsque z se meut de 0 à $e^{-\frac{1}{12}\pi i}$ dans la 2me nappe, s va de i à $e^{\frac{7}{12}\pi i}$, s^2 de -1 à $e^{\frac{7}{6}\pi i}$. Sur ce parcours, la partie réelle

de s^2 est négative; il s'ensuit que, dans la 2me des intégrales proposées, $\sqrt{1-\zeta^4}$ affecte le signe (—). Ainsi, il vient

$$W_1 = \varepsilon' \Big[\int_0^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} - \int_0^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} \Big] =$$

$$= \varepsilon' \Big[\int_0^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} + \int_0^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} \Big].$$

Grâce au théorème de l'addition des intégrales elliptiques de première espèce, à savoir

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} =$$

$$= \int_0^c \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

où

$$c = \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}$$

on peut réduire cette somme à une seule intégrale. Dans le cas actuel

$$k^2 = -1,\ x = e^{\frac{11}{12}\pi i},\ y = e^{\frac{7}{12}\pi i},$$

$$c = \frac{e^{\frac{11}{12}\pi i}\sqrt{1-e^{\frac{7}{3}\pi i}} + e^{\frac{7}{12}\pi i}\sqrt{1-e^{\frac{11}{3}\pi i}}}{1+e^{\frac{11}{6}\pi i}e^{\frac{7}{6}\pi i}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{11}{12}\pi i}e^{-\frac{1}{6}\pi i} + e^{\frac{7}{12}\pi i}e^{\frac{1}{6}\pi i}}{1-1} = \frac{e^{\frac{3}{4}\pi i} + e^{\frac{3}{4}\pi i}}{0} = 2\frac{e^{\frac{3}{4}\pi i}}{0},$$

en sorte que

$$W_1 = \varepsilon' \int_0^{\infty - \varepsilon'\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}.$$

Substituant encore $\zeta = -\varepsilon' t$, il vient finalement

$$W_1 = \varepsilon'(-\varepsilon') \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = i \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = iK_1.$$

Observation. Dans le calcul de c, on choisira celle des deux valeurs de $\sqrt{1-e^x}$ dont la partie réelle est positive.

Soit à déterminer

$$W_2 = \int_{III}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} dw_2 + \int_{II}^{e^{-\frac{1}{24}\pi i}} dw_2.$$

Si l'on introduit s comme variable, on obtient l'intégrale indéfinie

$$w_2 = -\int \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}. \text{ (Comp. p. 146.)}$$

Les limites de s se trouvent comme dans le cas précédent et la relation

$$z^2 = \sqrt{1-s^4}$$

montre que, lorsque z se meut de 0 à $e^{\frac{7}{12}\pi i}$, z^2 de 0 à $e^{\frac{7}{6}\pi i}$, $\sqrt{1-s^4}$ prend le signe $(-)$.

Il s'ensuit

$$W_2 = \int_1^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} - \int_i^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} = \int_1^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} + \int_{-i}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} =$$

$$= \int_0^1 + \int_1^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} + \int_0^{-i} + \int_{-i}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} - \int_0^1 - \int_0^{-i} =$$

$$= \int_0^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} + \int_0^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} - K_2 + iK_2.$$

L'application du théorème de l'addition aux deux premières intégrales donne

$$\int_0^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} + \int_0^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} = \varepsilon' K_1,$$

ensorte que

$$W_2 = -K_2 + iK_2 + \varepsilon' K_1 = -(1-i)\frac{K_1}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}K_1 = 0.$$

Enfin, quant à la somme

$$W_3 = \int_{0\,\mathrm{III}}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} dw_3 + \int_{0\,\mathrm{II}}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} dw_3,$$

on remarque d'abord que dans la 2e nappe, le long de l'intervalle rectiligne de 0 à $e^{-\frac{1}{12}\pi i}$, le radical $\sqrt{1-z^4}$ affecte le signe (—). Par conséquent

$$W_3 = \int_0^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} - \int_0^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \int_0^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} + \int_0^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

Ensuite le théorème de l'addition fournit

$$W_3 = \int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\varepsilon' \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} =$$

$$= -\varepsilon' K_1 = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{2}K_3 = -(1-i)K_3.$$

Les valeurs de W_1, W_2, W_3 relatives aux zéros de $\sqrt{g^\circ}$ une fois établies par le calcul direct qui vient d'être fait, les fig. 12a ... 12m permettent de reconnaître immédiatement l'exactitude des résultats suivants :

$W_1 = iK_1$ pour les zéros de $\sqrt{g^\circ}$, $\sqrt{g}$, $\sqrt{\gamma^\circ_2}$, $\sqrt{\gamma_2}$

$= -K_1$ » » » » $\sqrt{g'}$, $\sqrt{g''}$, $\sqrt{\gamma'_3}$, $\sqrt{\gamma''_3}$

$= -iK_1$ » » » » $\sqrt{\gamma_1^\circ}$, $\sqrt{\gamma_4}$, $\sqrt{\gamma^\circ_3}$, $\sqrt{\gamma_3}$

$= K_1$ » » » » $\sqrt{\gamma'_1}$, $\sqrt{\gamma''_4}$, $\sqrt{\gamma'_2}$, $\sqrt{\gamma''_2}$

$W_3 = -(1-i)K_3$ pour les zéros de $\sqrt{g^\circ}$, $\sqrt{g''}$, $\sqrt{\gamma^\circ_4}$, $\sqrt{\gamma''_4}$

$= (1-i)K_3$ » » » » $\sqrt{g}$, $\sqrt{g'}$, $\sqrt{\gamma_4}$, $\sqrt{\gamma'_4}$

$= -(1+i)K_3$ » » » » $\sqrt{\gamma^\circ_2}$, $\sqrt{\gamma'_2}$, $\sqrt{\gamma^\circ_3}$, $\sqrt{\gamma'_3}$

$= (1+i)K_3$ » » » » $\sqrt{\gamma_2}$, $\sqrt{\gamma''_2}$, $\sqrt{\gamma_3}$, $\sqrt{\gamma''_3}$

et $W_2 = 0$ pour les zéros de toutes ces 16 fonctions abéliennes.

Seules les intégrales relatives aux zéros des fonctions $\sqrt{\xi_5}, \sqrt{\xi_6}, \sqrt{x_5}, \sqrt{x_6}$ ne peuvent être traitées de cette manière sommaire. Elles ne présentent d'ailleurs aucune difficulté nouvelle.

Zéros de $\sqrt{\xi_5}$.

Soit à déterminer

$$a) \qquad \frac{1}{2}W_1 = \int_{\Pi_0}^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}.$$

(On se souvient que les zéros de chacune des fonctions $\sqrt{\xi_5}, \sqrt{\xi_6}, \sqrt{x_5}, \sqrt{x_6}$ se confondent). Réduisant d'abord à la 1re nappe, il vient

$$\frac{1}{2}W_1 = -i\int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = i\varepsilon'\int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt[4]{(1+z^4)^3}};$$

posant ensuite

$$z = \frac{\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}}, \quad dz = \frac{d\zeta}{(1-\zeta^4)^{\frac{5}{4}}},$$

cette intégrale prend la forme

$$i\varepsilon'\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}},$$

ensorte que

$$\frac{1}{2}W_1 = i\varepsilon' K_5 = \varepsilon K_5 = \frac{1+i}{2}K_1.$$

$$b) \frac{1}{2}W_2 = \int_{\Pi_0}^{-\varepsilon'\infty} \frac{z\,dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = -i\int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{z\,dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = -\int_0^{\infty} \frac{z\,dz}{\sqrt[4]{(1+z^4)^3}}$$

Substituant

$$z = \frac{\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}}$$

on obtient $$\frac{1}{2}W_2 = -\int_0^1 \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt[4]{(1-\zeta^4)^3}} = -K_2.$$

c) $$\frac{1}{2}W_3 = \int_{II_0}^{-\varepsilon' \infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\int_0^{-\varepsilon' \infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \varepsilon' \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} =$$
$$= \varepsilon' K_1 = (1-i)K_3.$$

D'une manière analogue, on trouve aisément :

Pour les zéros de $\sqrt{\xi_6}$: $\frac{1}{2}W_1 = \int_{I\ 0}^{\varepsilon \infty} dw_1 = -\frac{1-i}{2}K_1$,

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_{I\ 0}^{\varepsilon \infty} dw_2 = -K_2,\ \frac{1}{2}W_3 = \int_{I\ 0}^{\varepsilon \infty} dw_3 = -(1+i)K_3.$$

Pour les zéros de $\sqrt{x_5}$: $\frac{1}{2}W_1 = \int_{IV\ 0}^{\varepsilon' \infty} dw_1 = -\frac{1+i}{2}K_1$,

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_{IV\ 0}^{\varepsilon' \infty} dw_2 = -K_2,\ \frac{1}{2}W_3 = \int_{IV\ 0}^{\varepsilon' \infty} dw_3 = -(1-i)K_3.$$

Pour les zéros de $\sqrt{x_6}$: $\frac{1}{2}W_1 = \int_{III\ 0}^{-\varepsilon \infty} dw_1 = \frac{1-i}{2}K_1$,

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_{III\ 0}^{-\varepsilon \infty} dw_2 = -K_2,\ \frac{1}{2}W_3 = \int_{III\ 0}^{-\varepsilon \infty} dw_3 = (1+i)K_3.$$

Valeur numérique de quelques intégrales normales.

A l'aide des formules

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\pi(2-i)}{20}\left[-2\frac{w_1}{K_1} + \frac{w_2}{K_2} + \frac{w_3}{K_3}\right], \\ u_2 = \frac{\pi(1-3i)}{20}\left[\frac{w_1}{K_1} - i\frac{w_2}{K_2} + \frac{1+i}{2}\frac{w_3}{K_3}\right], \\ u_3 = \frac{\pi(3+i)}{20}\left[\frac{w_1}{K_1} - (1-i)\frac{w_2}{K_2} + \frac{1+i}{2}\frac{w_3}{K_3}\right] \end{cases}$$

(comp. p. 115) et du tableau p. 110 on construit sans difficulté le

tableau suivant, ne contenant que celles des intégrales dont il sera fait usage ultérieurement :

Nappes.	$\int_0^1 du_1^{(+)}$	$\int_0^1 du_2^{(+)}$	$\int_0^1 du_3^{(+)}$
I	0	$-\frac{\pi i}{4}$	$\frac{\pi i}{4}$
II	$-\frac{\pi}{20}(3+i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$	$-\frac{\pi}{20}(4+3i)$
III	$\frac{\pi}{10}(2-i)$	$\frac{\pi}{20}(4+3i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$
IV	$\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$-\frac{3}{20}\pi(2-i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$
Nappes.	$\int_0^1 du_1^{(-)}$	$\int_0^1 du_2^{(-)}$	$\int_0^1 du_3^{(-)}$
I	$-\frac{\pi}{20}(3+i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$	$-\frac{\pi}{20}(4+3i)$
II	$\frac{\pi}{10}(2-i)$	$\frac{\pi}{20}(4+3i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$
III	$\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$-\frac{3}{20}\pi(2-i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$
IV	0	$-\frac{\pi i}{4}$	$\frac{\pi i}{4}$

Il n'est peut-être pas sans intérêt de réunir aussi dans un tableau les valeurs numériques des sommes U_h qui sont aux intégrales u_h ce qu'étaient les W_h aux intégrales w_h. Dans ce tableau, les intégrales qui se trouvent sur une ligne horizontale ont pour limites supérieures les zéros de la fonction abélienne placée en tête de cette même ligne. Par exemple dans la première ligne U_h signifie $\int_{0,\,III}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_h + \int_{0,\,II}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_h$, dans la deuxième

$$U_h = \int_{0,\,III}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_h + \int_{0,\,II}^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_h, \text{ etc.}$$

	U_1	U_2	U_3
$\sqrt{g^0}$	$-\frac{\pi}{20}(3+i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi}{10}(2-i)$
$\sqrt{g}$	$-\frac{\pi i}{20}(7-i)$	$\frac{\pi}{10}(2-i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$
$\sqrt{g'}$	$\frac{\pi}{4}(1-i)$	0	0
$\sqrt{g''}$	$\frac{\pi}{20}(3+i)$	$\frac{\pi i}{10}(3+i)$	$-\frac{\pi}{10}(3+i)$
$\sqrt{\gamma^0_1}$	$\frac{\pi i}{20}(7-i)$	$-\frac{\pi}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi i}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma_1}$	$\frac{\pi}{20}(3+i)$	$-\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$\frac{\pi}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma'_1}$	$-\frac{\pi}{20}(3+i)$	$-\frac{\pi i}{10}(3+i)$	$\frac{\pi}{10}(3+i)$
$\sqrt{\gamma''_1}$	$-\frac{\pi}{4}(1-i)$	0	0
$\sqrt{\gamma^0_2}$	$-\frac{\pi}{4}(1+i)$	0	0
$\sqrt{\gamma_2}$	$-\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$\frac{\pi}{10}(3+i)$	$\frac{\pi i}{10}(3+i)$
$\sqrt{\gamma'_2}$	$-\frac{\pi}{20}(7-i)$	$-\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$\frac{\pi}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma''_2}$	$\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$\frac{\pi}{10}(2-i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma^0_3}$	$\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$-\frac{\pi}{10}(3+i)$	$-\frac{\pi i}{10}(3+i)$
$\sqrt{\gamma_3}$	$\frac{\pi}{4}(1+i)$	0	0
$\sqrt{\gamma'_3}$	$-\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$-\frac{\pi}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi i}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma''_3}$	$\frac{\pi}{20}(7-i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi}{10}(2-i)$
$\sqrt{\xi_5}$	$-\frac{\pi}{10}(4+3i)$	$\frac{3}{10}\pi(2-i)$	$\frac{\pi}{10}(8+i)$
$\sqrt{\xi_6}$	$-\frac{\pi}{10}(4+3i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi i}{10}(4+3i)$
$\sqrt{x_5}$	$\frac{\pi i}{2}$	$\frac{\pi i}{2}$	$-\frac{\pi i}{2}$
$\sqrt{x_6}$	$\frac{\pi i}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

Dans la théorie des fonctions abéliennes, on a rarement l'occasion de vérifier une formule générale par le calcul direct. Aussi la saisit-on volontiers, lorsque, comme c'est ici le cas, elle se présente tout naturellement. En effet, on est maintenant en état de vérifier la formule II, p. 114 de l'ouvrage de M. Weber, à savoir

$$\left(\sum_1^3 h \left(\int_\alpha^{\alpha'} du_h + \int_\beta^{\beta'} du_h\right)\right) = \left(\frac{1}{2}\omega_1, \frac{1}{2}\omega_2, \frac{1}{2}\omega_3\right),$$

où α, β sont les zéros d'une fonction abélienne $\sqrt{x}$, α', β' les zéros d'une autre fonction abélienne $\sqrt{x'}$ et ω_1, ω_2, ω_3 un système de périodes à la caractéristique $(\omega) = (\sqrt{x}) + (\sqrt{x'})$.

Vérification pour $\sqrt{g^0}$ $\sqrt{g}$.

Dans ce cas

$$(\omega) = (\sqrt{g^0}) + (\sqrt{g}) = \binom{100}{101} + \binom{011}{110} = \binom{111}{011},$$

$$\frac{1}{2}\omega_1 = \frac{1}{2}a_{11} + \frac{1}{2}a_{12} + \frac{1}{2}a_{13} = -\frac{1}{5}\pi(2-i) -$$

$$-\frac{\pi i}{10}(3+i) + \frac{1}{10}\pi(3+i) = 0$$

$$\frac{1}{2}\omega_2 = \frac{1}{2}a_{21} + \frac{1}{2}a_{22} + \frac{1}{2}a_{23} + \frac{1}{2}\pi i = -\frac{1}{10}\pi i(3+i) -$$

$$-\frac{2}{10}\pi(2-i) - \frac{1}{10}\pi(2-i) + \frac{1}{2}\pi i = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i$$

$$\frac{1}{2}\omega_3 = \frac{1}{2}a_{31} + \frac{1}{2}a_{32} + \frac{1}{2}a_{33} + \frac{1}{2}\pi i = \frac{1}{10}\pi(3+i) -$$

$$-\frac{1}{10}\pi(2-i) - \frac{2}{10}\pi(3+i) + \frac{1}{2}\pi i = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i$$

et

$$V_h = \int_{\mathrm{III}\, e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{\mathrm{III}\, e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_h + \int_{\mathrm{II}\, e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{\mathrm{II}\, e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_h .$$

Or, il est à remarquer qu'il ne serait pas exact d'écrire

$$\int_{\text{III}\,e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{\text{III}\,e^{-\frac{5}{12}\pi i}} = \int_{\text{III}\,0}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} - \int_{\text{III}\,0}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}},$$

vu que les limites inférieures, 0, dans la surface de Riemann adoptée, ne coïncident pas, mais sont séparées par des lignes de passage. Cette remarque s'applique également à $\int_{\text{II}\,e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{\text{II}\,e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_h$ et, en général, à toutes les intégrales de ce genre. Voici comment on peut procéder. On fera décrire à la variable z une ligne continue, partant de la limite inférieure $e^{\frac{7}{12}\pi i}$ dans la 3^{me} nappe et allant d'abord jusqu'à 0, puis de 0 à $+1$. Arrivé en $+1$, z contournera ce point un certain nombre de fois jusqu'à ce qu'il arrive dans la nappe voulue, ce qui est permis, attendu que les intégrales relatives à ces courbes infiniment petites sont négligeables. Ensuite z ira de $+1$ à 0 et enfin de 0 à la limite supérieure $e^{-\frac{5}{12}\pi i}$. De cette manière on obtient

$$V_1 = \int_{\text{III}\,e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{0} du_1 + \int_{\text{IV}\,0}^{1} du_1^{(-)} + \int_{\text{III}\,1}^{0} du_1^{(+)} + \int_{\text{III}\,0}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_1 +$$

$$+ \int_{\text{II}\,e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{0} du_1 + \int_{\text{II}\,0}^{1} du_1^{(+)} + \int_{\text{III}\,1}^{0} du_1^{(-)} + \int_{\text{II}\,0}^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_1 =$$

$$= \left[\int_{\text{III}\,0}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\text{II}\,0}^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_1\right] - \left[\int_{\text{III}\,0}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\text{II}\,0}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1\right] +$$

$$+ \int_{\text{IV}\,0}^{1} du_1^{(--)} - \int_{\text{III}\,0}^{1} du_1^{(+)} + \int_{\text{II}\,0}^{1} du_1^{(+)} - \int_{\text{III}\,0}^{1} du_1^{(-)} =$$

$$= -\frac{1}{20}\pi i(7-i) + \frac{1}{20}\pi(3+i) + 0 - \frac{1}{10}\pi(2-i) -$$

$$- \frac{1}{20}\pi(3+i) - \frac{1}{20}\pi i(3+i) = -\frac{1}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i$$

et de même

$$V_2 = \frac{3}{10}\pi - \frac{9}{10}\pi i, \quad V_3 = -\frac{1}{10}\pi + \frac{3}{10}\pi i.$$

Les valeurs trouvées peuvent s'écrire

$$V_1 = \underline{-\frac{1}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i},$$

$$V_2 = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i \ \underline{+\frac{4}{5}\pi - \frac{7}{5}\pi i},$$

$$V_3 = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i \ \underline{+\frac{2}{5}\pi - \frac{1}{5}\pi i}.$$

La formule en question est vérifiée si dans les trois intégrales les expressions soulignées forment un système de périodes. On peut donc poser, en supprimant le facteur π

$$-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i = m_1 i + \frac{1}{\pi}(aa_{11} + ba_{12} + ca_{13}) =$$

$$= m_1 i - \frac{2}{5}(2-i)\,a - \frac{1}{5}i(3+i)\,b + \frac{1}{5}(3+i)\,c,$$

$$\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i = m_2 i + \frac{1}{\pi}(aa_{21} + ba_{22} + ca_{23}) =$$

$$= m_2 i - \frac{1}{5}i(3+i)\,a - \frac{2}{5}(2-i)\,b - \frac{1}{5}(2-i)\,c,$$

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i = m_3 i + \frac{1}{\pi}(aa_{31} + ba_{32} + ca_{33}) =$$

$$= m_3 i + \frac{1}{5}(3+i)\,a - \frac{1}{5}(2-i)\,b - \frac{2}{5}(3+i)\,c.$$

Les nombres entiers a, b, c, m_1, m_2, m_3 doivent satisfaire aux six équations résultant de la séparation des parties réelles et imaginaires qui, après multiplication par 5, prennent la forme

$$\begin{array}{l|l} -1 = -4a + b + 3c & -2 = m_1 + 2a - 3b + c, \\ 4 = a - 4b - 2c & -7 = m_2 - 3a + 2b + c, \\ 2 = 3a - 2b - 6c & -1 = m_3 + a + b - 2c. \end{array}$$

On en tire

$$a = 0, \quad b = -1, \quad c = 0,$$
$$m_1 = -5, \quad m_2 = -5, \quad m_3 = 0.$$

Vérification pour $\sqrt{g^0}\sqrt{g'}$.

On trouve successivement

$$(\omega) = (\sqrt{g^0}) + (\sqrt{g'}) = \binom{100}{101} + \binom{011}{001} = \binom{111}{100},$$

$$\frac{1}{2}\omega_1 = \frac{1}{2}\pi i, \quad \frac{1}{2}\omega_2 = -\frac{1}{2}\pi, \quad \frac{1}{2}\omega_3 = -\frac{1}{2}\pi,$$

$$V_1 = \int_{\text{II}}^{\text{IV}} \frac{e^{\frac{7}{12}\pi i}}{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\text{III}}^{\text{III}} \frac{e^{-\frac{1}{12}\pi i}}{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1 = \left[\int_{\text{IV}}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\text{III}}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1\right] -$$

$$-\left[\int_{\text{II}}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\text{III}}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1\right] + \int_{\text{IV}}^{1} du_1^{(-)} - \int_{\text{III}}^{1} du_1^{(+)} =$$

$$= \frac{1}{4}\pi(1-i) + \frac{1}{20}\pi(3+i) + 0 - \frac{1}{10}\pi(2-i) = \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i,$$

$$V_1 = \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i = \frac{1}{2}\pi i + \underline{\frac{1}{5}\pi - \frac{3}{5}\pi i},$$

$$V_2 = -\frac{3}{10}\pi - \frac{3}{5}\pi i = -\frac{1}{2}\pi + \underline{\frac{1}{5}\pi - \frac{3}{5}\pi i},$$

$$V_3 = \frac{1}{10}\pi + \frac{1}{5}\pi i = -\frac{1}{2}\pi + \underline{\frac{3}{5}\pi + \frac{1}{5}\pi i},$$

$1 = -4a + b + 3c$	$-3 = m_1 + 2a - 3b + c$	$a = -1$	$m_1 = 0$
$1 = a - 4b - 2c$	$-3 = m_2 - 3a + 2b + c$	$b = 0$	$m_2 = -5$
$3 = 3a - 2b - 6c$	$1 = m_3 + a + b - 2c$	$c = -1$	$m_3 = 0$

Vérification pour $\sqrt{g^0}\,\sqrt{g''}$.

Il vient

$$(\omega) = (\sqrt{g^0}) + (\sqrt{g''}) = \binom{100}{101} + \binom{111}{001} = \binom{011}{100},$$

$$\frac{1}{2}\omega_1 = \frac{2}{5}\pi + \frac{3}{10}\pi i\,,\quad \frac{1}{2}\omega_2 = -\frac{3}{5}\pi + \frac{3}{10}\pi i,$$

$$\frac{1}{2}\omega_3 = = -\frac{4}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i,$$

$$V_1 = \int_{III}^{III} e^{\frac{11}{12}\pi i} du_1 + \int_{II}^{IV} e^{-\frac{5}{12}\pi i} du_1 = \left[\int_{III}^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_1 + \int_{IV}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_1\right] -$$

$$-\left[\int_{III}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1 + \int_{II}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1\right] + \int_{II}^{1} du_1^{(+)} - \int_{IV}^{1} du_1^{(+)} =$$

$$= \frac{1}{20}\pi(3+i) + \frac{1}{20}\pi(3+i) - \frac{1}{20}\pi(3+i) - \frac{1}{20}\pi i(3+i) =$$

$$= \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i\,,$$

$$V_1 = \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i = \frac{2}{5}\pi + \frac{3}{10}\pi i - \underline{\frac{1}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i},$$

$$V_2 = \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i = -\frac{3}{5}\pi + \frac{3}{10}\pi i + \underline{\frac{4}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i},$$

$$V_3 = -\frac{2}{5}\pi - \frac{3}{10}\pi i = -\frac{4}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i + \underline{\frac{2}{5}\pi - \frac{1}{5}\pi i},$$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
-1 = -4a + b + 3c & -2 = m_1 + 2a - 3b + c & a = 0 & m_1 = -5 \\
4 = a - 4b - 2c & -2 = m_2 - 3a + 2b + c & b = -1 & m_2 = 0 \\
2 = 3a - 2b - 6c & -1 = m_3 + a + b - 2c & c = 0 & m_3 = 0
\end{array}$$

Si $\sqrt{x_1}, \sqrt{\xi_1}$; $\sqrt{x_2}, \sqrt{\xi_2}$ sont deux couples de fonctions abéliennes appartenant au même groupe, c'est-à-dire satisfaisant à la condition

$$(\sqrt{x_1\xi_1}) = (\sqrt{x_2\xi_2}),$$

une fonction de la forme

$$\sqrt{\Psi} = a_1\sqrt{x_1\xi_1} + a_2\sqrt{x_2\xi_2},$$

où a_1 et a_2 désignent des constantes, a été appelée par M. W. (p. 114) une *fonction-racine (Wurzelfunction)* du 2d degré et du 2d ordre. Sa caractéristique est $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{x_1\xi_1})$ et elle possède quatre zéros du premier ordre dont un est arbitraire. Les constantes a_1, a_2 peuvent être déterminées de manière que $\sqrt{\Psi}$ s'annule en un des zéros α, β d'une fonction abélienne $\sqrt{q}$, par exemple en α. M. Weber démontre (p. 116 et suiv.) qu'alors les trois autres zéros c_1, c_2, c_3 de cette fonction $\sqrt{\Psi}$ sont en même temps les zéros de la fonction $\vartheta_{(\omega)}\left(\int_\alpha^\zeta du_h\right)$, à la condition toutefois que $(\omega) = (\sqrt{\Psi}) + (\sqrt{q})$. Lorsque (ω) est une caractéristique impaire, $\sqrt{\Psi}$ dégénère en un produit de deux fonctions abéliennes aux caractéristiques $(\sqrt{q})$ et $(\sqrt{\Psi})+(\sqrt{q})$. Il s'ensuit, conformément à ce qui a été dit précédemment, qu'une fonction $\vartheta_{(\omega)}\left(\int_\alpha^\zeta du_h\right)$ impaire s'annule pour $\zeta = \alpha$ et en outre pour les zéros de la fonction abélienne qui porte la même caractéristique.

Détermination de c^0_1, c^0_2, c^0_3.

Parmi les 36 systèmes de points c_1, c_2, c_3, répondant aux 36 caractéristiques paires, il en est un qui mérite une attention spéciale. C'est celui qui représente les zéros du ϑ fondamental $\vartheta\left(\int_\alpha^\zeta du_h\right)$. Il correspond à $(\omega) = \binom{000}{000}$, soit $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q})$ et sera désigné par c^0_1, c^0_2, c^0_3. On peut le trouver de la manière suivante :

On choisira pour $\sqrt{q}$ la fonction $\sqrt{x_4} = \sqrt{s-1}$, en sorte que les intégrales qui entrent comme arguments dans les fonctions ϑ ont toutes pour limite inférieure le point $z=0, s=1$. Ensuite on établira le groupe

$$(\sqrt{q}) = (\sqrt{x_4}) = \binom{100}{100} = \underbrace{\binom{010}{110}}_{\xi_3} + \underbrace{\binom{110}{010}}_{\xi_5} = \underbrace{\binom{010}{111}}_{\gamma^0_2} + \underbrace{\binom{110}{011}}_{\gamma'_1} = \underbrace{\binom{001}{101}}_{x_3} + \underbrace{\binom{101}{001}}_{x_5} =$$

$$= \underbrace{\binom{001}{111}}_{\gamma^0_1} + \underbrace{\binom{101}{\quad}}_{\gamma'_2} = \underbrace{\binom{111}{010}}_{\gamma''_3} + \underbrace{\binom{011}{110}}_{g} = \underbrace{\binom{111}{001}}_{g''} + \underbrace{\binom{011}{101}}_{\gamma_3}$$

On peut alors poser

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_3 x_5} + a\sqrt{\xi_3 \xi_5}$$

à la condition que l'équation

$$\sqrt{x_3 \xi_3} + \sqrt{x_5 \xi_5} + \sqrt{x_4 \xi_4} = 0$$

soit identique, à un facteur constant près, à $s^4 + z^4 - 1 = 0$. Or, on voit aisément qu'à cet effet il suffit d'admettre

$$x_4 = s-1, \quad x_3 = z-i, \quad x_5 = s-\varepsilon' z,$$
$$\xi_4 = -\varepsilon'(s+1), \quad \xi_3 = \varepsilon(z+i), \quad \xi_5 = \varepsilon(s+\varepsilon' z)$$

et en conséquence

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{(z-i)(s-\varepsilon' z)} + a\sqrt{i(z+i)(s+\varepsilon' z)}.$$

Afin de pouvoir utiliser directement les formules finales de M. W. (p. 118 et 119), à savoir :

$$(1) \qquad x_1 - \lambda \xi_2 = 0, \quad x_2 - \lambda \xi_1 = 0, \quad \xi_3 = 0$$

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 x_2 = \lambda''^2 \xi_1 \xi_2 \\ 2\lambda'' \xi_1 \xi_2 = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 - x_3 \xi_3 \end{cases}$$

on remplacera par $\dfrac{x_1, \quad x_2, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad x_3, \quad \xi_3}{x_3, \quad x_5, \quad \xi_3, \quad \xi_5, \quad \xi_4, \quad x_4}$.

Par là, ces équations prennent la forme

$$(1^a) \qquad \begin{cases} x_3 - \lambda \xi_5 = z-i \quad -\lambda\varepsilon(s+\varepsilon' z) = 0 \\ x_5 - \lambda \xi_3 = s-\varepsilon' z - \lambda\varepsilon(z+i) \quad = 0 \\ x_4 = s-1 = 0 \end{cases}$$

$$(2^a) \qquad \begin{cases} x_3 x_5 = \lambda''^2 \xi_3 \xi_5 \\ 2\lambda'' \xi_3 \xi_5 = x_3 \xi_3 + x_5 \xi_5 - x_4 \xi_4. \end{cases}$$

Les équations (1ª) déterminent les deux valeurs de λ, λ' et λ'' qui correspondent aux zéros de $\sqrt{x_1}$. Mais dans le cas actuel ces deux valeurs sont égales; par conséquent l'élimination de s et z entre ces trois équations devient superflue. En effet, en faisant $z=0$, $s=1$ dans l'équation

$$z-i-\lambda\varepsilon(s+\varepsilon' z)=0,$$

on en tire

$$\lambda=\lambda'=\lambda''=a=-\frac{i}{\varepsilon}=-\varepsilon.$$

La valeur de λ'' introduite dans (2ª), ces équations deviennent

$$z(s+\varepsilon)=0, \tag{3}$$

$$\sqrt{2}s^2-2\varepsilon' sz+i\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)z^2-2\varepsilon s-2z+i\sqrt{2}=0. \tag{4}$$

Géométriquement, l'équation (3) représente deux lignes droites et l'équation (4) une conique. Les coordonnées de leurs points d'intersection sont les valeurs cherchées. En rejetant la solution $z=0$, $s=1$, on trouve aisément

$c^\circ_1 : z = i\sqrt[4]{2}$, $s=-\varepsilon$, nappe III,

$c^\circ_2 : z = -i\sqrt[4]{2}$, $s=-\varepsilon$, » IV,

$c^\circ_3 : z=0$, $s=i$, » II.

Détermination de quelques autres systèmes c_1, c_2, c_3.

Il ne peut pas être question ici de déterminer tous les 36 systèmes de points c_1, c_2, c_3. Quelques exemples suffiront, et on donnera la préférence à ceux qui n'exigent pas des calculs trop compliqués. D'ailleurs, le procédé employé étant toujours le même, les calculs suivants peuvent se passer de commentaire.

$$\vartheta_{\binom{100}{000}}\left(\int_0^s du_h\right).$$

Dans ce cas

$$(\omega)=\binom{100}{000},\ (\sqrt{q})=\binom{100}{100},\ (\sqrt{\varphi})=(\omega)+(\sqrt{q})=\binom{000}{100}.$$

Le groupe

$$\binom{000}{100} = \underset{\xi_6}{\binom{010}{010}} + \underset{\xi_3}{\binom{010}{110}} = \underset{\gamma''_1}{\binom{010}{011}} + \underset{\gamma^\circ_2}{\binom{010}{111}} = \underset{x_6}{\binom{001}{001}} + \underset{x_3}{\binom{001}{101}} = \underset{\gamma''_2}{\binom{001}{011}} +$$

$$+ \underset{\gamma^\circ_1}{\binom{001}{111}} = \underset{\gamma'_3}{\binom{011}{010}} + \underset{g}{\binom{011}{110}} = \underset{g'}{\binom{011}{001}} + \underset{\gamma_3}{\binom{011}{101}}$$

permet de poser

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_3 x_6} + a\sqrt{\xi_3 \xi_6},$$

$$\sqrt{x_3 \xi_3} + \sqrt{x_6 \xi_6} + \sqrt{x_1 \xi_1} = 0,$$

où

$$x_3 = z - i, \qquad x_6 = s + \varepsilon z, \qquad x_1 = s - 1,$$

$$\xi_3 = \varepsilon'(z+i), \quad \xi_6 = \varepsilon'(s - \varepsilon z), \quad \xi_1 = -\varepsilon(s+1).$$

Les trois équations de M. W.

$$x_1 - \lambda \xi_2 = 0, \quad \begin{cases} x_1 x_2 = \lambda''^2 \xi_1 \xi_2, \\ 2\lambda'' \xi_1 \xi_2 = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 - x_3 \xi_3 \end{cases}$$

deviennent

$$x_3 - \lambda \xi_6 = z - i - \lambda \varepsilon'(s - \varepsilon z) = 0,$$

$$x_3 x_6 = \lambda''^2 \xi_3 \xi_6,$$

$$2\lambda'' \xi_3 \xi_6 = x_3 \xi_3 + x_6 \xi_6 - x_1 \xi_1.$$

De la première on tire pour $z = 0$, $s = 1$ la valeur

$$\lambda' = \lambda'' = a = \varepsilon'$$

et les deux autres, après simplification, prennent la forme

$$z(s + \varepsilon') = 0,$$

$$(1+i)s^2 + 2isz + (1 - i + 2\varepsilon')z^2 - 2s + 2\varepsilon z + 1 - i = 0.$$

En les résolvant on obtient

$$c_1 : z = 0, \qquad s = -i, \quad \text{nappe IV},$$

$$c_2 : z = i\sqrt[4]{2}, \quad s = -\varepsilon', \quad \text{» I},$$

$$c_3 : z = -i\sqrt[4]{2}, \quad s = -\varepsilon', \quad \text{» III}.$$

$$\vartheta_{\binom{010}{101}}\left(\int_0^s du_h\right).$$

Dans ce cas

$$(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q}) + (\omega) = \binom{100}{100} + \binom{010}{101} = \binom{110}{001},$$

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_2 x_3} + a\sqrt{\xi_2 \xi_3},$$

$$\sqrt{x_2 \xi_2} + \sqrt{x_3 \xi_3} + \sqrt{x_4 \xi_4} = 0,$$

$$x_4 = s-1, \quad x_2 = \frac{1}{2}(z+1), \quad x_3 = -\frac{1}{2}(z-i),$$

$$\xi_4 = s+1, \quad \xi_2 = z-1, \quad \xi_3 = z+i.$$

L'équation

$$x_2 - \lambda \xi_3 = \frac{1}{2}(z+1) - \lambda(z+i) = 0$$

donne pour $z = 0$,

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = a = -\frac{1}{2}i$$

et des équations

$$0.z^2 + 2(1-i)z = 0$$

$$s^2 - iz^2 + (1+i)z - 1 = 0$$

on tire

$$c_1 : z = 0, \quad s = -1, \quad \text{nappe III},$$

$$c_2 : z = \infty, \quad \frac{s}{z} = \quad \varepsilon, \quad \text{» I},$$

$$c_3 : z = \infty, \quad \frac{s}{z} = -\varepsilon, \quad \text{» III}.$$

$$\vartheta_{\binom{011}{111}}\left(\int_0^s du_h\right).$$

Ici $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q}) + (\omega) = \binom{100}{100} + \binom{011}{111} = \binom{111}{011}$,

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_5 \xi_6} + a\sqrt{x_6 \xi_5},$$

$$\sqrt{x_5 \xi_5} + \sqrt{x_6 \xi_6} + \sqrt{x_4 \xi_4} = 0,$$

$$x_5 = s - \varepsilon' z, \quad x_6 = s + \varepsilon z, \quad x_4 = s-1,$$

$$\xi_5 = \frac{1}{2}i(s+\varepsilon' z), \quad \xi_6 = \frac{1}{2}i(s-\varepsilon z), \quad \xi_4 = i(s+1).$$

L'équation

$$x_5 - \lambda x_6 = s - \varepsilon' z - \lambda(s + \varepsilon z) = 0$$

fournit pour $z = 0$, $s = 1$ la valeur

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = a = 1$$

et les deux équations

$$sz = 0,$$
$$s^2 + \sqrt{2}sz + z^2 - 1 = 0,$$

donnent

$$\left.\begin{array}{ll} c_1 : z = 0, & s = -1, \\ c_2 : z = 1, & s = 0 \\ c_3 : z = -1, & s = 0 \end{array}\right\} \text{ toutes les quatre nappes.}$$

$$\vartheta_{\binom{101}{101}}\left(\int_0^s du_h\right).$$

Dans ce cas on a

$$(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q}) + (\omega) = \binom{100}{100} + \binom{101}{101} = \binom{001}{001},$$
$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_4\xi_2} + a\sqrt{x_2\xi_4},$$
$$\sqrt{x_2\xi_2} + \sqrt{x_4\xi_4} + \sqrt{x_1\xi_1} = 0,$$
$$x_2 = z + 1, \quad x_4 = s + i, \qquad x_1 = s - 1,$$
$$\xi_2 = z - 1, \quad \xi_4 = -\frac{1}{2}(s - i), \quad \xi_1 = \frac{1}{2}(s + 1).$$

De l'équation

$$x_4 - \lambda x_2 = s + i - \lambda(z + 1) = 0$$

il suit pour $z = 0$, $s = 1$:

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = a = 1 + i.$$

Les deux coniques deviennent

$$sz + is + z - i = 0,$$
$$s^2 - (1 + i)sz - z^2 - (1 + i)s - (1 - i)z + i = 0.$$

Elles se coupent au point $z=0$, $s=1$ et en outre dans les trois points

$$c_1 : z = i, \qquad s = 0 \text{ dans les 4 nappes,}$$

$$c_2 : z = \frac{-i+\sqrt{7}}{2}, \; s = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \text{ nappe II,}$$

$$c_3 : z = \frac{-i-\sqrt{7}}{2}, \; s = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \quad \text{» I.}$$

$$\vartheta_{\binom{001}{110}}\left(\int_0^s du_h\right).$$

Ici $$(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q}) + (\omega) = \binom{100}{100} + \binom{001}{110} = \binom{101}{010},$$

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_2\xi_3} + a\sqrt{x_3\xi_2},$$

$$\sqrt{x_2\xi_2} + \sqrt{x_3\xi_3} + \sqrt{x_1\xi_1} = 0,$$

$$x_2 = z+1, \qquad x_3 = z-i, \qquad x_1 = s-1,$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}(z-1), \quad \xi_3 = -\frac{1}{2}(z+i), \quad \xi_1 = s+1.$$

De l'équation

$$x_2 - \lambda x_3 = z+1-\lambda(z-i) = 0$$

on tire pour $z=0$

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = a = i$$

et les coniques

$$0 \cdot z^2 + 2(1+i)z = 0,$$

$$s^2 + iz^2 + (1-i)z - 1 = 0$$

se coupent bien en $z=0$, $s=1$ et de plus en

$$c_1 : z = 0, \quad s = -1, \text{ nappe III,}$$

$$c_2 : z = \infty, \; \frac{s}{z} = \quad \varepsilon', \quad \text{» IV,}$$

$$c_3 : z = \infty, \; \frac{s}{z} = -\varepsilon', \quad \text{» II.}$$

Le problème de Riemann.

Au sujet de ce problème fondamental, M. Weber (p. 159 à 168), indique dans tous leurs détails les calculs nécessaires. En les suivant pas à pas, on arrivera sans difficulté aux résultats désirés. Au lieu d'une traduction à peu près littérale de cette partie de l'ouvrage de M. W., il sera plus utile de donner ici une application des formules trouvées à des cas particuliers en n'insistant que sur le commencement de la solution.

I. Les deux caractéristiques (k) et (k') sont paires.

Soit par exemple

$$(k)=\binom{010}{100},\quad k'=\binom{001}{100},\quad (k)+(k')=(\sqrt{x_1})+(\sqrt{x_2}).$$

En formant les deux groupes

$$(k)+(k')=\binom{011}{000}=\underbrace{\binom{100}{100}}_{x_1}+\underbrace{\binom{111}{100}}_{x_2}=\underbrace{\binom{100}{111}}_{\xi_2}+\underbrace{\binom{111}{111}}_{\xi_1}=\underbrace{\binom{010}{011}}_{\gamma''_1}+\underbrace{\binom{001}{011}}_{\gamma''_2}=$$
$$=\underbrace{\binom{010}{111}}_{\gamma^0_2}+\underbrace{\binom{001}{111}}_{\gamma^0_1}=\underbrace{\binom{101}{100}}_{\gamma_2}+\underbrace{\binom{110}{100}}_{\gamma_1}=\underbrace{\binom{101}{011}}_{\gamma'_2}+\underbrace{\binom{110}{011}}_{\gamma'_1},$$

$$(k)+(\sqrt{x_1})=\binom{110}{000}=\underbrace{\binom{100}{110}}_{\gamma^0_3}+\underbrace{\binom{010}{110}}_{\xi_3}=\underbrace{\binom{100}{111}}_{\xi_2}+\underbrace{\binom{010}{111}}_{\gamma^0_2}=\underbrace{\binom{001}{001}}_{x_6}+\underbrace{\binom{111}{001}}_{g''}=$$
$$=\underbrace{\binom{001}{111}}_{\gamma^0_1}+\underbrace{\binom{111}{111}}_{\xi_1}=\underbrace{\binom{011}{001}}_{g'}+\underbrace{\binom{101}{001}}_{x_5}=\underbrace{\binom{011}{110}}_{g}+\underbrace{\binom{101}{110}}_{x_4}$$

on remarque qu'ils possèdent les 4 caractéristiques communes

$$(\sqrt{y_1})=(\sqrt{\xi_1})=\binom{111}{111},\qquad (\sqrt{y_2})=(\sqrt{\xi_2})=\binom{100}{111},$$
$$(\sqrt{z_1})=(\sqrt{\gamma^0_1})=\binom{001}{111},\qquad (\sqrt{z_2})=(\sqrt{\gamma^0_2})=\binom{010}{111}.$$

Posant, en conséquence,

$$\sqrt{x_1}=\sqrt{s-1},\qquad \sqrt{x_2}=\sqrt{z+1},\qquad \sqrt{y_1}=\sqrt{s+1},$$
$$\sqrt{y_2}=\sqrt{z-1},\qquad \sqrt{z_1}=\sqrt{s-z+\varepsilon},\qquad \sqrt{z_2}=\sqrt{s-z+\varepsilon'},$$

on trouve aisément la formule

$$\sqrt{\frac{\chi_{\binom{010}{100}}}{\chi_{\binom{001}{100}}}} = \frac{\vartheta_{\binom{001}{100}}}{\vartheta_{\binom{010}{100}}} \cdot \frac{\vartheta_{\binom{010}{100}}(v_1, v_2, v_3)}{\vartheta_{\binom{001}{100}}(v_1, v_2, v_3)} = \sqrt[4]{-1} \cdot \frac{\vartheta_{\binom{010}{100}}(v_1, v_2, v_3)}{\vartheta_{\binom{001}{100}}(v_1, v_2, v_3)}$$

Désignant par $x_i^{(\nu)}, y_i^{(\nu)}, z_i^{(\nu)}$ les valeurs que prennent les fonctions x_i, y_i, z_i pour $\zeta = \zeta_\nu$, soit $s = s_\nu$, $z = z_\nu$, on a ici

$$\sqrt{\chi_{\binom{010}{100}}} =$$

$$= \Sigma \pm \sqrt{x_1 y_1 z_1}, \sqrt{x_1^{(1)} y_2^{(1)} z_2^{(1)}}, \sqrt{x_2^{(2)} y_1^{(2)} z_2^{(2)}}, \sqrt{x_2^{(3)} y_2^{(3)} z_1^{(3)}},$$

$$\sqrt{\chi_{\binom{001}{100}}} =$$

$$= \Sigma \pm \sqrt{x_2 y_2 z_2}, \sqrt{x_2^{(1)} y_1^{(1)} z_1^{(1)}}, \sqrt{x_1^{(2)} y_2^{(2)} z_1^{(2)}}, \sqrt{x_1^{(3)} y_1^{(3)} z_2^{(3)}},$$

et les arguments v_1, v_2, v_3 sont déterminés par la congruence

$$(v_1, v_2, v_3) \equiv (\overset{3}{h}_1 (\int_\alpha^\zeta du_h + \int_\beta^{\zeta_1} du_h + \int_\alpha^{\zeta_2} du_h + \int_\beta^{\zeta_3} du_h)),$$

où α et β signifient les zéros d'une fonction abélienne quelconque.

II. Les caractéristiques (k) et (k') sont impaires.

Soit

$$(k) = (\sqrt{z_1}) = (\sqrt{\gamma'_1}) = \binom{001}{111}, \qquad (k') = (\sqrt{z_2}) = (\sqrt{\gamma'_2}) = \binom{010}{111}.$$

Alors on a

$$(\sqrt{x_1 x_2}) = (\sqrt{y_1 y_2}) = (\sqrt{z_1 z_2}) = (k) + (k') = \binom{011}{000}$$

et les caractéristiques

$$(\sqrt{x_1 y_1 z_1}) = (k) + (\sqrt{x_1 y_1}) = (k_1) = \binom{001}{111} + \binom{100}{100} + \binom{111}{111} = \binom{010}{100},$$

$$(\sqrt{x_1 y_1 z_2}) = (k') + (\sqrt{x_1 y_1}) = (k'_1) = \binom{010}{111} + \binom{100}{100} + \binom{111}{111} = \binom{001}{100},$$

sont paires. En admettant encore, comme dans le cas précédent,

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{s-1}, \quad \sqrt{x_2} = \sqrt{z+1}, \quad \sqrt{y_1} = \sqrt{\xi_1} = \sqrt{s+1},$$

$$\sqrt{y_2} = \sqrt{\xi_2} = \sqrt{z-1}, \quad \sqrt{z_1} = \sqrt{\gamma'_1} = \sqrt{s-z+\varepsilon},$$

$$\sqrt{z_2} = \sqrt{\gamma'_2} = \sqrt{s-z+\varepsilon'},$$

Fig. 1.

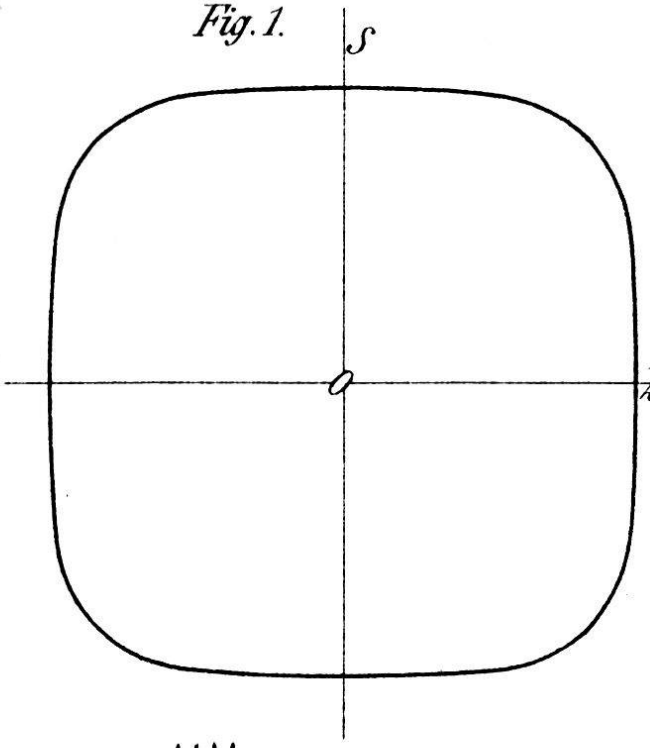


Fig. 6.

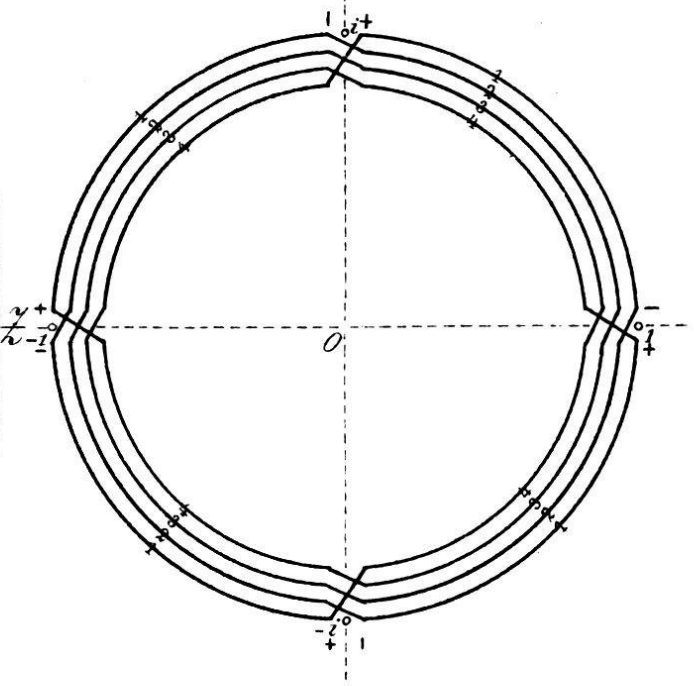


Fig. 4.

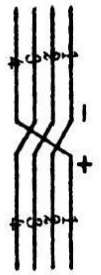


Fig. 5.

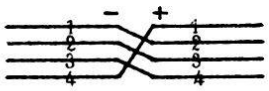
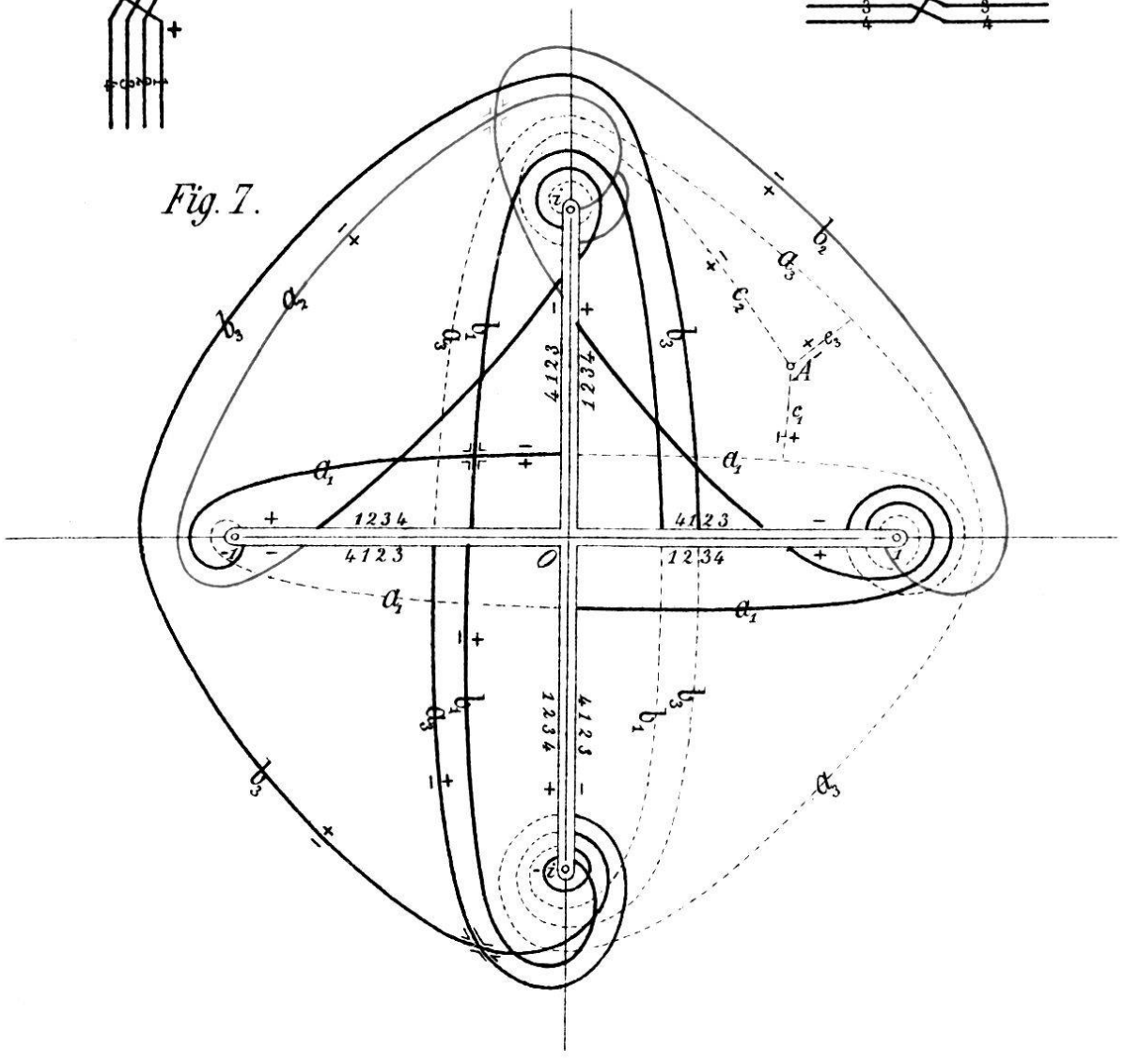


Fig. 7.



H. Amstein.

Lith. J. Chappuis, Lausanne.

Fig. 2.

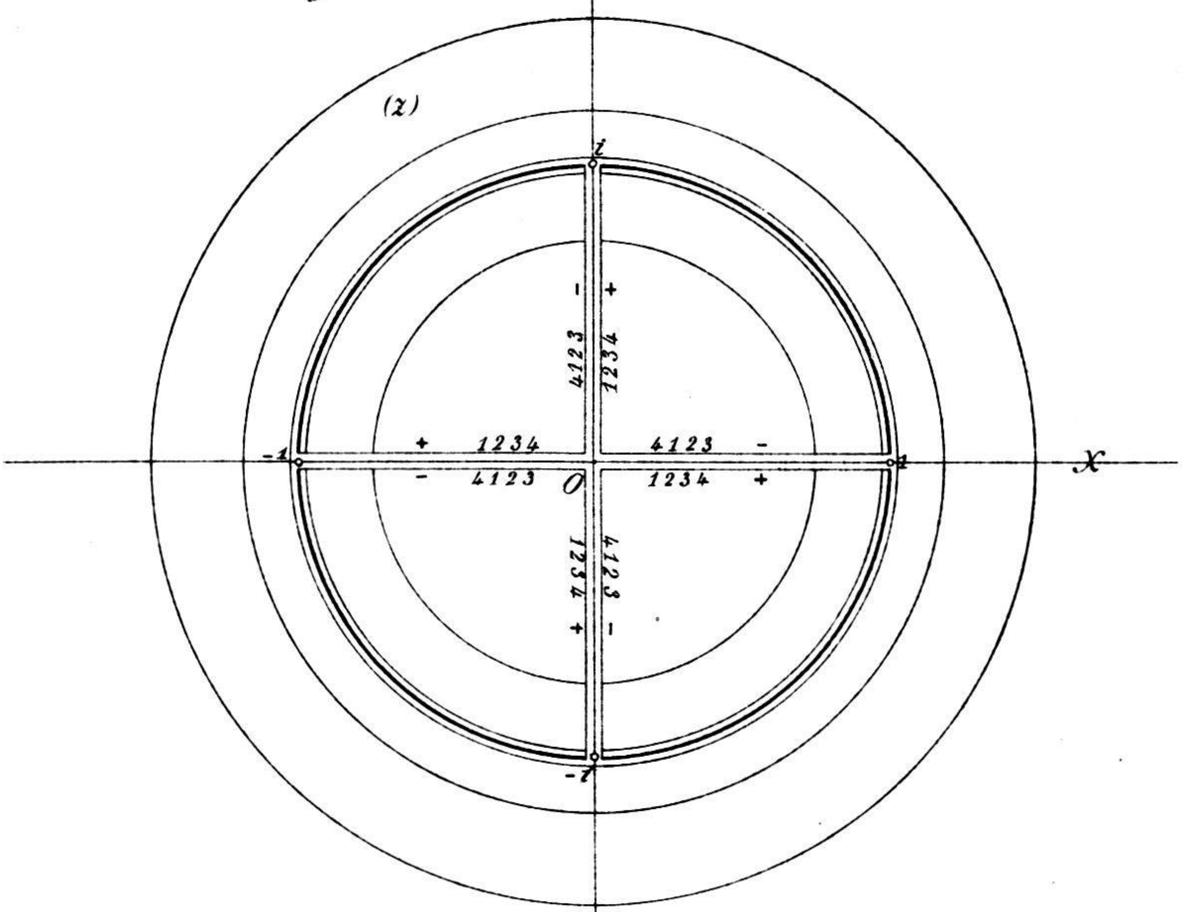


Fig. 3.

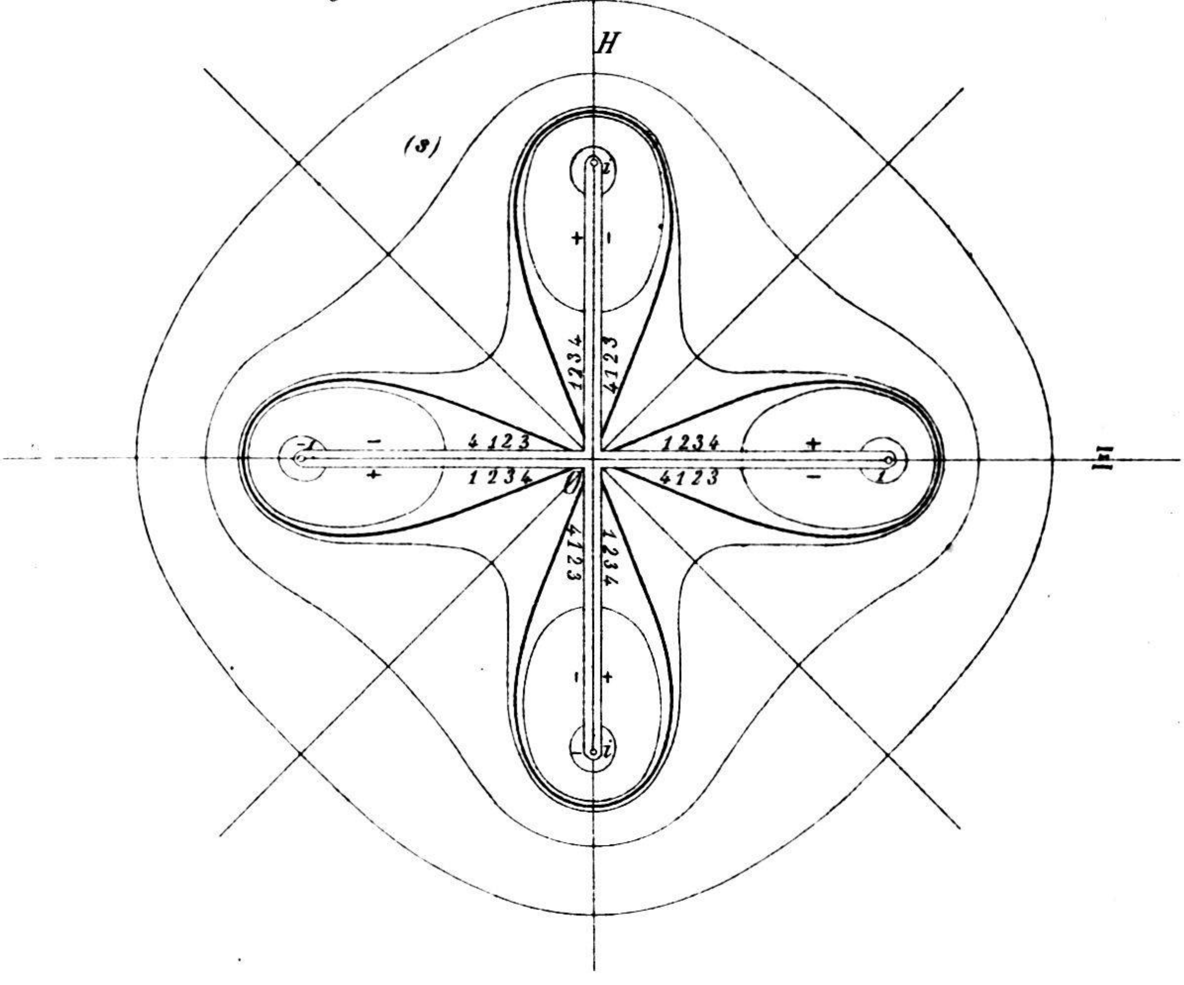


Fig. 8.a

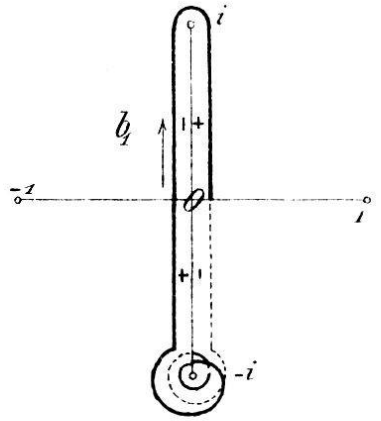


Fig. 8.b

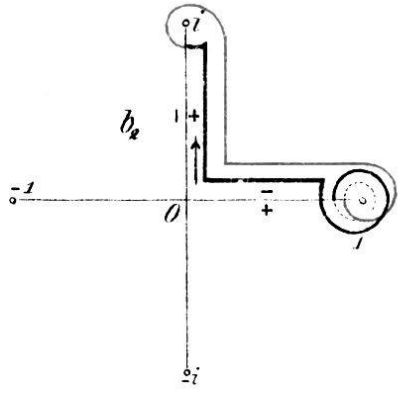


Fig. 8.c

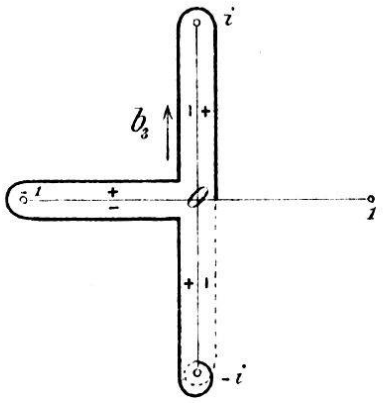


Fig. 8.d

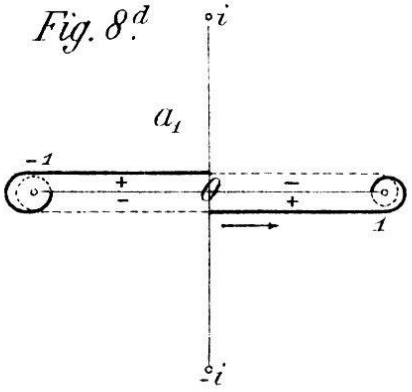


Fig. 8.e

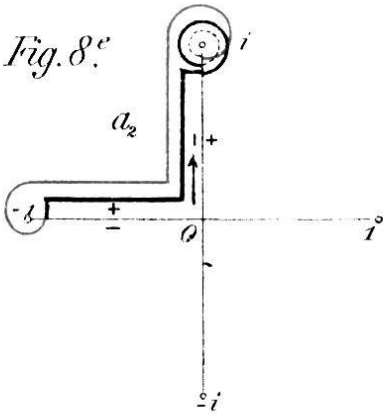


Fig. 8.f

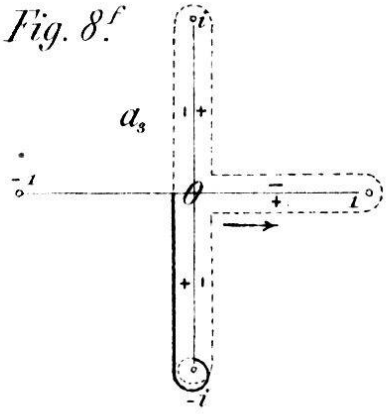


Fig. 9.a

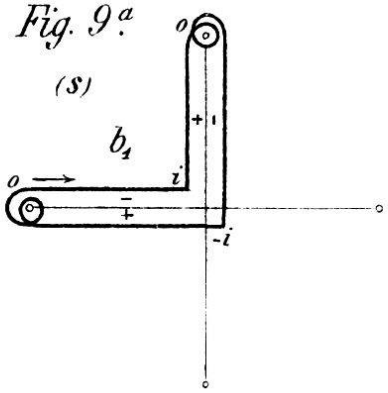


Fig. 9.b

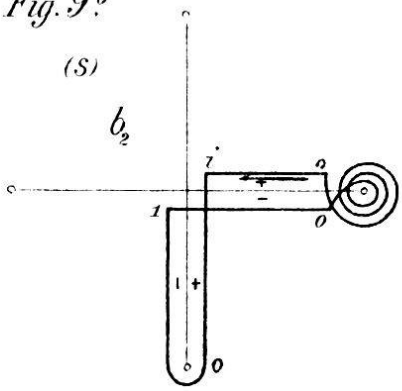


Fig. 9.c

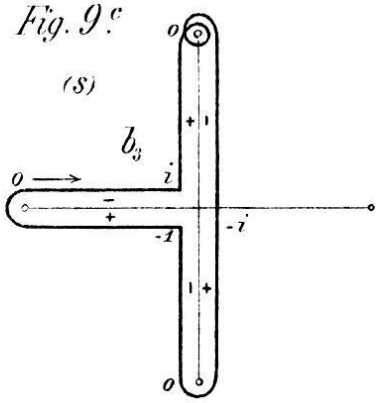


Fig. 9.d

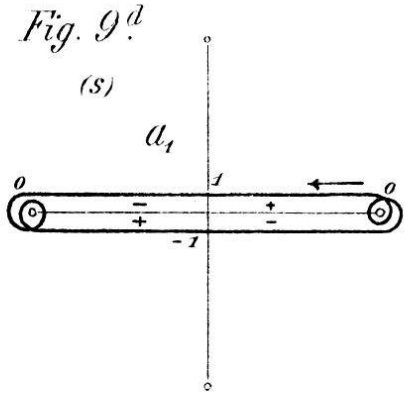


Fig. 9.e

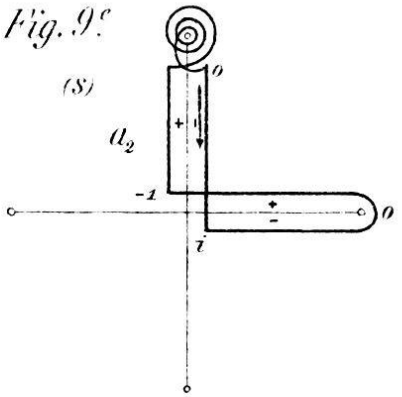
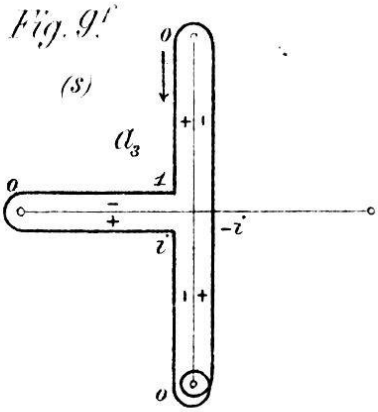


Fig. 9.f



H. Amstein.

Lith. J. Chappuis, Lausanne.

Fig. 10.a

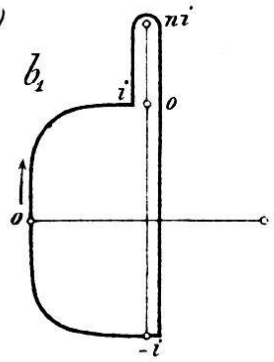


Fig. 10.b

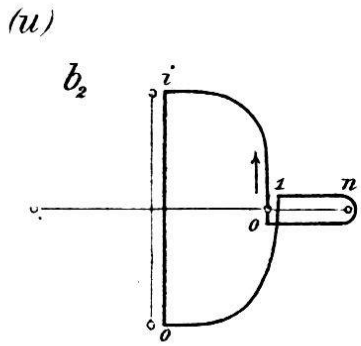


Fig. 10.c

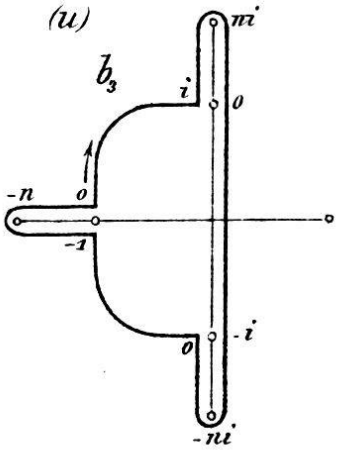


Fig. 10.d

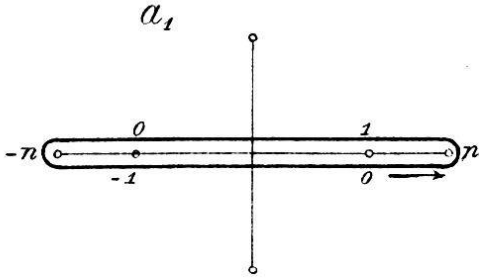


Fig. 10.e

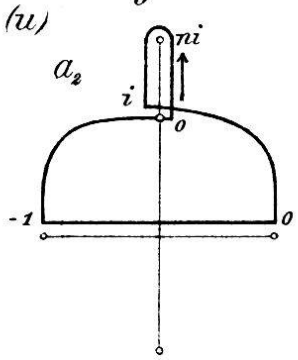


Fig. 10.f

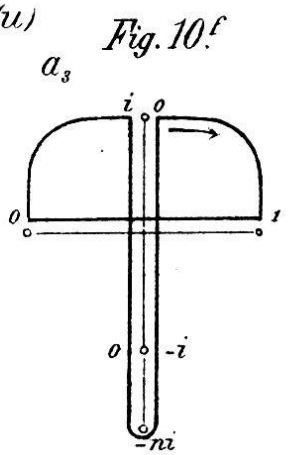


Fig. 11.a

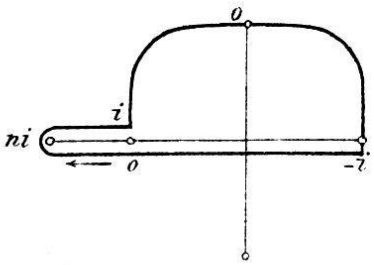


Fig. 11.b

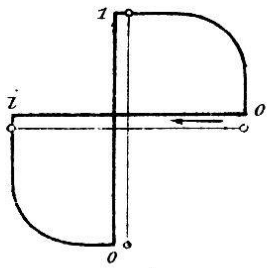


Fig. 11.c

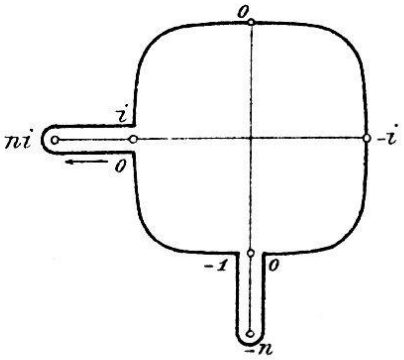


Fig. 11.d

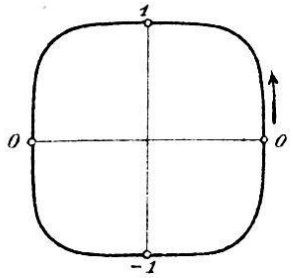


Fig. 11.e

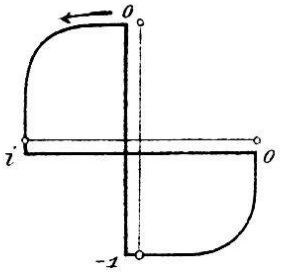
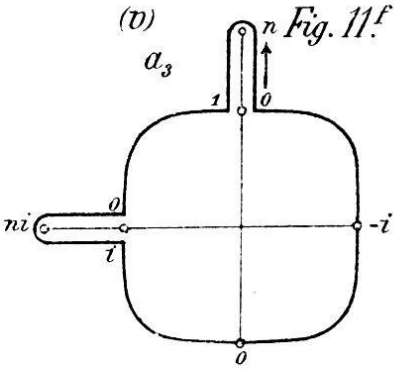


Fig. 11.f



Lith. J. Chappuis, Lausanne.

Fig. 12a

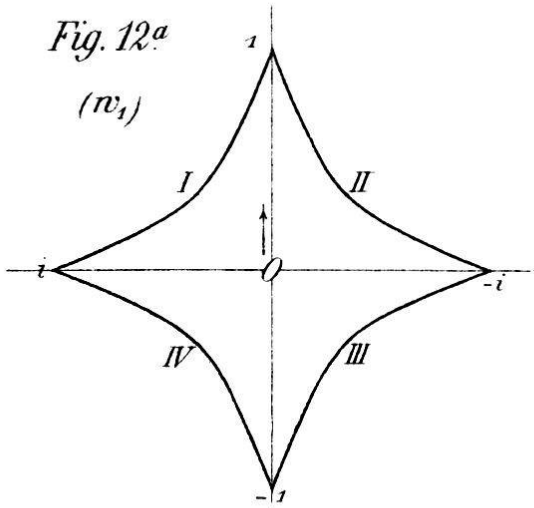


Fig. 12b

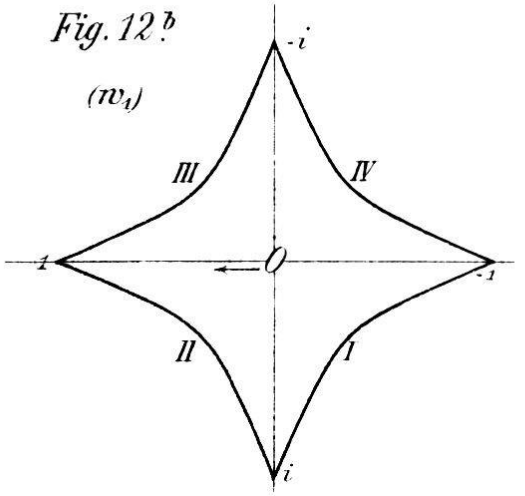


Fig. 12c

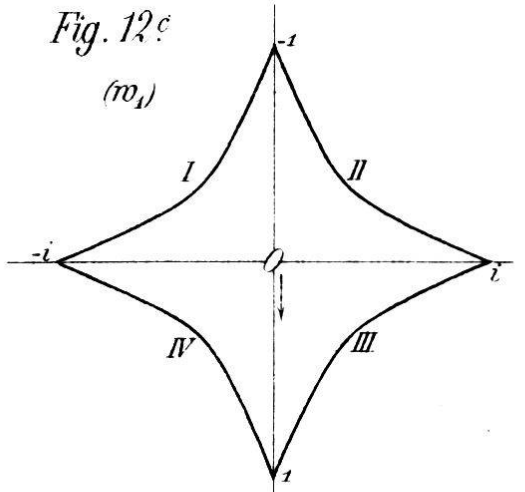


Fig. 12d

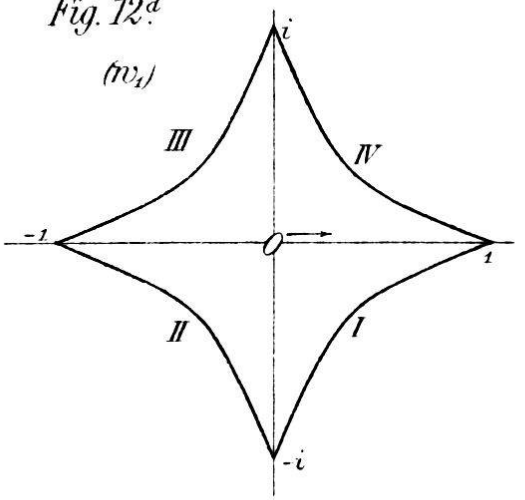


Fig. 12e

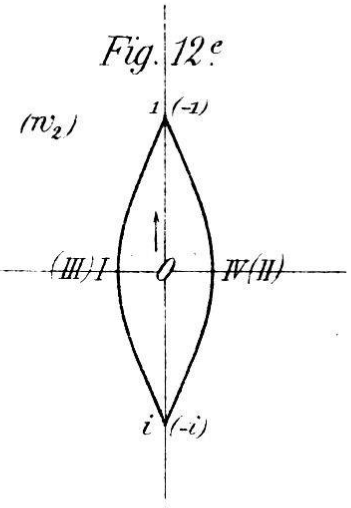


Fig. 12f

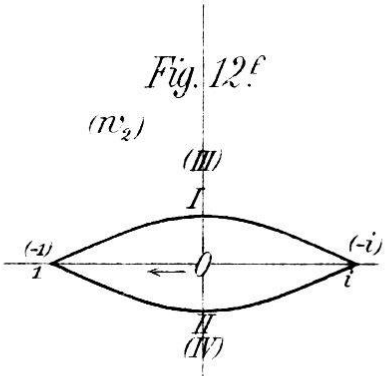


Fig. 12g

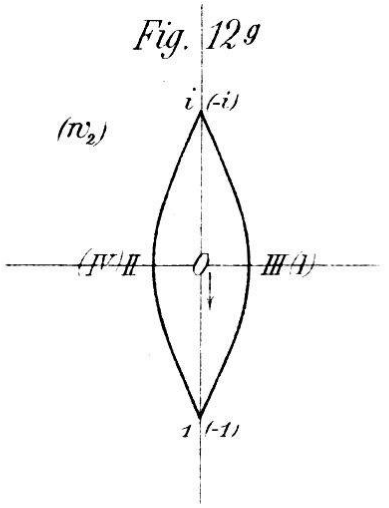


Fig. 12h

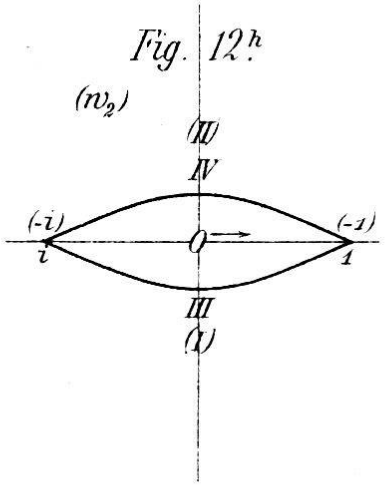


Fig. 12i

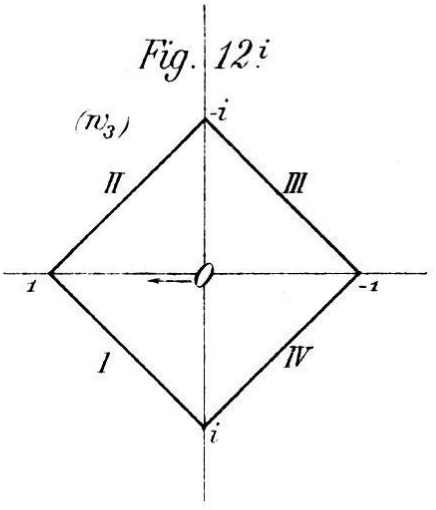


Fig. 12k

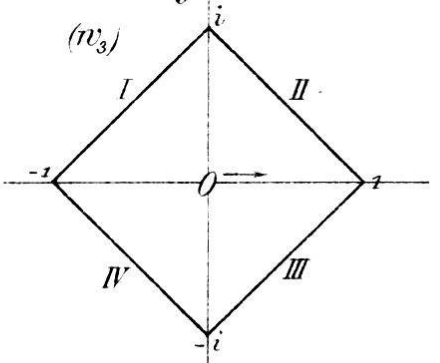


Fig. 12l

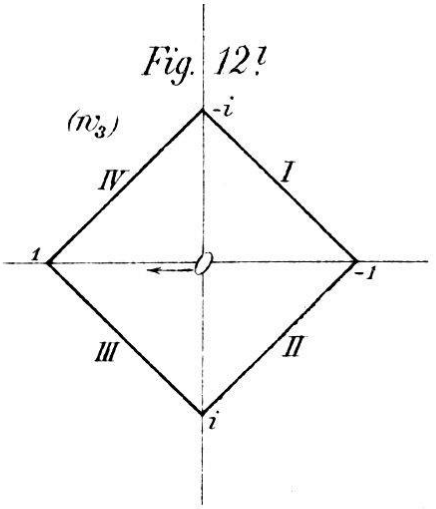
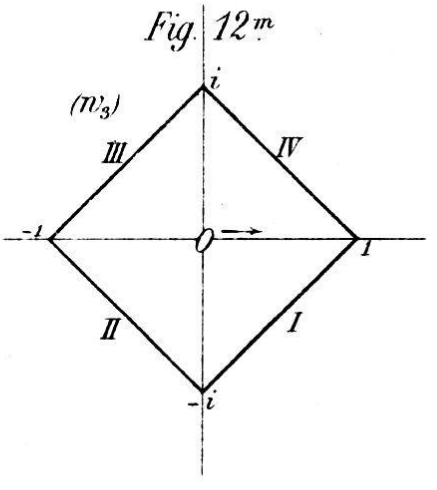


Fig. 12m



H. Amstein.

Lith. J. Chappuis, Lausanne

on arrive à la formule

$$\sqrt{-\frac{\chi_{\binom{001}{111}}}{\chi_{\binom{010}{111}}}} = -\frac{\vartheta_{\binom{001}{100}}}{\vartheta_{\binom{010}{100}}} \cdot \frac{\vartheta_{\binom{001}{111}}(v_1 v_2 v_3)}{\vartheta_{\binom{010}{111}}(v_1 v_2 v_3)},$$

dans laquelle

$$\sqrt{\chi_{\binom{001}{111}}} = \Sigma \pm x_1\sqrt{z_1},\ y_1^{(1)}\sqrt{z_1^{(1)}},\ \sqrt{x_1^{(2)}x_2^{(2)}z_2^{(2)}},\ \sqrt{y_1^{(3)}y_2^{(3)}z_2^{(3)}},$$

$$\sqrt{\chi_{\binom{010}{111}}} = \Sigma \pm x_1\sqrt{z_2},\ y_1^{(1)}\sqrt{z_2^{(1)}},\ \sqrt{x_1^{(2)}x_2^{(2)}z_1^{(2)}},\ \sqrt{y_1^{(3)}y_2^{(3)}z_1^{(3)}}.$$

Les variables v_1, v_2, v_3 conservent toujours la même signification.

III. La caractéristique (k) est impaire, (k') paire.

Soit $(k) = (\sqrt{x}) = \binom{001}{101}$, $(k') = \binom{010}{101}$.

Les deux groupes

$$(\sqrt{x_1x_2}) = \binom{011}{000} = \underbrace{\binom{100}{100}}_{x_1} + \underbrace{\binom{111}{100}}_{x_2} = \underbrace{\binom{100}{111}}_{\xi_2} + \underbrace{\binom{111}{111}}_{\xi_1} = \underbrace{\binom{010}{011}}_{\gamma''_1} + \underbrace{\binom{001}{011}}_{\gamma''_2} =$$
$$= \underbrace{\binom{010}{111}}_{\gamma^0_2} + \underbrace{\binom{001}{111}}_{\gamma^0_1} = \underbrace{\binom{101}{100}}_{\gamma_2} + \underbrace{\binom{110}{100}}_{\gamma_1} = \underbrace{\binom{101}{011}}_{\gamma'_2} + \underbrace{\binom{110}{011}}_{\gamma'_1},$$

$$(\sqrt{x_1y_1}) = \binom{011}{011} = \underbrace{\binom{100}{100}}_{x_1} + \underbrace{\binom{111}{111}}_{\xi_1} = \underbrace{\binom{100}{111}}_{\xi_2} + \underbrace{\binom{111}{100}}_{x_2} = \underbrace{\binom{010}{010}}_{\xi_6} + \underbrace{\binom{001}{001}}_{x_6} =$$
$$= \underbrace{\binom{010}{110}}_{\xi_3} + \underbrace{\binom{001}{101}}_{x_3} = \underbrace{\binom{101}{001}}_{x_5} + \underbrace{\binom{110}{010}}_{\xi_5} = \underbrace{\binom{101}{110}}_{x_4} + \underbrace{\binom{110}{101}}_{\xi_4}$$

font reconnaître qu'on peut poser

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{s-1},\ \sqrt{x_2} = \sqrt{z+1},\ \sqrt{y_1} = \sqrt{\xi_1} = \sqrt{s+1}.$$
$$\sqrt{y_2} = \sqrt{\xi_2} = \sqrt{z-1},\ \sqrt{z_1} = \sqrt{\gamma^0_1} = \sqrt{s-z+\varepsilon},$$
$$\sqrt{x} = \sqrt{x_3} = \sqrt{z-i},\ \sqrt{y} = \sqrt{\xi_3} = \sqrt{z+i}$$

et qu'alors les deux caractéristiques

$$(k_1) = (\sqrt{xyz_1}) = \binom{001}{101} + \binom{010}{110} + \binom{001}{111} = \binom{010}{100},$$

$$(k'_1) = (k') + (\sqrt{yz_1}) = \binom{010}{101} + \binom{010}{110} + \binom{001}{111} = \binom{001}{100}$$

sont paires. En introduisant ces fonctions et caractéristiques dans les formules générales, il vient

$$\mp(1+i)\sqrt{\frac{\chi_{\binom{001}{101}}}{\chi_{\binom{010}{101}}}} = \frac{\vartheta_{\binom{001}{100}}}{\vartheta_{\binom{010}{100}}} \cdot \frac{\vartheta_{\binom{001}{101}}(v_1, v_2, v_3)}{\vartheta_{\binom{010}{101}}(v_1, v_2, v_3)},$$

où

$$\sqrt{\chi_{\binom{001}{101}}} = \Sigma \pm x\sqrt{x},\ z_1^{(1)}\sqrt{x^{(1)}},\ \sqrt{y^{(2)}x_1^{(2)}y_1^{(2)}},\ \sqrt{y^{(3)}x_2^{(3)}y_2^{(3)}},$$

$$\sqrt{\chi_{\binom{010}{101}}} = \Sigma \pm \sqrt{xx_1x_2}, \sqrt{x^{(1)}y_1^{(1)}y_2^{(1)}}, \sqrt{y^{(2)}x_1^{(2)}y_2^{(2)}}, \sqrt{y^{(3)}x_2^{(3)}y_1^{(3)}}.$$

Il serait inutile d'insister encore sur le problème de Jacobi, attendu qu'à l'aide de ce qui vient d'être dit, le lecteur suivra facilement jusqu'au bout l'ouvrage si souvent cité. Notre travail peut donc s'arrêter ici, d'autant plus que les deux problèmes de Jacobi et de Riemann seront repris, dans un second mémoire, à un point de vue tout différent et spécialement approprié au cas particulier qui a fait l'objet de cette étude.