Beitrag und Rechenhilfsmittel zur Ermittlung von Formänderungen gerissener Tragwerke mit Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens

Autor(en): **Hampe, E. / Köppler, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen**

Band (Jahr): **5 (1970)**

PDF erstellt am: **22.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6935

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Beitrag und Rechenhilfsmittel zur Ermittlung von Formänderungen gerissener Tragwerke mit Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens

Calculation of Creep and Shrinkage Deformations in Cracked Reinforced Concrete Structures

Contribution et procédé de calcul permettant la recherche des déformations des ouvrages fissurés avec considération du fluage et du retrait

E. HAMPE Prof. Dr.-Ing. habil.
H. KÖPPLER Dr.-Ing.
Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar
Sektion Bauingenieurwesen
Weimar, DDR

1. Einführung

Von den Verfassern wurden mit /5/ Grundlagen und Rechenhilfsmittel zur Ermittlung des Einflusses von Kriechen und Schwinden bei einfach bewehrten, gerissenen Stahlbeton- und Spannbetonquerschnitten bereitgestellt. In der vorliegenden Arbeit werden diese Materialien erweitert durch die Berücksichtigung von:

- beliebigen T-Querschnitten
- doppelter Bewehrung
- plastifizierter Betonzugzone zur Erfassung des Betonverhaltens in den zwischen den Rissen liegenden Bereichen

Neben den Änderungen von Stahlzugkraft, Betonrandspannung und Nullinienlage wird auch die Änderung der Querschnittskrümmung infolge des Kriechens und Schwindens berechnet.

Zur Ermittlung der Formänderungen erfolgt eine Diskretisierung des zu untersuchenden Tragwerkes, wobei die Betonzugzone in in den einzelnen Abschnitten je nach Größe der Beanspruchung ideal gerissen, ungerissen plastifiziert oder ideal elastisch angenommen wird. Durch einfache Integration über die Tragwerkslänge erhält man die Verdrehungen, durch zweifache Integration die Durchbiegungen des Tragwerkes. Die Integration kann nach den üblichen Verfahren für Funktionen diskreten Arguments ausgeführt werden. Bei statisch unbestimmten Tragwerken muß die Verträglichkeit an den Angriffsstellen der Überzähligen durch Iteration hergestellt werden. Da die zeitabhängige Änderung der Überzähligen infolge des Kriechens im allgemeinen gering ist, ist die Brauchbarkeit der Rechenhilfsmittel für statisch unbestimmte Tragwerke gewährleistet.

Bei den Untersuchungen wird von folgenden Voraussetzungen ausgegangen:

Fall a: "ideal gerissene Betonzugzone"

- Gültigkeit der Bernoullischen Hypothese
- Homogenität und Isotropie des Betons
- Proportionalität zwischen Spannungen und den elastischen und plastischen Verformungen

Fall b: "plastifizierte Betonzugzone"

- wie bei 1., jedoch werden vom Beton Zugspannungen aufgenommen, die proportional den Dehnungen bis zum ν-fachen der Betondruckspannungen sind und bei größeren Dehnungen den konstanten Wert $\nu\,\sigma_d$ beibehalten.

2. Bezeichnungen und Definitionen

E_b Elastizitätsmodul des Betons

E_z Elastizitätsmodul des Stahls

$F_z/\bar{F}_z$ Querschnittsfläche der Zugbewehrung/Druckbewehrung

h Querschnittshöhe, gerechnet vom Schwerpunkt der Stahleinlagen bis zum oberen Querschnittsrand

b größte Querschnittsbreite

x Abstand der Spannungsnullinie vom oberen Querschnittsrand

y Abstand der jeweils betrachteten Faser der Betondruckzone vom oberen Querschnittsrand

$\xi = x(\varphi)/h$, $\eta = y/h$

$\bar{\rho}h$ Abstand der Druckbewehrung vom oberen Querschnittsrand

$\rho_1 h$ Flanschdicke des T-Querschnittes

$\psi(\eta)b$ Querschnittsbreite an der Stelle η

ψb Stegbreite des T-Querschnittes

N_{bo} Betondruckkraft bei $t = 0$

N_{bt} Änderung der Betondruckkraft bis $t = t$

N_{zo} Stahlzugkraft bei $t = 0$

N_{zv} Stahlzugkraft bei $\sigma = 0$ in Höhe der Stahleinlagen und $t = 0$

$\Delta N_{zv} = N_{zo} - N_{zv}$

N_{zt} Änderung der Stahlzugkraft bis $t = t$

M auf den Querschnitt wirkendes konstantes Moment

φ Kriechzahl zur Zeit $t = t$

φ_∞ Endkriechzahl

ε_S Endschwindmaß

ε_b Betondehnung

$\varepsilon_z/\bar{\varepsilon}_z$ Dehnung der Zugbewehrung /Druckbewehrung

σ_b Betonspannung

$$n_z\mu_z = \frac{E_z\ F_z}{E_b\ bh}\ , \quad d\varepsilon_S = \frac{\varepsilon_S}{\varphi_\infty}\ d\varphi$$

Durch den Index "0" wird der Zustand $t = 0$, also vor Eintreten des Kriechens und Schwindens, gekennzeichnet.

3. Berechnungsgrundlagen

Mit den genannten Voraussetzungen ergibt sich unter Berücksichtigung des Schwindens folgende Beziehung zwischen den Spannungen und Verformungen des Betons (ausgenommen der plastifizierte Bereich des Betons im Fall b):

$$d\varepsilon_b = \frac{1}{E}(d\sigma_b + \sigma_b d\varphi) - d\varepsilon_S \quad (\varepsilon_S \text{ mit pos. Vorzeichen einsetzen}) \qquad (1)$$

Den folgenden Ableitungen liegt für den Fall a Abb. 1 zugrunde.

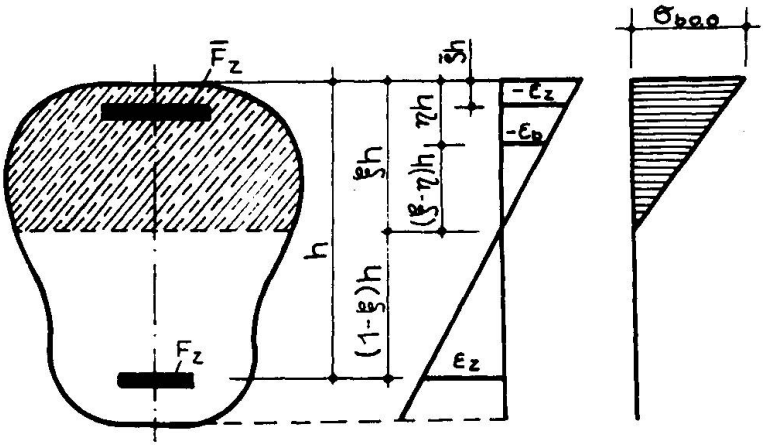


Abb. 1

Die Ableitungen für den Fall b müssen hier aus Platzgründen entfallen. Für sie gilt Abb. 2.

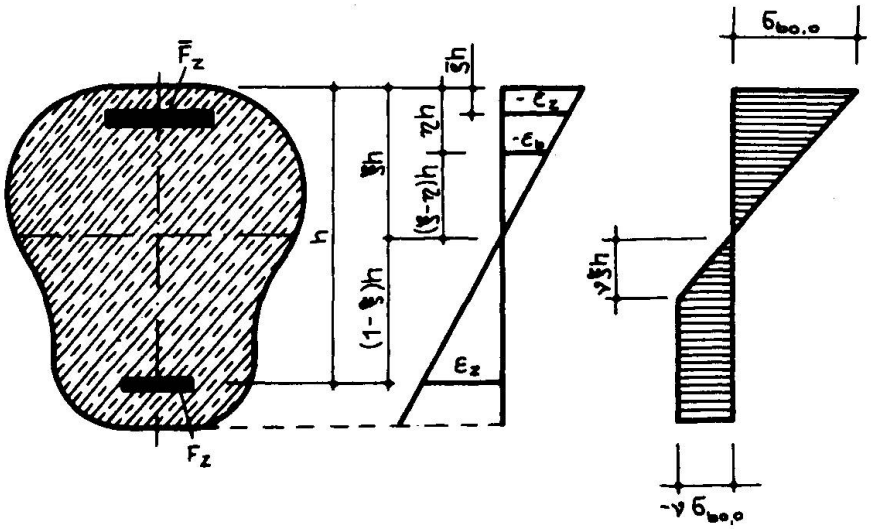


Abb. 2

Die Gleichgewichts- und Formänderungsbetrachtungen beziehen sich auf einen allgemeinen einfach symmetrischen Querschnitt. Die späteren Auswertungen werden für T-Querschnitte einschließlich des Sonderfalles Rechteckquerschnitt vorgenommen.

<u>Gleichgewichtsbedingungen (Fall a)</u>

$$\sum H = 0$$

$$\int_0^{\bar{\xi}} hb\psi(\eta)\sigma_b(\eta,\varphi)d\eta + \bar{\varepsilon}_z E_z \bar{F}_z + N_{zv} + \varepsilon_z E_z F_z = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M = 0$$

$$\int_0^{\bar{\xi}} h^2 b\psi(\eta)\sigma_b(\eta,\varphi)(1-\eta)d\eta + \bar{\varepsilon}_z E_z \bar{F}_z (1-\bar{\rho})h + M = 0 \qquad (3)$$

<u>Formänderungsbedingungen</u> (Hypothese nach Bernoulli)

$$\varepsilon_b(\eta) = -\varepsilon_z \frac{\xi - \eta}{1 - \xi} \tag{4}$$

$$\bar{\varepsilon}_z = \varepsilon_b(\bar{\rho}) = -\varepsilon_z \frac{\xi - \bar{\rho}}{1 - \xi} \tag{5}$$

Die Ableitung von Gl. (2) bzw. Gl. (3) nach φ wird zu Gl. (2) bzw. Gl. (3) addiert. Unter Berücksichtigung von Gl. (1) und mit Beachtung der Tatsache, daß $\sigma_b(\xi,\varphi) = 0$, ergeben sich:

$$E_b bh \int_0^{\xi} \psi(\eta)\left(\frac{\partial \varepsilon_b}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon_S}{\varphi_\infty}\right)d\eta = -N_{zv} - E_z F_z\left(1 + \frac{d}{d\varphi}\right)(\varkappa \bar{\varepsilon}_z + \varepsilon_z) \tag{6}$$

$$E_b bh^2\left[\int_0^{\xi}\left(\frac{\partial \varepsilon_b}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon_S}{\varphi_\infty}\right)(1 - \eta)\psi(\eta)d\eta + n_z\mu_z(1 - \bar{\rho})\left(1 + \frac{d}{d\varphi}\right)\varkappa \bar{\varepsilon}_z\right] + M = 0 \tag{7}$$

Auf Grund der Leibnitzschen Formel und der Bedingung $\varepsilon_b(\xi,\varphi) = 0$ lassen sich bei den Gln. (6) und (7) Integration und Differentiation in der Reihenfolge vertauschen und die partielle Differentiation durch die gwöhnliche ersetzen. Danach werden in Gl. (6) die Gln. (4) und (5) eingesetzt.

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{\varepsilon_z\left[\int_0^{\xi}\frac{\xi - \eta}{1 - \xi}\psi(\eta)d\eta - n_z\mu_z\left(1 - \varkappa\frac{\xi - \bar{\rho}}{1 - \xi}\right)\right]\right\} = \frac{N_{zv}}{E_b bh} + \tag{8}$$

$$+ n_z\mu_z\varepsilon_z\left(1 - \varkappa\frac{\xi - \bar{\rho}}{1 - \xi}\right) + \frac{\varepsilon_S}{\varphi_\infty}\int_0^{\xi}\psi(\eta)d\eta$$

Mit Berücksichtigung der Gln. (4) und (6) erhält man aus Gl. (7):

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{\varepsilon_z\left[\int_0^{\xi}\frac{\xi - \eta}{1 - \xi}(\bar{\rho} - \eta)\psi(\eta)d\eta + (1 - \bar{\rho})n_z\mu_z\right]\right\} = \frac{M}{E_b bh^2} -$$

$$-(1 - \bar{\rho})\left(\frac{N_{zv}}{E_b bh} + n_z\mu_z\varepsilon_z\right) + \frac{\varepsilon_S}{\varphi_\infty}\int_0^{\xi}\psi(\eta)(\bar{\rho} - \eta)d\eta \tag{9}$$

Folgende Vereinfachungen in der Schreibweise werden eingeführt:

$$\frac{\varepsilon_z E_b bh}{-N_{bo}} = \varepsilon_z^+, \quad \frac{\varepsilon_{bo,o} E_b bh}{-N_{bo}} = \varepsilon_{bo,o}^+, \quad \frac{N_{zv}}{-N_{bo}} = A,$$

$$\frac{\varepsilon_S E_b bh}{-N_{bo}\varphi_\infty} = B, \quad \frac{M}{-N_{bo}h} = \eta_o^+$$

Zunächst wird die Differentiation der Gln. (8) und (9) ausgeführt. Zur Lösung des sich ergebenden Differentialgleichungssystems erster Ordnung mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens ist eine explizite Darstellung der Ableitungen der unbekannten Funktionen $\varepsilon_z^+(\phi)$ und $\xi(\varphi)$ erforderlich.

$$\frac{d\varepsilon_z^+}{d\varphi} = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{10}$$

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{11}$$

Darin bedeuten:

$$a_{11} = \int_0^{\xi} \frac{\xi - \eta}{1 - \xi}(\bar{p} - \eta)\psi(\eta)d\eta + (1 - \bar{p})n_z\mu_z$$

$$a_{12} = \varepsilon_z^+\left[\int_0^{\xi} \frac{1 - \eta}{(1-\xi)^2}(\bar{p} - \eta)\psi(\eta)d\eta\right]$$

$$b_1 = \eta_0^+ - (1 - \bar{p})(A + n_z\mu_z\varepsilon_z^+) + B\int_0^{\xi}(\bar{p} - \eta)\psi(\eta)d\eta$$

$$a_{21} = \int_0^{\xi} \frac{\xi - \eta}{1 - \xi}\psi(\eta)d\eta - n_z\mu_z\left(1 - \varkappa\frac{\xi - \bar{p}}{1 - \xi}\right)$$

$$a_{22} = \varepsilon_z^+\left[\int_0^{\xi} \frac{1 - \eta}{(1-\xi)^2}\psi(\eta)d\eta + n_z\mu_z\varkappa\frac{1 - \bar{p}}{(1-\xi)^2}\right]$$

$$b_2 = A + n_z\mu_z\varepsilon_z^+\left(1 - \varkappa\frac{\xi - \bar{p}}{1 - \xi}\right) + B\int_0^{\xi}\psi(\eta)d\eta$$

Für die Berechnung der Stahlkraftänderung in der Zugbewehrung wird der dimensionslose Wert λ_{Nz} eingeführt.

$$\lambda_{Nz} = \frac{N_{zt}}{N_{zo}} = \frac{\varepsilon_z^+ - \varepsilon_{zo}^+}{\varepsilon_{zo}^+ + \frac{A}{n_z\mu_z}} \tag{12}$$

Um die obere Randspannung zu ermitteln, nehmen wir als Spannungsverteilung ein Trapez an, das den gleichen Schwerpunkt wie das wirkliche Spannungsdiagramm hat. Die sich dabei ergebende Spannung in Höhe der Nullinie ist eine fiktive Spannung und nur insofern interessant, als man mit ihrer Hilfe die Form des wirklichen Spannungsdiagramms abschätzen kann. Der mögliche Fehler bei der maximalen Randspannung ist vernachlässigbar klein (vgl. Abb.3).

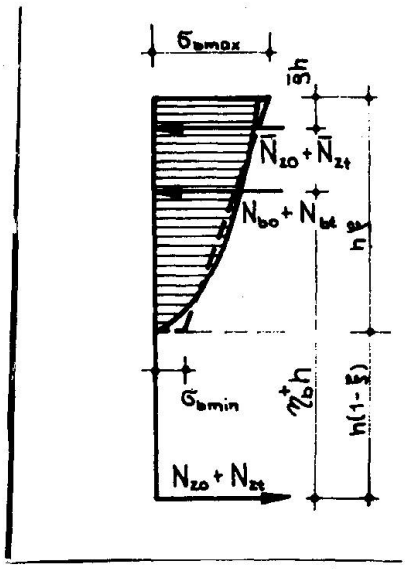


Abb. 3

Es sind nun zu berechnen: Betondruckkraft $N_{bo} + N_{bt}$ zur Zeit t = t, die Fläche der Druckzone F_{Dr}, Schwerpunktabstand der

Druckzone vom oberen Querschnittsrand η_s, das Trägheitsmoment der Druckzone I_{Dr} und die Widerstandsmomente W_o und W_u. Dann ergibt sich die Randspannung zu:

$$\max \sigma_b = (N_{bo} + N_{bt})\left[\frac{1}{F_{Dr}} + h\,\frac{\eta_s - (1 - \eta_b^+)}{W_o}\right] \text{ bzw.}$$

$$\max \sigma_b = -\frac{M}{bh^2}\,\Phi_1 \qquad (13)$$

Darin sind:

$$\Phi_1 = \frac{1 + \frac{N_{bt}}{N_{bo}}}{\eta_o^+}\left[\frac{1}{\int_0^{\beta}\psi(\eta)d\eta} - \frac{(1 - \eta_s - \eta_b^+)\eta_s}{\int_0^{\beta}(\eta - \eta_s)^2\psi(\eta)d\eta}\right] \qquad (14)$$

$$\Delta\Phi_1 = \Phi_1 - \Phi_{10}$$

$$\eta_b^+ = \frac{\eta_o^+ - n_z\mu_z\varkappa\,\varepsilon_z^+\,\frac{\xi - \bar{p}}{1 - \xi}(1 - \bar{p})}{1 - \frac{N_{bt}}{N_{bo}}}$$

Die Berechnung von min σ_b wäre analog zu max σ_b für den unteren Rand der Betondruckzone auszuführen. Als Grundlage für die Berechnung der Biegelinie w bzw. der Querschnittsverdrehungen w' wird zunächst die Krümmung w" der Biegelinie ermittelt (vgl. Abb. 4).

$$w'' = \frac{\varepsilon_z}{(1 - \xi)h} = \frac{\alpha}{h}$$

Querschnittsverdrehungen:

$$w' = \int \frac{\alpha}{h}\,dl$$

Biegelinie:

$$w = \int\left(\int \frac{\alpha}{h}\,dl\right)dl$$

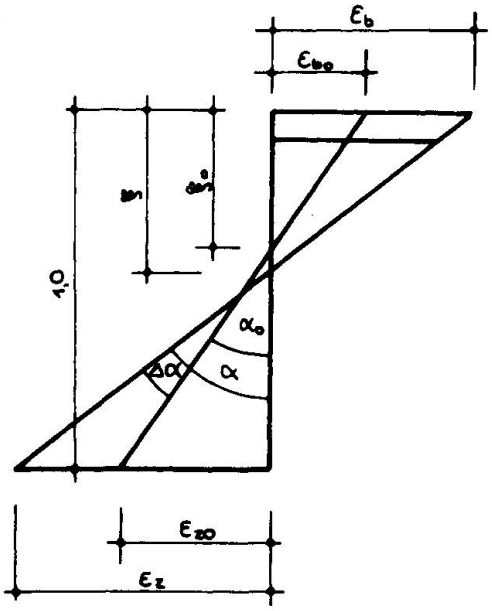


Abb. 4

bezogene Krümmung:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_z}{1 - \xi} \quad \text{bzw.} \quad \alpha^+ = \frac{\varepsilon_z^+}{1 - \xi}\,, \quad \Delta\alpha^+ = \alpha^+ - \alpha_o^+$$

4. Rechenhilfsmittel

Die bisherigen Betrachtungen gelten für einen allgemeinen einfach symmetrischen Querschnitt mit Druckbewehrung. In einer noch unveröffentlichten Arbeit sind umfangreiche Auswertungen der aufbereiteten Formeln für T-Querschnitte mit beliebigen geometrischen Verhältnissen vorgenommen worden. Mit den dort bereitgestellten Materialien ist sowohl eine einfache Berechnung der Spannungen und Verformungen zum Zeitpunkt t = 0 als auch der Änderungen von Spannungen und Verformungen bis zum Zeitpunkt t = t möglich. An dieser Stelle müssen wir uns darauf beschränken, die Änderungen der Stahlzugkraft, der Betonrandspannung, der Krümmung und der Nullinienlage in einem gegebenen Querschnitt zu ermitteln. Mit den Krümmungsänderungen in den einzelnen Querschnitten wären Verformungen infolge Kriechen - wie in der Einführung besprochen - zu ermitteln.

Beispiel:

Gegeben sei ein Querschnitt entsprechend Abb. 5.

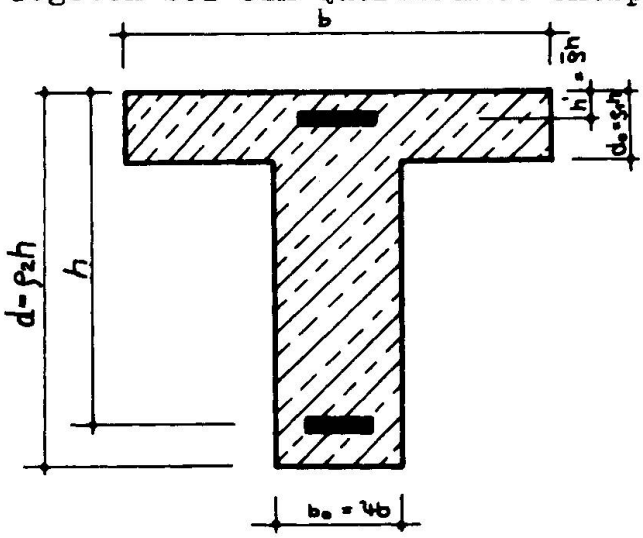


Abb. 5

$b = 1{,}0$ m $\quad h = 1{,}0$ m

$\psi = 0{,}20 \quad \rho_1 = 0{,}25$

$\bar{\rho} = 0{,}9$

$F_z = 76$ cm^2

(56 cm^2 schlaffe Bewehrung

20 cm^2 vorgesp. Bewehrung)

$\bar{F}_z = 20$ cm^2

$E_b = 300$ Mp/cm^2

$E_z = 2100$ Mp/cm^2

$\varphi = 3{,}0 \quad n_z\mu_z = 0{,}053$

$M = 165$ Mpm $\quad N_{zv} = 107$ Mp

Die Berechnung ergibt für den Zeitpunkt t = 0:

$N_{bo} = -178$ Mp $\quad A = 0{,}6 \quad N_{zo} = 188$ Mp $\quad \bar{N}_{zo} = -10$ Mp

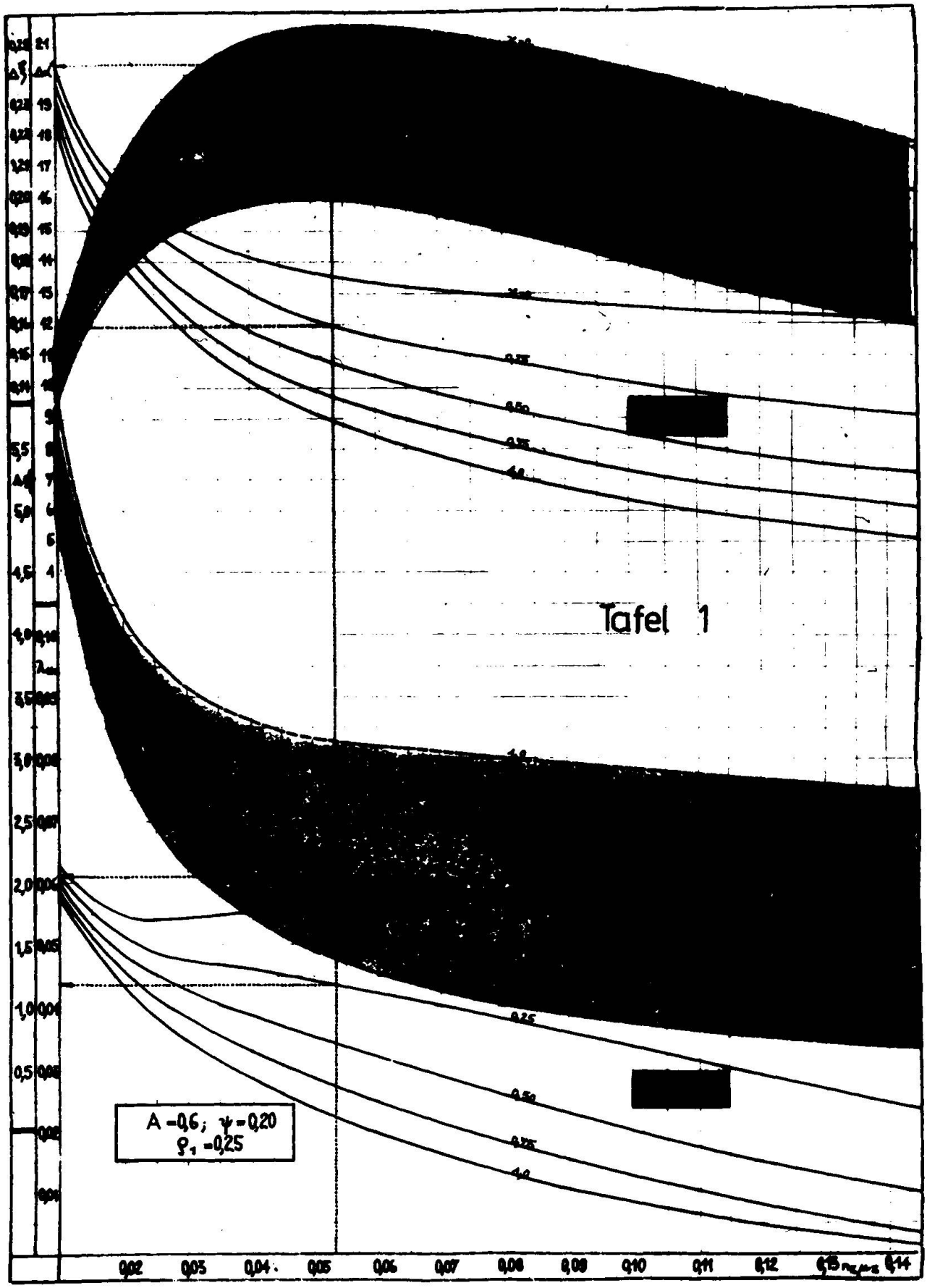
$\max \sigma_{bo} = 0{,}10$ Mp/cm^2 $\quad \xi_o = 0{,}40 \quad \alpha_o = 0{,}833 \cdot 10^{-3}$

Infolge Kriechen ergeben sich aus Tafel 1* folgende Werte:

$\lambda_{Nz} = 0{,}0435 \quad \Delta\Phi_1 = -2{,}05$

$\Delta\xi = 0{,}243 \quad \Delta\alpha^+ = 11{,}9$

* diese gilt für die Endkriechzahl $\varphi_\infty = 3{,}0$


Tafel 1
A = 0,6; ψ = 0,20
ϱ₁ = 0,25
0,02
0,03
0,04
0,05
0,06
0,07
0,08
0,09
0,10
0,11
0,12
0,13
0,14

und damit die Änderung der Stahlzugkraft

$$N_{zt} = N_{zo} \cdot \lambda_{Nz} = 8{,}2 \text{ Mp}$$

Änderung der Betonrandspannung

$$\Delta \max \sigma_b = - \frac{M}{bh^2} \Delta \Phi_1 = 0{,}033 \text{ Mp/cm}^2$$

Änderung der Nullinienlage

$$\Delta \xi = 0{,}243$$

Änderung der bezogenen Krümmung im betrachteten Querschnitt

$$\Delta \alpha = - \frac{N_{bo}}{E_b bh} \Delta \alpha^+ = 0{,}705 \cdot 10^{-3}$$

Literaturverzeichnis

/1/ Rabich, R. — Die Formänderungen des Stahlbetons infolge Belastung
Bauplanung – Bautechnik, Berlin 10 (1956) 12, S. 497 – 503

/2/ Elias, E. — Einfluß des Kriechens auf einen gebogenen Stahlbeton-Rechteckbalken im Stadium II
Der Bauingenieur, 36 (1961) 3, S. 93 – 96

/3/ Wippel, H. — Der Einfluß des Kriechens auf Formänderung, Spannungsverteilung und Bruchlast des Stahlbetonbalkens im Stadium II
Österreichische Ingenieurzeitschrift, 6 (1963) 4, S. 118 – 124

/4/ Mayer, H. — Die Berechnung der Durchbiegung von Stahlbetonbauteilen
DAStb. H.194, Berlin 1967

/5/ Hampe, E. – Köppler, H. — Kriechen und Schwinden bei Querschnitten mit gerissener Betonzugzone
Handbibliothek Bauwesen, Heft 6 VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1967

/6/ Rabich, R. — Beitrag zur Berechnung der Formänderungen von Stahlbetonbauteilen unter Berücksichtigung der Rißbildung
Bauplanung – Bautechnik, Berlin, 23 (1969) 4/5, S. 184 – 187 u. 234 – 236

5. Zusammenfassung

Der Beitrag ist ein Auszug aus einer noch unveröffentlichten Arbeit über die Berechnung des Einflusses von Kriechen und Schwinden auf die Spannungsverteilung und die Verformungen in Tragwerken mit gerissener bzw. ungerissener plastifizierter Betonzugzone. Dort bereitgestellte Rechenhilfsmittel ermöglichen eine wesentliche Verminderung des sonst sehr großen Rechenaufwandes.

Summary

The paper summarizes the results of an unpublished study of the effects of creep and shrinkage on deformations and on the internal stress distribution in cracked and uncracked reinforced concrete structures. Detailed calculations are considerably simplified by previously prepared design aids.

Résumé

La contribution est l'extrait d'un travail encore non-publié traitant du calcul de l'influence du fluage et du retrait sur la répartition des tensions et des déformations dans les ouvrages avec, dans le domaine plastique, la zone tendue de béton relativement fissurée et non fissurée. Là, les procédés de calcul, mis à disposition, permettent une diminution essentielle du travail qui, dans le cas contraire, serait très important.