Untersuchung über das Ausknicken des parabelförmigen Druckgurtes eines Vierendeel-Trägers

Autor(en): **Desprets, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht**

Band (Jahr): **2 (1936)**

PDF erstellt am: **18.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-2854

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

V 17

Untersuchung über das Ausknicken des parabelförmigen Druckgurtes eines Vierendeel-Trägers.

Etude du flambage d'ensemble de l'arc parabolique comprimé d'une poutre Vierendeel.

Investigation of the Buckling of a Parabolic Arch in a Vierendeel Girder under Compression.

R. Desprets,
Professeur à l'Université de Bruxelles.

Beim parabelförmigen Bogengurt eines Vierendeel-Trägers lassen sich ebenso wie bei einem Bogensehnenträger die Beanspruchungsbedingungen (und Berechnungsgrundlagen) für den Knickfall nur schwer einwandfrei ausdrücken. Der Bogen ist sowohl durch seine mit dem Untergurt (Zugband) und der Fahrbahn fest verbundenen Bogenenden eingespannt, als auch kräftig an sehr steifen Pfosten befestigt, die ihrerseits in Gestalt umgekehrter Portale mit der Fahrbahn steif verbunden sind.

Man kann indessen den Bogen wenigstens in seinem mittleren Teil, wo die Pfostenhöhe wenig schwankt, als einen von gleich hohen Pfosten gestützten geraden Gurt ansehen. Man wird also einen Grenzwert erhalten, wenn man den Bogen in diesem Abschnitt wie einen gewöhnlichen geraden Gurt behandelt und Knickkraft und Knicklänge nach einem der bekannten Verfahren von *Engesser, Timoshenko, Pigeaud* oder anderen ermittelt.

Um jedoch zu schärferen Ergebnissen zu gelangen, hat man versucht, der Einspannung der Bogenenden Rechnung zu tragen und hat dazu unter Anwendung des Verfahrens von *Timoshenko* für die Biegelinie eine den Umständen entsprechende, zugleich aber zur Vereinfachung der Rechnung geeignete einfache Form angenommen. Da ein Ausknicken am ehesten in der Mitte, in der Zone der größten Pfostenhöhen, zu erwarten ist, wurde dabei zur weiteren Vereinfachung die Höhe der Pfosten als gleichbleibend vorausgesetzt.

Diese Annahmen werden durch die für die Wellenlängen ermittelten Rechnungsergebnisse augenfällig bestätigt. Bei der Untersuchung des gewöhnlichen Knickens eines geraden, an den Enden drehbar gelagerten Stabes legt man für die Biegelinie eine einfache Sinuslinie zugrunde; um der Einspannung an den Enden Rechnung zu tragen, hat man dafür eine Gleichung von der Form

$$y = f\left(\sin \pi \frac{x}{L} - K \sin 3 \pi \frac{x}{L}\right)$$

gewählt.

Der in Trägermitte als geradlinig angenommene Bogen ist als X-Achse gewählt. Der Koordinaten-Anfang liegt an dem einen Ende, die Achse der y (der Ausbiegungen) steht senkrecht zur Trägerebene. Ferner wird angenommen, daß die Druckkraft im Bogen zwischen den beiden Stützen überall gleich sei.

Das Näherungsverfahren von *Timoshenko* beruht darauf, daß die äußere Arbeit des Bogenschubes den Arbeiten der Pfostenwiderstände und der inneren Kräfte gleichgesetzt wird.

Arbeit des Bogenschubes.

Der Weg des Bogenschubes ist gleich dem Längenunterschied zwischen dem deformierten Bogen und seiner Projektion,

$$\text{also } \Delta x = \int_0^L (ds - dx), \quad ds = \left(1 + y'^2\right)^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{oder annähernd}$$

$$ds = \left(1 + \frac{1}{2} y'^2\right) dx$$

$$ds - dx = \frac{1}{2} y'^2 dx$$

$$\int_0^L (ds - dx) = \Delta x = \frac{1}{2} \int_0^L y'^2 dx$$

$$T_Q = Q \cdot \Delta x.$$

Arbeit der Pfostenwiderstände.

Wir nehmen mit *Engesser* an, daß diese Widerstände stetig über die Bogenlänge verteilt seien, eine Annahme, die übrigens beim Vierendeelträger weit größere Berechtigung hat, als bei einem Fachwerkträger. Die Verbreiterung der Pfosten an ihrem oberen und unteren Ende verwirklicht in weitgehendem Maße diese Stetigkeit und macht diese Annahme sogar wahrscheinlicher als die von Einzelwiderständen. Der Pfostenwiderstand ist durch zwei Werte bestimmt, die von der Biegungssteifigkeit des Pfostens selbst und von derjenigen des Querträgers abhängen, mit dem er fest verbunden ist.

Sieht man von der Versteifung durch das Anschlußblech ab und bezeichnet man mit h die Höhe des Pfostens, mit p die Stützweite des Querträgers, mit I_h und I_p die Trägheitsmomente dieser Brückenteile ($\varepsilon = E \cdot I$), so wird die seitliche Verschiebung Σf des Pfostenkopfes unter der Wirkung der Lasteinheit:

$$\Sigma f = \frac{h^2 \cdot p}{2\,\varepsilon_p} + \frac{h^3}{3\,\varepsilon_h}.$$

Andererseits ist der Einheitswiderstand bei stetiger Verteilung gleich Cy, wenn y ein Biegungspfeil ist; bezeichnet λ die Feldweite, so ist

$$\lambda C \Sigma f = 1, \text{ woraus } C = \frac{1}{\lambda \Sigma f}.$$

Die Arbeit der seitlichen Widerstände wird dann

$$\int_0^y \int_0^L Cy\,dy\,dx = \frac{C}{2} \int_0^L y^2 dx.$$

Arbeit der inneren Kräfte.

Wird nur die elastische Biegungsarbeit berücksichtigt, so erhält man nach einer bekannten Formel

$$T_i = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{\varepsilon}\,dx$$

oder, wenn M mit Hilfe von y″ ausgedrückt wird,

$$T_i = \frac{1}{2}\int_0^L \varepsilon y''^2 dx = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^L y''^2 dx,$$

wobei I als konstant angenommen ist.

Allgemeine Gleichung.

Wie oben angegeben, hat man für die Verformung der Bogenachse folgende Gleichung angenommen:

$$y = f\left(\sin \pi \frac{x}{L} - K \sin 3\pi \frac{x}{L}\right)$$

$y = 0$ an den beiden Enden und $y = f\ (1 + K)$ in der Mitte.

$$y' = f\frac{\pi}{L}\left(\cos \pi \frac{x}{L} - 3K \cos 3\pi \frac{x}{L}\right)$$

$$\int_0^L y'^2 dx = f^2 \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \frac{L}{2}(1 + 9K^2)$$

$$\int_0^L y^2 dx = f^2 \frac{L}{2}(1 + K^2)$$

$$y'' = -f\frac{\pi^2}{L^2}\left(\sin \pi \frac{x}{L} - 9K \sin 3\pi \frac{x}{L}\right)$$

$$\int_0^L y''^2 dx = f^2 \frac{\pi^4}{L^4} \cdot \frac{L}{2}(1 + 81K^2).$$

Die Grundgleichung lautet also:

$$P\frac{1}{4}\frac{f^2\pi^2}{L}(1 + 9K^2) = \frac{Cf^2L}{4}(1 + K^2) + \frac{1}{4}f^2\frac{\pi^4}{L^3}\varepsilon(1 + 81K^2)$$

schließlich:

$$P = \frac{\varepsilon\pi^2}{L^2}\frac{1 + 81K^2}{1 + 9K^2} + C\frac{L^2}{\pi^2}\frac{1 + K^2}{1 + 9K^2}.$$

Im Falle des einfachen Knickens nimmt diese Beziehung folgende Form an:

$$P = \frac{\varepsilon\pi^2}{L^2} + C\frac{L^2}{\pi^2}.$$

Sie enthält also neben der *Euler*-Formel als erstem noch ein zweites Glied, das vom Pfostenwiderstand herrührt. Bestimmt man in bekannter Weise aus $\frac{dP}{dL} = 0$ das Minimum von P, so erhält man, wenn L_1 die Knicklänge ist,

$$C \cdot \frac{L_1^2}{\pi^2} = \frac{\varepsilon \pi^2}{L_1^2}$$

die Knickkraft

$$P_1 = 2\frac{\varepsilon \pi^2}{L_1^2} = 2\frac{C \cdot L_1^2}{\pi^2}; \quad P_1 = 2\sqrt{C \cdot \varepsilon}; \quad L_1 = \pi \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{C}}, \text{ wo } \varepsilon = E \cdot I.$$

Um die Minimumsbedingung für P unter der neuen Annahme zu erhalten, wird man schreiben:

$$P = \frac{\varepsilon \pi^2}{L^2} \cdot A + \frac{C L^2}{\pi^2} \cdot B$$

die Bedingung $\frac{dP}{dL} = 0$ nimmt die Form an

$$B \cdot \frac{C L_2^2}{\pi^2} = A \cdot \frac{\varepsilon \pi^2}{L_2^2}$$

$$L_2^4 = \pi^4 \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{\varepsilon}{C}$$

$$L_2 = \pi \sqrt[4]{\frac{A}{B}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{C}}$$

$$P_2 = \frac{\varepsilon \pi^2}{L_2^2}\left(1 + \frac{A}{B}\right)$$

$$A = \frac{1 + 81\,K^2}{1 + 9\,K^2}$$

$$B = \frac{1 + K^2}{1 + 9\,K^2}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{1 + 81\,K^2}{1 + K^2}.$$

Aus dem Vergleich dieses Ergebnisses mit dem vorigen ergibt sich:

$$L_2 = L_1 \sqrt[4]{\frac{A}{B}}$$

$$P_2 = \frac{\varepsilon \pi^2}{L_1^2} \sqrt{\frac{B}{A}}\left(1 + \frac{A}{B}\right) = P_1 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{A}}\left(1 + \frac{A}{B}\right)$$

Um von diesen Ausdrücken einen zahlenmäßigen Begriff zu bekommen, muß man den Wert für K wählen. Wird daran festgehalten, daß an den Enden $y' = 0$ sein soll, so ergibt sich

$$f \frac{\pi}{L}(1 - 3\,K) = 0; \quad K = \frac{1}{3}.$$

Dieser Wert von K würde dem Beiwert A des Gliedes $\frac{\varepsilon\pi^2}{L^2}$ von P den Wert 5 erteilen; es scheint jedoch, daß A auch unter den günstigsten Umständen den einer vollkommenen Einspannung entsprechenden Wert 4 nicht überschreiten kann.

Das würde darauf hinauslaufen, daß man $K^2 = \frac{1}{15}$ oder $K \sim \frac{1}{4}$ setzt. Mit diesem Werte von K erhält man folgende Ergebnisse:

1. $K^2 = \frac{1}{9}, \quad \frac{A}{B} = 9, \quad \sqrt[2]{\frac{B}{A}} = \frac{1}{3}$

$$P_2 = \frac{\varepsilon\pi^2}{L_1^2}\sqrt[2]{\frac{B}{A}}\left(1 + \frac{A}{B}\right) = \frac{\varepsilon\pi^2}{L_1^2} \cdot \frac{10}{3}$$

$$L_2 = L_1 \cdot \sqrt[4]{\frac{A}{B}} = L_1 \sqrt[2]{3} = L_1 \cdot 1{,}73$$

2. $K^2 = \frac{1}{15}, \quad \frac{A}{B} = 6, \quad \sqrt[2]{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2{,}45}$

$$P_2 = \frac{\varepsilon\pi^2}{L_1^2} \cdot \frac{7}{2{,}45} = 2{,}85\,\frac{\varepsilon\pi^2}{L_1^2}$$

$$L_2 = L_1 \cdot \sqrt{2{,}45} = L_1 \cdot 1{,}565$$

3. Wenn $K^2 = 0$ wird $L_1 = L_2$ und $P_2 = 2 \cdot \varepsilon \frac{\pi^2}{L_1^2}$.

Zahlenbeispiel.

An Hand dieser Ergebnisse wurde ein parabolischer Vierendeelträger einer eingleisigen Eisenbahnbrücke von 100,10 m Stützweite und 14,30 m Pfeilhöhe ($^1/_7$) mit 11 Feldern von je 9,10 m Länge durchgerechnet. Man erhielt $L_1 \sim 34$ m; $P_1 \approx 2 \cdot 1500$ t ≈ 3000 t.

Unter der Annahme einer Einspannung mit $K^2 = \frac{1}{15}$

$$L_2 = L_1 \cdot 1{,}565 = 53 \text{ m} = L_2$$

$$P_2 = \frac{\varepsilon\pi^2}{L_1^2} \cdot 2{,}85 = 4250 \text{ t}$$

Wenn $K^2 = \frac{1}{9}, \quad L_2 = L_1 \cdot 1{,}73 = 58{,}5 \text{ m} = L_2$

$$P_2 = \frac{\varepsilon\pi^2}{L_1^2} \cdot \frac{10}{3} = 1500 \cdot \frac{10}{3} = 5000 \text{ t}.$$

In dem fraglichen Bogen erreicht die achsiale Gurtkraft bei Vollbelastung und unter Zurechnung der dynamischen Wirkung der bewegten Last im Scheitel 1035 t und an den Bogenkämpfern 1230 t.

Diese Schätzungen zeigen, daß im ungünstigsten Grenzfall eines nicht eingespannten Trägers von konstanter Höhe die Knickkraft für den Gurt als Ganzes noch einen Sicherheitskoeffizienten von nahezu 3 aufweist. Geht man, in besserer

Übereinstiimmung mit der Wirklichkeit, davon aus, daß die Enden weitgehend eingespannt und auf den durch Pfosten und Querträger gebildeten Rahmen fest gelagert sind, so würde sich mit $K^2 = \frac{1}{15}$ der Sicherheitsgrad auf mindestens 4 erhöhen.

Man kommt danach zu der Feststellung, daß sich für den Bogen je nach den maßgebenden Lagerungsverhältnissen nahezu die gleiche Knicksicherheit ergibt, ob man nun Pfostenlagerung annimmt, oder Endeinspannung und dann die ganze Bogenlänge betrachtet.

Schließlich kann man aus diesen Ergebnissen den Schluß ziehen, daß die Steifigkeit der Pfosten die seitliche Widerstandsfähigkeit des Trägers beträchtlich erhöht. Diese Zunahme ist um so bedeutender, je steifer die Pfosten sind und je kontinuierlicher ihre Verbindung mit dem Bogen gestaltet ist. Diese Bedingungen sind bestmöglich an dem besprochenen Vierendeelträger erfüllt.