La stabilité des âmes de poutres pleines , calculée en tenant compte des charges locales

Autor(en): **Girkmann, K.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht**

Band (Jahr): **2 (1936)**

PDF erstellt am: **18.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-3087

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

V 11

La stabilité des âmes de poutres pleines, calculée en tenant compte des charges locales.

Die Stabilität der Stegbleche vollwandiger Träger bei Berücksichtigung örtlicher Lastangriffe.

Stability of the Webs of Plate Girders Taking Account of Concentrated Loads.

Dr. Ing. K. Girkmann,
Privatdozent an der Technischen Hochschule Wien.

Les poutres à âme pleine ont parfois à supporter des charges qui agissent sur la membrure comprimée, entre les raidisseurs transversaux. De telles charges se présentent par exemple sur les poutres portant un pont-roulant, sur les longerons des ponts-rails ainsi que sur les poutres-maîtresses de ces ponts, lorsqu'elles supportent directement les traverses.

J'ai publié une étude de la stabilité des âmes de poutres sollicitées de la sorte dans un mémoire intitulé: „*Stegblechbeulung unter örtlichem Lastangriff*".[1] Nous parlerons tout d'abord ici des principes de cette étude pour exposer ensuite une méthode simplifiée.

La détermination très exacte de la *limite de stabilité* de l'âme exigerait dans chaque cas particulier des calculs très compliqués. Pour limiter l'étendue du calcul et généraliser les résultats, nous avons dû effectuer différentes approximations. C'est pourquoi j'ai tout d'abord séparé, le long du bord de l'âme, la *répartition des charges* produite par la membrure chargée en collaboration avec les raidisseurs transversaux. Aux fig. 1a et b, nous avons représenté de telles répartitions de charges p (x). La fig. 1a donne une répartition pour laquelle les raidisseurs transversaux sont pratiquement inefficaces; il s'agit ici d'une poutre pleine dont la membrure chargée ne possède qu'une faible rigidité à la flexion (ou dont les raidisseurs transversaux sont fortement éloignés les uns des autres). La fig. 1b par contre représente une répartition pour une poutre avec forte membrure chargée et raidisseurs transversaux rapprochés; les raidisseurs déchargent le bord de l'âme en prenant directement une partie de la charge de la membrure et en la transmettant à des parties de l'âme beaucoup moins exposées au danger de voilement. J'ai calculé approximativement cette collaboration des raidisseurs

[1] Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaft in Wien, math.-nat. Klasse, Abteilung IIa, 145e volume, fasc. 1 et 2, 1936.

(la membrure était considérée comme une barre et l'âme comme un disque) et j'ai obtenu pour la charge p (x) de l'âme l'expression suivante:

$$p(x) = \sum p_n \cos \frac{n \pi x}{3a} \qquad (n = 1, 3, 5 \ldots) \tag{1}$$

où

$$p_n = \frac{2P}{3a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2 J_0}{t} \left(\frac{\pi}{3a}\right)^3 n^3} \cdot \left\{ \frac{3a}{n\pi c} \sin \frac{n\pi c}{3a} - \cos \frac{n\pi}{6} \cdot \frac{\sum\limits_{m=1,3..} \frac{3a}{m\pi c} \sin \frac{m\pi c}{3a} \cdot \cos \frac{m\pi}{6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2 J_0}{t} \left(\frac{\pi}{3a}\right)^3 m^3}}{\sum\limits_{m=1,3..} \cos^2 \frac{m\pi}{6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2 J_0}{t} \left(\frac{\pi}{3a}\right)^3 m^3}} \right\} \tag{2}$$

Dans ces expressions: a est l'éloignement des raidisseurs transversaux, t l'épaisseur de la tôle d'âme, c la demi-largeur chargée et J_0 le moment d'inertie de la membrure chargée par rapport à son axe de gravité horizontal. Dans l'équation (2) le deuxième terme entre parenthèses représente l'influence des raidisseurs qui est souvent assez petite pour pouvoir être négligée. (L'équation (2) est écrite de telle sorte que l'on puisse passer directement à c = 0.) On peut établir des relations semblables à l'équation (2) pour le cas où *plusieurs* charges symétriques par rapport à l'axe des y agissent dans le panneau considéré.

La répartition p (x) permet de calculer les contraintes dans le panneau d'âme étudié. Dans le mémoire que j'ai cité plus haut, j'ai composé ces contraintes de deux apports: des contraintes élémentaires calculées σ_{x1} et τ_1 et des contraintes de disque σ_{x2}, σ_y et τ_2 qui résultent de la charge p (x). Dans la suite, nous avons laissé de côté les contraintes de cisaillement τ_1 et *nous avons basé l'étude de la stabilité sur un système de contraintes symétrique par rapport à l'axe des y.* Pour déterminer la contrainte et la charge critiques, j'ai employé le «critère de l'énergie de la sécurité au flambage».

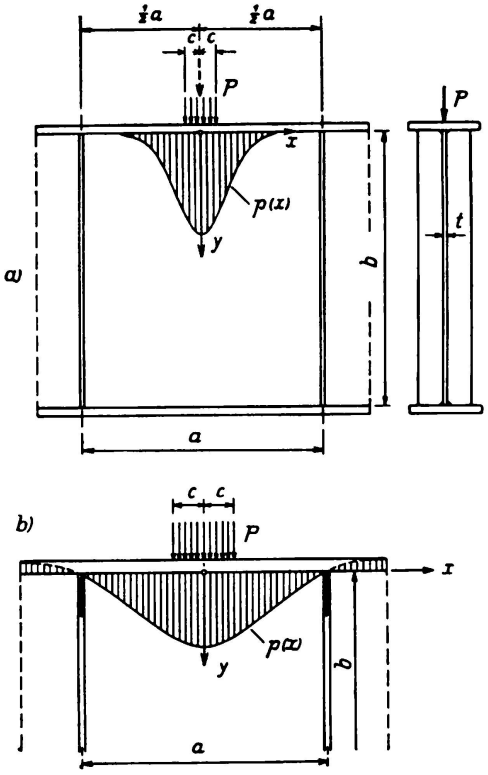

Fig. 1a et b.

On a constaté, dans le calcul de l'énergie potentielle de l'âme fléchie, qu'une partie de l'apport d'énergie des contraintes σ_{x2} est supprimée par l'apport relatif aux contraintes τ_2. C'est pourquoi on a tout d'abord négligé les contraintes de disque σ_{x2} et τ_2 dans l'étude de la stabilité, puis on a déterminé les contraintes σ_x

d'après la théorie de la flexion et calculé seulement les contraintes élémentaires σ_y de la fonction des tensions du disque d'âme. Des calculs comparatifs ont montré que les contraintes critiques ainsi déterminées ne différaient effectivement que peu des contraintes obtenues d'après la méthode exacte,[1] en tenant compte des contraintes déduites de «l'effet local».

Dans ce qui suit, nous calculons les contraintes de l'âme d'après cette méthode simplifiée. Désignons par b la hauteur de l'âme (pour les poutres rivées cette hauteur est mesurée entre les lignes de rivets des cornières des membrures) et par σ_0 la contrainte élémentaire dans la fibre extrême, au milieu ($x = 0$) du panneau d'âme étudié EF (fig. 2a), engendrée par toutes les charges de la poutre: la contrainte de flexion de cette section est:

$$\sigma_x = -\sigma_0 \left(1 - \frac{2y}{b}\right). \tag{3}$$

La même expression est introduite dans le calcul pour la contrainte de flexion de toutes les autres sections de l'âme à l'intérieur de EF.

Pour déterminer les contraintes σ_y, on introduit l'élément de poutre CD (fig. 2b) avec la charge P. La longueur de cet élément est égale à 3 fois la distance a des raidisseurs et par le fait même assez grande pour permettre de calculer avec une exactitude suffisante les contraintes σ_y à l'intérieur de EF. La fonction des tensions de Airy (développée comme la charge p (x) pour la longueur CD = 3a comme demi-période) donne:

$$\sigma_y = -\sum_{n=1,3..} \left\{ c_{1,n} \cdot e^{\frac{n\pi y}{3a}} + \right.$$
$$\left. + c_{2,n} \cdot e^{-\frac{n\pi y}{3a}} + c_{3,n} \cdot \frac{n\pi y}{3a} e^{\frac{n\pi y}{3a}} + c_{4,n} \cdot \frac{n\pi y}{3a} e^{-\frac{n\pi y}{3a}} \right\} \cos \frac{n\pi x}{3a}. \tag{4}$$

Les constantes $c_{1,n} \ldots c_{4,n}$ sont à déterminer à partir des conditions aux bords de l'âme. Comme les contraintes σ_y sont simplement calculées à partir de la fonction des tensions, il faut renoncer ici à satisfaire entièrement aux conditions de transition (effet de liaison); il n'est ainsi pas seulement possible d'arriver à une simplification du calcul, mais aussi à des résultats plus généraux.

L'étude de la stabilité est de nouveau effectuée par panneaux et l'établissement des équations de voilement se fait en admettant que les bords de l'âme sont «appuyés librement» le long des membrures et des raidisseurs. Les membrures et les raidisseurs sont considérés comme rigides vis-à-vis d'un fléchissement perpendiculaire au plan de l'âme. En outre, on admet pour le panneau étudié EF (fig. 2) une forme de voilement qui, dans le sens longitudinal de la poutre, n'a qu'une seule demi-onde. Les résultats sont sûrement valables pour $a \leq 0{,}9b$. S'il n'y avait aucune surcharge locale de l'âme, cette dernière se voilerait en une demi-onde aussi longtemps que $a < 0{,}9b$ sous l'effet des contraintes de flexion σ_x. Lorsque l'on a un effet local qui engendre toujours un voilement symétrique par rapport à l'axe des y, il se produit toujours d'abord un voilement en une demi-onde (même en cas d'une autre déformation) même pour de plus grands rapports $\frac{a}{b}$. Il n'était pas possible, par suite de l'ampleur des développements

mathématiques nécessaires, d'effectuer une étude plus exacte de ces relations; c'est pourquoi nous avons admis comme limite $a = 0{,}9\,b$.

En limitant autant que possible le nombre de termes on a choisi pour l'ondulation $w(x, y)$ du panneau EF l'expression:

$$w = \left(A \cdot \sin\frac{\pi y}{b} + B \cdot \sin\frac{2\pi y}{b} + C \cdot \sin\frac{3\pi y}{b}\right)\cos\frac{\pi x}{a} \tag{5}$$

qui satisfait aux conditions aux bords sous forme de «conditions de Navier». A l'aide de cette équation à trois termes, il est possible de déterminer à peu près exactement l'ondulation de la tôle, surtout lorsque l'influence des contraintes σ_y est fortement réduite par rapport à l'influence des contraintes σ_x (c'est-à-dire lorsque le plus grand fléchissement de la tôle s'éloigne de la membrure chargée). C'est ce qui se produit précisément dans les exemples d'application les plus importants.

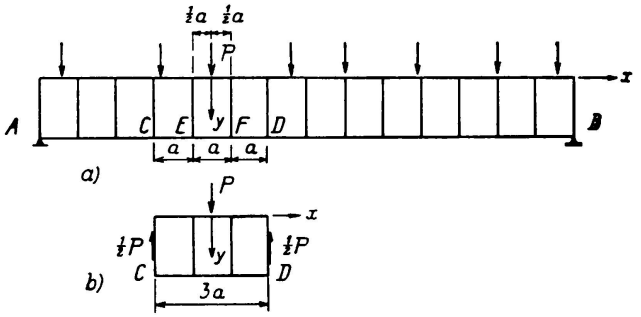

Fig. 2a et b.

Nous allons calculer maintenant, à l'aide des équations (3), (4) et (5), l'énergie potentielle e de la tôle d'âme EF tendue et fléchie.[2] Pour chaque variation δw de l'état de déformation, la condition $\delta e = 0$ doit être satisfaite. Si l'on fait varier dans l'ordre les constantes A, B et C de l'équation (5) et si l'on forme les $\delta e = 0$ correspondants, on obtient les équations suivantes pour le voilement:

$$A\left[\frac{1}{k}\cdot\frac{\pi^2}{12\beta}(1+9\beta^2)^2 - 2\varkappa r_1\right] - B\left[\frac{8}{3}\beta + \varkappa r_4\right] - C\varkappa r_5 = 0$$

$$-A\left[\frac{8}{3}\beta + \varkappa r_4\right] + B\left[\frac{1}{k}\cdot\frac{\pi^2}{12\beta}(4+9\beta^2)^2 - 2\varkappa r_2\right] - C\left[\frac{72}{25}\beta + \varkappa r_6\right] = 0 \tag{6}$$

$$-A\varkappa r_5 - B\left[\frac{72}{25}\beta + \varkappa r_6\right] + C\left[\frac{1}{k}\cdot\frac{\pi^2}{\beta}\cdot\frac{27}{4}(1+\beta^2)^2 - 2\varkappa r_3\right] = 0$$

où: $\beta = \frac{b}{3a}$, $k = \frac{\sigma_0}{\sigma_e}$, σ_e (contrainte d'Euler) $\frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2$, $\varkappa = \frac{P}{at}\cdot\frac{1}{\sigma_0}$

et $r_1 \ldots r_6$ les sommes suivantes:

$$r_1 = \sum_{n=1,3\ldots}\frac{a p_n}{P}\left[\frac{1}{n^2\beta^2} + \frac{n^2\beta^2}{(4+n^2\beta^2)^2}\right]\varphi_n,$$

$$r_2 = 4\sum_{n=1,3\ldots}\frac{a p_n}{P}\left[\frac{1}{n^2\beta^2} + \frac{n^2\beta^2}{(16+n^2\beta^2)^2}\right]\varphi_n,$$

$$r_3 = 9\sum_{n=1,3\ldots}\frac{a p_n}{P}\left[\frac{1}{n^2\beta^2} + \frac{n^2\beta^2}{(36+n^2\beta^2)^2}\right]\varphi_n,$$

$$r_4 = 4\sum_{n=1,3\ldots}\frac{a p_n}{P}\left[\frac{1}{(1+n^2\beta^2)^2} + \frac{1}{(9+n^2\beta^2)^2}\right]n^2\beta^2\psi_n,$$

[2] *A. Nadai:* Elastische Platten, Berlin 1925.

$$r_5 = 6 \sum_{n=1,3..} \frac{a p_n}{P} \left[\frac{1}{(4 + n^2\beta^2)^2} + \frac{1}{(16 + n^2\beta^2)^2} \right] n^2 \beta^2 \varphi_n,$$

$$r_6 = 12 \sum_{n=1,3..} \frac{a p_n}{P} \left[\frac{1}{(1 + n^2\beta^2)^2} + \frac{1}{(25 + n^2\beta^2)^2} \right] n^2 \beta^2 \psi_n,$$

avec les grandeurs auxiliaires:

$$\varphi_n = \frac{18}{36 - n^2} \sin \frac{n\pi}{6} \cdot \frac{1 - e^{-n\pi\beta}}{(1 + e^{-n\pi\beta}) + \frac{2 n\pi\beta e^{-n\pi\beta}}{1 - e^{-n\pi\beta}}}$$

et

$$\psi_n = \frac{18}{36 - n^2} \sin \frac{n\pi}{6} \cdot \frac{1 + e^{-n\pi\beta}}{(1 - e^{-n\pi\beta}) - \frac{2 n\pi\beta e^{-n\pi\beta}}{1 + e^{-n\pi\beta}}}$$

Comme les constantes A, B et C doivent être différentes de zéro, le déterminant du numérateur de l'équation (6) doit être nul. Cette condition permet de calculer la racine $k = k_{min}$ la plus petite différente de zéro. La contrainte critique dans la fibre extrême de l'âme entre E et F est donc $\sigma_{o,\,crit} = k_{min} \cdot \sigma_e$ et la valeur critique correspondante de la charge P du panneau est $P_{crit} = \varkappa a t\, \sigma_{o,\,crit}$.

Afin de pouvoir évaluer les contraintes et les charges critiques, même dans le cas d'un voilement inélastique, les résultats calculés pour un matériau élastique sans limite sont interpolés à l'aide des contraintes de flambage d'une barre de comparaison. Dans la détermination de la sollicitation maxima de la tôle, il faut tenir compte de l'apport de contrainte à $\sigma_{x\,max}$ résultant de l'effet local; on peut le remplacer par la valeur un peu plus grande $(\sigma_y)_{x=0,\ y=0}$.

Lors de l'interprétation des résultats, il ne faut pas oublier que l'on ne s'est servi que d'une approximation pour l'ondulation w (x, y) et que l'on obtient ainsi de trop grandes contraintes critiques. D'autre part nous avons admis diverses hypothèses trop sévères; nous avons admis par exemple des appuis articulés aux bords de la plaque alors que l'on a toujours un encastrement élastique et que cet encastrement fait croître sensiblement la stabilité de la tôle. Quant au voilement inélastique, il faut encore faire remarquer que la plus forte sollicitation de la tôle se trouve à un des bords appuyés et qu'elle n'est que locale, de telle sorte que dans le cas de déformations plastiques, il se produit une égalisation partielle des contraintes. La *véritable* charge de voilement peut se trouver bien au-dessus de la charge critique. A côté de la résistance à la distorsion des panneaux voisins, qui empêche la propagation du voilement de la tôle, la résistance à la flexion de la membrure chargée *peut* permettre un accroissement de la charge au-dessus de la limite de stabilité de l'âme. Les membrures élancées ont elles-mêmes besoin de l'appui de l'âme pour résister au flambage dans le plan de la paroi portante.

Dans un mémoire que nous publierons ultérieurement, et qui contiendra des tables pour l'application pratique de cette méthode de calcul un peu compliquée, nous traiterons d'une façon encore plus approfondie le problème exposé ici.