Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Anwendung von Schalen im Stahlbau

Autor: Laffaille, B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-2734

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

V 11

Anwendung von Schalen im Stahlbau.

Application des voiles minces en construction métallique.

The Use of Shells in Steel Structures.

B. Laffaille,
Ingénieur des Arts et Manufactures, Paris.

A. Allgemeine Betrachtungen.

Im 4. Band der „Abhandlungen" der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, 1935, haben wir in der Arbeit bezüglich der allgemeinen Untersuchung der Regelschalen auseinandergesetzt, welches die Grundsätze und die Anwendungen seien, die im Eisenbetonbau aus der Berücksichtigung der Krümmungen der Regelschalen in Funktion des geometrischen Gleichgewichtes gezogen werden können.

Am Schluß dieses Berichtes wiesen wir darauf hin, daß uns diese Prinzipien für die Stahlkonstruktionen anwendbar schienen. Wir stellten noch genauer fest, daß das wahre Problem auf diesem neuen Gebiet wahrscheinlich ein Knickproblem der Schalen sei.

Wir wollen hier Überlegungen der Reihe nach entwickeln.

Bevor wir diese Zusammenfassung unserer Arbeiten beschreiben, betrachten wir es als unsere Aufgabe, die wertvollen Mitarbeiten zu erwähnen und wir wollen sogar betonen, daß diese Mitarbeiten es uns ermöglicht haben, das Problem nicht, wie man versucht sein könnte, nach den einfachen Gesetzen der Festigkeitslehre, sondern allgemeiner zu lösen. Vorerst hat uns die Unternehmung *Rouzaud* in Paris alle die Fragen der Vorversuche erleichtert, bis zu den ersten Ausführungs-Konstruktionen, hergestellt durch die Unternehmung *Delattre* und Frouard. Herr *L. Beschkine,* Ingénieur des Arts et Manufactures, mit welchem wir diese allgemeinen Fragen seit mehreren Jahren durchstudiert haben, hat selbst zur Ausarbeitung der besonderen Berechnungen dieser Schalen beigetragen.[1]

Als es sich um die Betrachtung des Knickens in Verbindung mit den Einflüssen der Krümmungen und den örtlichen Spannungsverteilungen handelte, haben wir in Herrn *F. Vasilesco,* Dr. ès. sc., einen hervorragenden Mitarbeiter gefunden, dem es dank der mathematischen Kenntnisse möglich war, neue Probleme von einem ganz allgemeinen Gesichtspunkt aus zu lösen.

Es ist uns gelungen, das Interesse des Herrn *R. Camelot,* Architekt der öffent-

[1] Siehe 4. Bd. der „Abhandlungen" der I.V.B.H. 1936.

lichen Bauten, Träger des großen Preises von Rom, für die Entwicklung der neuen Bauweise wachzurufen, der eine allgemeine Bedeutung zukommt.

Vor allem handelt es sich darum, ein Schema von festen Bauarten und eine gangbare Stahlkonstruktion aufmerksam zu untersuchen.

Wir unterscheiden zum Vorneherein zwei Typen von Elementen: solche, welche die Belastungen aufnehmen, wie die Binder, die Pfetten, die Pfosten, die Hängesäulen, die Streben — und diejenigen Elemente, die ausschließlich zum Überdecken dienen, wie z. B. das Wellblech.

Schon in der Zusammensetzung und in der Anordnung der tragenden Elemente sind wir oft erstaunt über die Mannigfaltigkeit und Verschiedenheit der Teile, die sich gegenseitig belasten.

Ein Sparren beansprucht eine Pfette auf Biegung, eine Pfette biegt einen Nebenbinder, der auf Pfettenbalken ruht, und letztere belasten die Hauptbinder. Diese letzteren übertragen endlich die Kräfte durch die Stützen auf den Boden.

Bei einem Konstruktionsproblem handelt es sich darum, unter Berücksichtigung der erforderlichen Sicherheit die auftretenden Kräfte mit einem Minimum an Material ins Gleichgewicht zu bringen. Zunächst scheint es, als ob die wirklich vielseitige Aufeinanderfolge der tragenden Bestandteile nicht mit einem einfachen Schema übereinstimmen würde. Die Erklärung, in dieser jedoch geläufigen Art vorzugehen, muß in der Tatsache gesucht werden, daß die ausschließlich im Stahlwerk hergestellten Stücke wegen ihrer Dimensionen, der Arten der Zusammenstellungen und der Zusammensetzungen tragenden Teilstücken einfache und bekannte Formen voraussetzen.

Wenn man noch den Transport und das Gewicht berücksichtigt, so kommt man zuletzt zur Überzeugung, daß diese komplizierten Konstruktionsschemen doch wirklich praktisch sind.

Schon das Schweißen, das als Technik des Zusammenfügens eingeführt wurde, erzeugt einfachere Formen und einfachere Anordnungen. Wenn dieses Schweißen direkt auf dem Bauplatz, anstatt in der Werkstätte ausgeführt werden kann, spielen die Dimensionen der zu transportierenden Teile für den Entwurf keine Rolle mehr und die Bauformen nähern sich den vereinfachten und rein geometrischen Formen des Gleichgewichtes der Kräfte.

Aber man sieht ein, daß es möglich ist, auch wenn man die Einfachheit in der Anordnung der Bauelemente berücksichtigt, die Konstruktionsfrage von einem allgemeinen Gesichtspunkt aus zu betrachten und folgendes zu sagen:

Hier haben wir eine zu überdeckende Fläche, somit einen minimalen, durch die Umgrenzung gegebenen Raum abzuschließen. Wir kennen die Bewegungsbedingungen der äußeren Kräfte. Setzen wir uns als Ziel, diese Beanspruchungen aufnehmen zu können und die Reaktionen in einfacher Weise auf die Stützen zu übertragen, mittels der den Raum abschließenden Umhüllende.

Es ist dies ein allgemeines, aber schließlich das einzige interessante Problem.

Und diese gleiche Idee, welche schon die so einfachen Lösungen hervorgebracht hat und im Bereich des armierten Betons für die dünnen Schalen doch so neu ist, weist uns auch im Bereich des Stahlbaues auf einen ersprießlichen Weg.

Was ist erforderlich, damit eine dünne Schale gegebene Belastungen mit der nötigen Stabilität aufnehmen kann?

In erster Linie müssen die geometrischen Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein und in zweiter Linie dürfen die lokalen Deformationen, berührend von Erscheinungen nicht geometrischen Charakters, keine elastischen Störungen im Verhalten des Gleichgewichts hervorrufen.

Einstweilen wollen wir das Problem folgendermaßen betrachten:

Eine Schale aus dünnem Blech ist in Bezug auf die beiden tangentialen Dimensionen sehr „deformierbar".

Sie zeigt sich als „Haut" und der erste Eindruck, den sie vermittelt, besteht darin, daß man das Gleichgewicht dieser Haut untersucht, indem man sie auf einen tragenden Rahmen spannt.

Dies haben wir zuerst ausgeführt. Fig. 1.

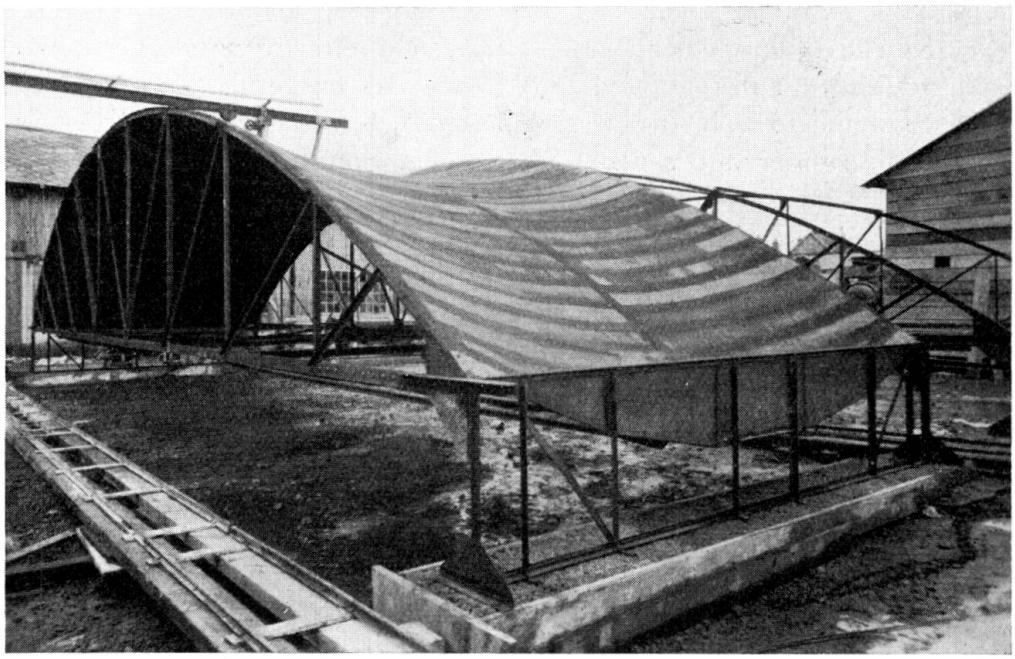


Fig. 1.

Blechschale. Rotationshyperboloid. Spannweite 14 m. Blechstärke 12/10 mm. Dreux (Frankreich).

In der Praxis wurde dies erreicht, indem man die Pfetten der klassischen Konstruktion wegließ. Man übertrug die auftretenden Kräfte direkt auf die Binder durch die Dachhaut.

Dieses erste Resultat bewirkt schon eine Ersparnis.

Es ist interessant hier einige Bemerkungen anzubringen.

Zuerst wollten wir in diesem Falle systematischer die gegengekrümmten Schalen anwenden.

Diese Schalen boten den Vorteil, daß das Metall auf Zug beansprucht werden konnte, selbst dann, wenn die Kräfte das Vorzeichen ändern, was bei leichten Decken entstehen kann, die der Wirkung des Windes unterliegen, der abwechselnd als Zug- und als Druckkraft auftritt.

Hätten wir zweitens z. B. einfache zylindrische Schalen statt gegengekrümmte Schalen angewendet, so würde sich in vielen Belastungsfällen — die jedoch immer im Innern Hauptzugspannungen ergeben — ein der Krümmung folgen-

des „Rollen“ ergeben, sobald das Seilpolygon der Kräfte nicht mehr mit der Mittellinie des beanspruchten Elementes übereinstimmen würde.

Dieses „Rollen“, welches durch Abscheren aufgehalten werden kann, wenn die Schale dem Knicken einigen lokalen Widerstand entgegensetzt, würde hier unbedingt die Gefahr von Deformationen und Faltungen heraufbeschwören.

Es sei hier auf eine Notiz in der Zeitschrift „Génie Civil“ 1933 von Herrn *F. Aimond* hingewiesen, die bemerkt, wie wichtig es wäre, hyperbolische Paraboloid-Schalen aus Stahl herzustellen, ohne jedoch die Anwendungsmöglichkeit dieser Schalen in Bezug auf die Reaktionen der Ränder anzugeben.

In der Tat ist eine solche hyperbolische Paraboloid-Schale in der Praxis der Stahlkonstruktion kaum anwendbar, wegen der Schwierigkeit des Entwurfes und der Montage. Schon von den ersten Versuchen an haben wir eine gegengekrümmte Rotationsschale gewählt, sodaß wir zur Bildung der gesamten Oberfläche stets das selbe Konstruktionselement hatten, das sich sehr oft wiederholt. Wie dem auch sei, wir haben auf diese Art und Weise das ausgeführt, was wir ein teilweise selbsttragendes Flächentragwerk nennen, d. h. die gegebenen Kräfte werden durch einfache Binder auf Stützen übertragen. Somit konnten wir die Pfetten unterdrücken.

Es schien uns dann unter Vorbehalt einer klugen Wahl der Krümmungen möglich, die dünnen Blechschalen ohne Einschränkung zu verwenden, ohne dadurch für das Vorzeichen der lokalen Spannungen bestimmte Vorschriften erfüllen zu müssen. Man sieht sich sofort dem Knickproblem gegenübergestellt. Diese Erscheinungen müßten genauer untersucht werden und durch die Änderungen der Krümmungen längs des gedrückten Randes des Profilquerschnittes sollte man Stabilitätsbedingungen verwirklichen können. Wir haben viele Modellversuche unternommen. Diese Versuche zeigten deutlich die wichtige Rolle der transversalen Versteifungen, die durch genietete Rahmen gebildet werden. Fig. 2, Fig. 3.

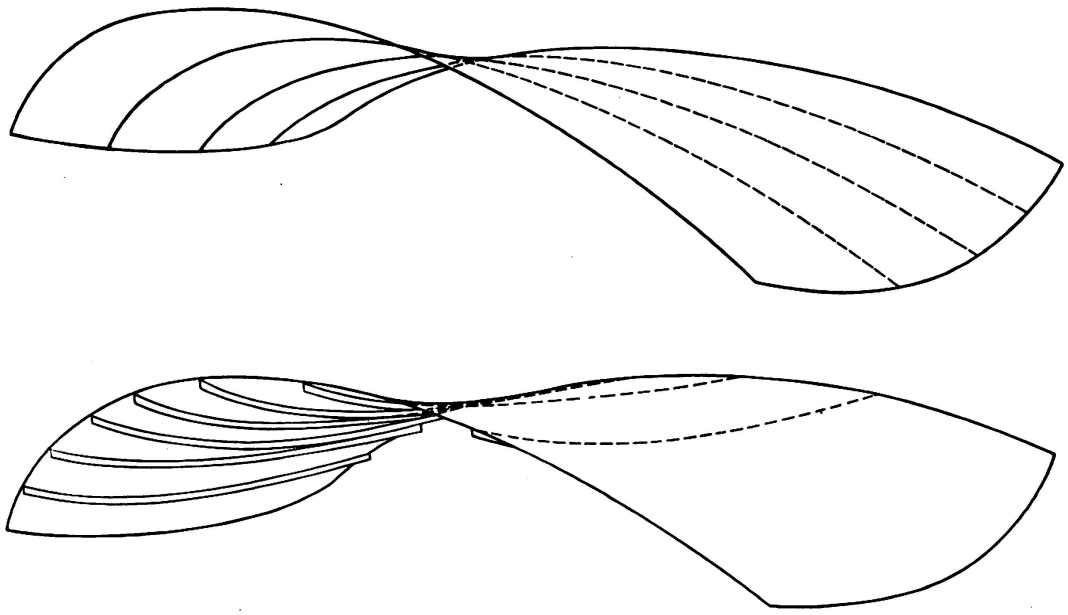


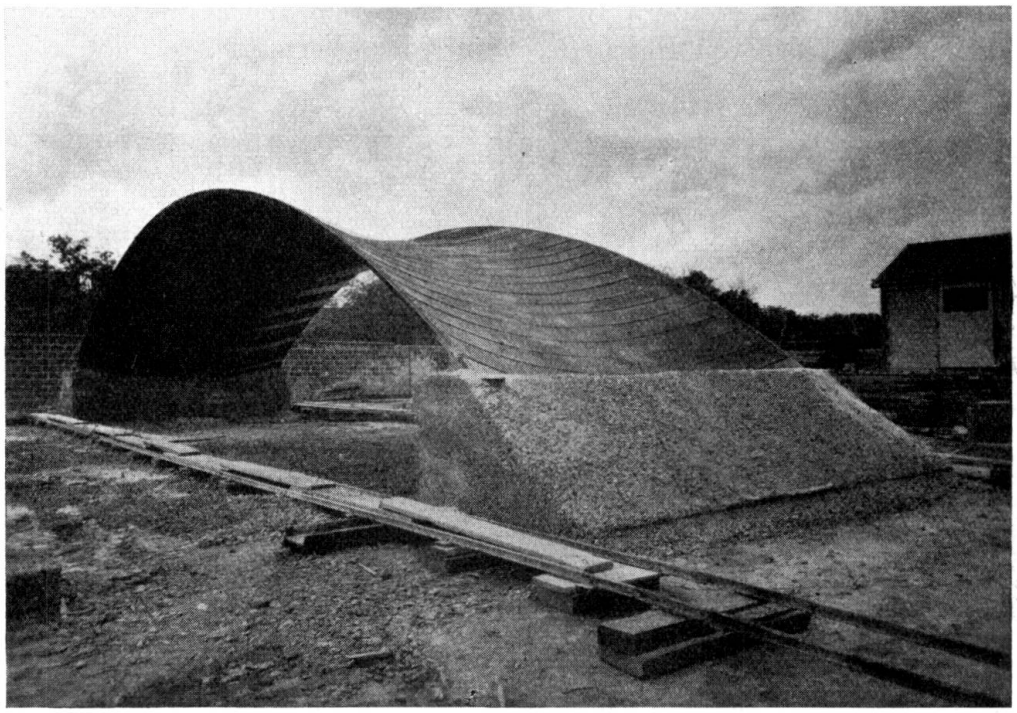
Fig. 2 und 3.

Gegengekrümmte Schalen mit Aussteifungen. Rotationshyperboloid.

Eine gleiche dünne gegengekrümmte Schale, die in Wirklichkeit als Bogen ohne jede Versteifung wirkte, weist unter einer Belastung eine „weiche" Haltung auf. Die kleinste Kraftveränderung führt eine Deformation herbei. Wenn wir hingegen transversale Versteifungen anbringen, verbessern wir mehr und mehr die Steifigkeit des Ganzen. Der Abstand zwischen den Versteifungen hat noch einen bedeutenden Einfluß.

Mit Hilfe dieser Versuche haben wir die Konstruktionsart selbsttragender dünner Schalen aus Blech entwickelt.

Wir haben davon sofort eine erste Ausführung machen lassen, indem wir die Dimensionen und Angaben übernahmen, die wir für die Versuche der nur auf Zug beanspruchten teilweise selbsttragenden Schalen gemacht haben. Fig. 4, Fig. 5.



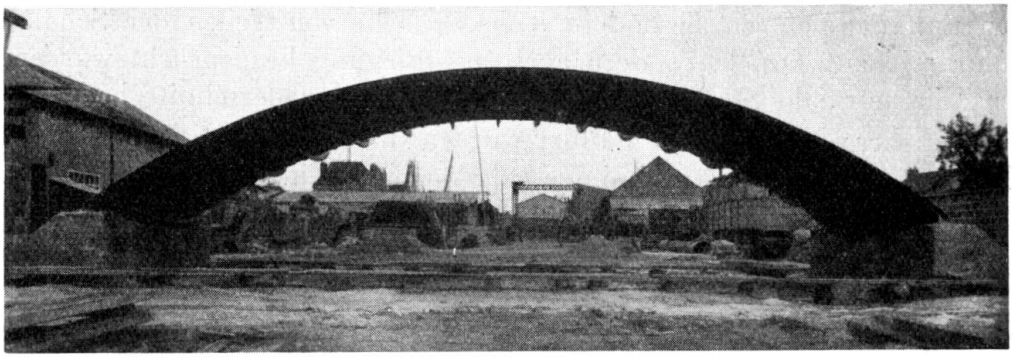


Fig. 4 und 5.

Blechschale. Fläche mit Rahmen. Rotationshyperboloid. Spannweite 14 m. Blechstärke 12/10 mm. Dreux (Frankreich).

Man unterscheidet auf diesen Photographien die transversalen Versteifungsrahmen gut, die aus einfach ausgeschnittenen Blechriemen bestehen.

Eine solche Schale von 14 m Spannweite wog — Blech und Versteifungen inbegriffen — 13 kg/m² Grundfläche. Sie wurde bei den Versuchen mit 70 kg/m² belastet, ohne sich merklich zu deformieren.

Man sieht, daß für verhältnismäßig kleine Spannweiten die erzeugten bezogenen Ermüdungserscheinungen relativ klein sind, von der Größenordnung von 3 oder 4 kg/m². Für wichtige Konstruktionen, die wir anstreben, hatte man alle Ursache auf höhere Spannungen zu gehen, wenn man das Blech auf eine interessante und ökonomische Art verwenden wollte.

Wir mußten dann die Frage des lokalen Ausknickens einer Schale untersuchen.

Wir ließen auf den Werkplätzen der Marine-Stahlwerke in St. Chaumond Versuche durchführen, indem wir kreisförmige Zylinderteile, deren Radien von Modell zu Modell variierten, in Richtung der Erzeugenden zusammendrücken. Diese Versuche wurden von Herrn *Beschkine,* dem Verfasser, verfolgt. Fig. 6.

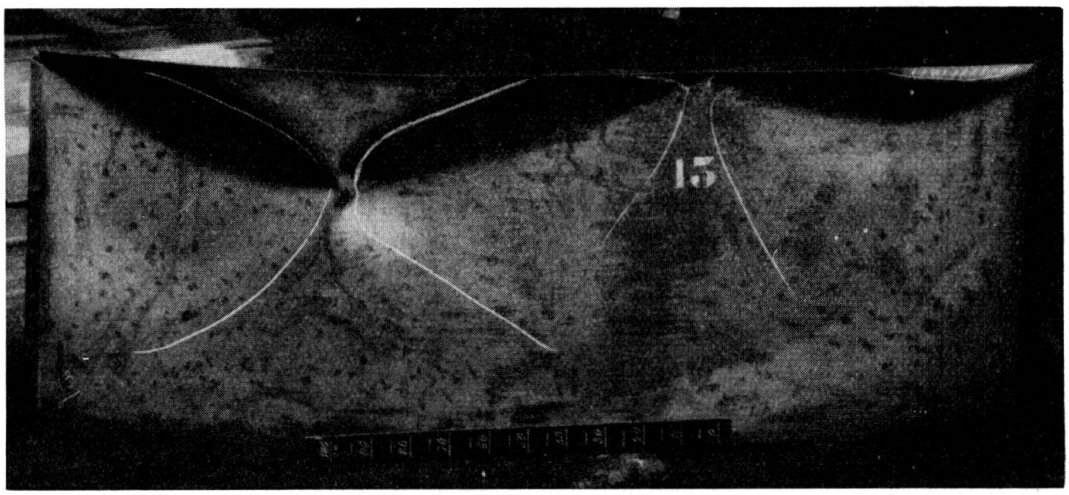


Fig. 6.

Knickversuch durch einfachen Druck an einem Blechteil 30/10 mm. St. Chamond.

Dann unternahmen wir besondere Knickversuche von Teilen der Schalen, die nicht nur rein auf Druck, sondern auch auf Biegung beansprucht wurden, was meistens die normale Spannungsverteilung in einem Querschnitt bedeutet.

Während diese Versuche ausgeführt wurden, haben wir gleichzeitig, dank der Mitarbeit von Herrn *Vasilesco,* einige allgemeine mathematische Regeln aufgestellt, die das Knickproblem der dünnen Schalen lösen können.

Die mathematische Arbeit, welche uns für die lokale Ausnützung des „Materials" Blech wichtig schien, wird jetzt noch weiter geführt; die ersten Resultate, gewonnen und kontrolliert durch die Versuche, haben uns genügende Angaben gegeben, um einige Konstruktionstypen ausführen zu lassen.

Wir ließen zuerst in den Werkstätten der Unternehmung *Delattre* und *Trouard* in Dannemarie-les-Lys eine Röhre von 32 m Spannweite und 3 mm Stärke aus Blech ausführen und einen Bogen aus Blech von derselben Stärke und 75 m

Spannweite. Die angewendeten Belastungen zeigten, daß diese Rahmensysteme dem Knicken vollkommen standhalten. (Fig. 7, Fig. 8, Fig. 9.)

Auf den Figuren, welche den Bogen mit 75 m Spannweite während der Montage zeigen, bemerkt man die Anordnung der Versteifungsbogen. Es sind dies sehr leichte Fachwerke aus Winkeleisen 30 · 30.

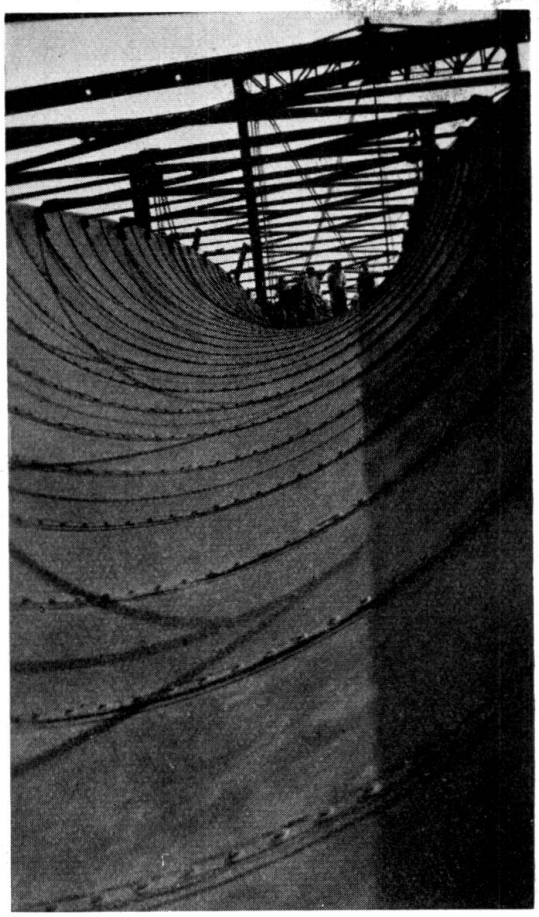


Fig. 7.
Ansicht der Oberfläche beim Bau.

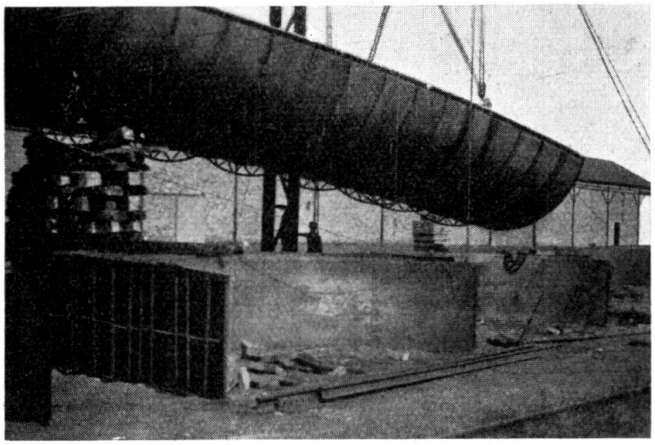


Fig. 8.
Gewölbe mit 75 m Spannweite. Blechstärke 30/10 mm. Kreisringfläche mit Rahmen. Montage der Einzelteile, Stück um Stück. Dannemarie-les-Lys.

Die Fig. 9 zeigt das Innere dieses großen Bogengewölbes. Das Fachwerksystem, welches man auf der obern Seite sieht, ist eine provisorische Montage, welche dem Bogenelement erlaubt, während dem Zusammenfügen der Teile unter sich der Torsion Widerstand zu bieten.

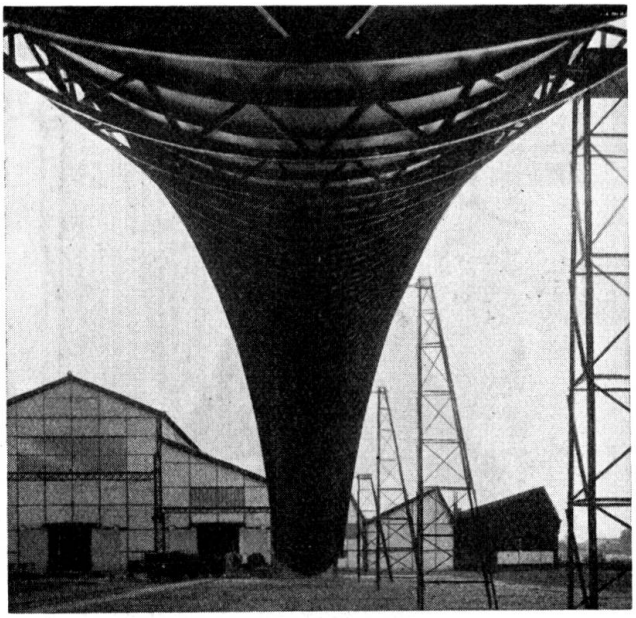


Fig. 9.

Bogen von 75 m Spannweite. Ansicht der Laibung mit den Aussteifungen (Etablissements Delattre et Frouard réunis).

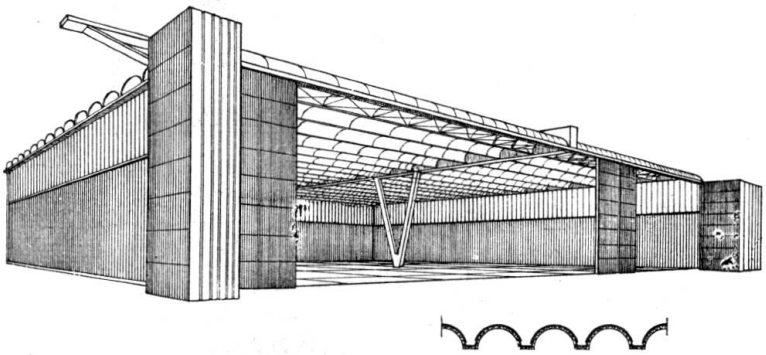


Fig. 10.

Doppelte Flughalle 67,50 m × 67,50. Blechstärke 30/10 mm. Ständige Last 62 kg/m². Bauten in Ausführung in Dijon und Cazaux.

Wir zeigen in einer Serie von Zeichnungen einige Anwendungsmöglichkeiten dieser selbsttragenden Schalen aus Blech. Die meisten von diesen Darstellungen bilden den Gegenstand von Projekten, die mit der Absicht von eventuellen Ausführungen zusammengestellt wurden. Fig. 10.

Dieses Schema stellt eine doppelte Flugzeughalle dar, gebildet aus zwei nebeneinanderliegenden Decken-Teilen, die durch einen Mittelbalken verbunden sind.

Dieser Balken stützt sich im Innern der Halle auf eine einzige zurückstehende Stütze ab.

Die Höhe der Überbauten ist sehr beschränkt. Die Angaben eines solchen Gebäudes sind folgende:

Breite	67,5 m
Tiefe	67,5 m
Höhe	8,0 m
Innere Stützpunkte . .	1
Überdeckte Fläche .	4560 m^2
Gewicht pro m^2 bedeckter Fläche, inbegriffen die Wände	62 kg

Dieser Gebäudetypus wurde durch die Unternehmung *Delattre* und *Frouard* für das französische Luftfahrtministerium in Dijon und in Cazaux ausgeführt.

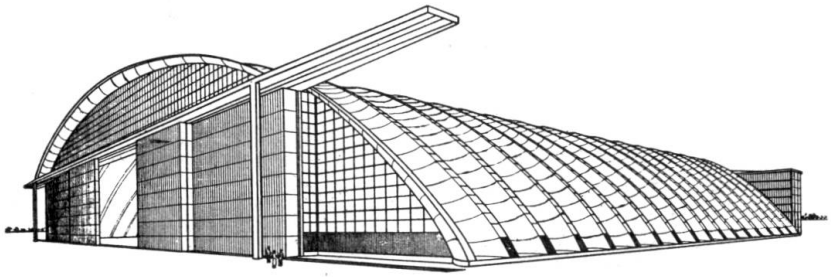


Fig. 11.
Gewölbte Flughalle. Umdrehungsfläche mit Rahmen. Blechstärke 30/10 mm. Spannweite 90 m.

Fig. 11. Diese zeigt eine gewölbte Flugzeughalle. Es ist dies eine der billigsten Deckenkonstruktionen. Ein derart konstruiertes Gewölbeelement gleicht demjenigen, welches in Dannemarie-les-Lys ausgeführt wurde.

Die Angaben eines solchen Gebäudes sind folgende:

Breite	90,00 m
Tiefe	90,00 m (nach Belieben)
Höhe	20,00 m
Innere Stützpunkte . .	keine
Überdeckte Fläche .	8100 m^2
Gewicht pro m^2 bedeckter Grundfläche	80 kg

Fig. 12. Die Decke dieses Gebäudes ist ein Gewölbe.

Man sieht auf dem schematischen Schnitt der Zeichnung die Versteifungselemente.

Das Gewicht einer solchen Konstruktion ist von der Größenordnung von 60 kg/m^2.

(Fig. 13, Fig. 14, Fig. 15 und Fig. 16.)

Wenn sich die Spannungsverteilung längs des Schnittes so auswirkt, daß sie einem Biegungsgesetz folgt, ist es richtig, diesen Querschnitt mit veränderlicher Krümmung auszuführen, indem man den kleinsten Krümmungsradius in die am meisten gedrückte Zone legt.

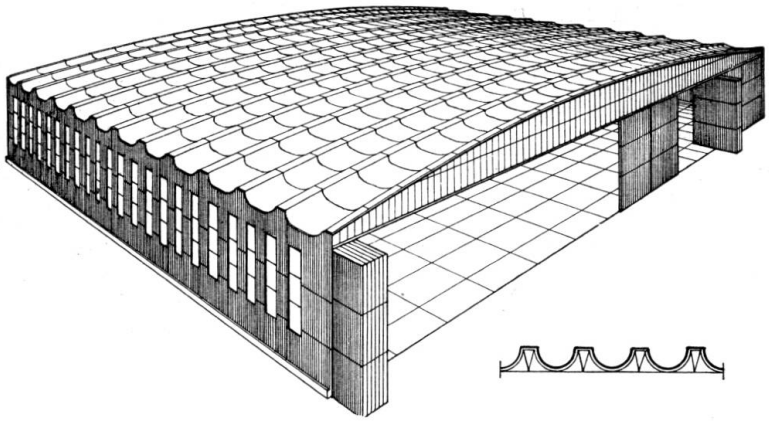


Fig. 12.
Gewölbte Flughalle. Umdrehungsfläche mit Rahmen. Flaches Gewölbe. Spannweite 40 m. Gewicht 60 kg/m².

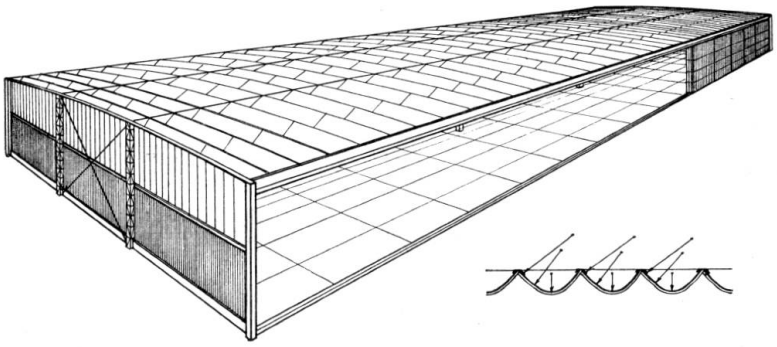


Fig. 13.
Gewölbe mit zwei Auskragungen. Teile mit Blech von 12/10 mm Stärke. Querschnitte mit veränderlicher Krümmung und mit Rahmen. Spannweite einer Auskragung 10 m. Gewicht 45 kg/m². Ansicht von oben.

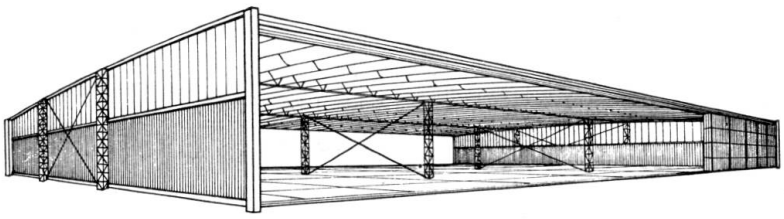


Fig. 14.
Gewölbe mit zwei Auskragungen. Teile mit Blech von 12/10 mm Stärke. Querschnitte mit veränderlicher Krümmung und mit Rahmen. Spannweite einer Auskragung 10 m. Gewicht 45 kg/m². Ansicht von unten.

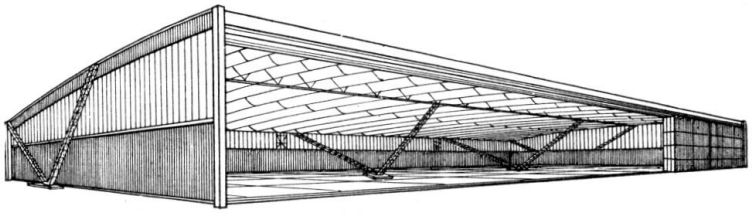


Fig. 15.
Gewölbe mit einer Auskragung. Teile mit Blech von 14/10 mm Stärke. Querschnitte mit veränderlicher Krümmung und mit Rahmen. Spannweite der Auskragung 12 m. Gewicht 48 kg/m². Ansicht von unten.

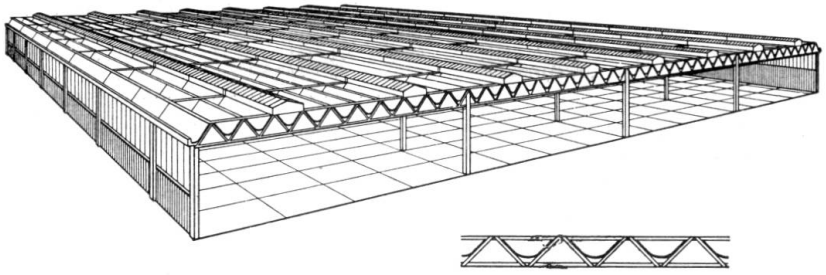


Fig. 16.

Schalendach mit Oberlichtern. Querschnitt mit Blech von 12/10 mm Stärke, veränderliche Krümmung und mit Rahmen. Spannweite eines Teiles 12 m. Gewicht 40 kg/m². Ansicht von oben.

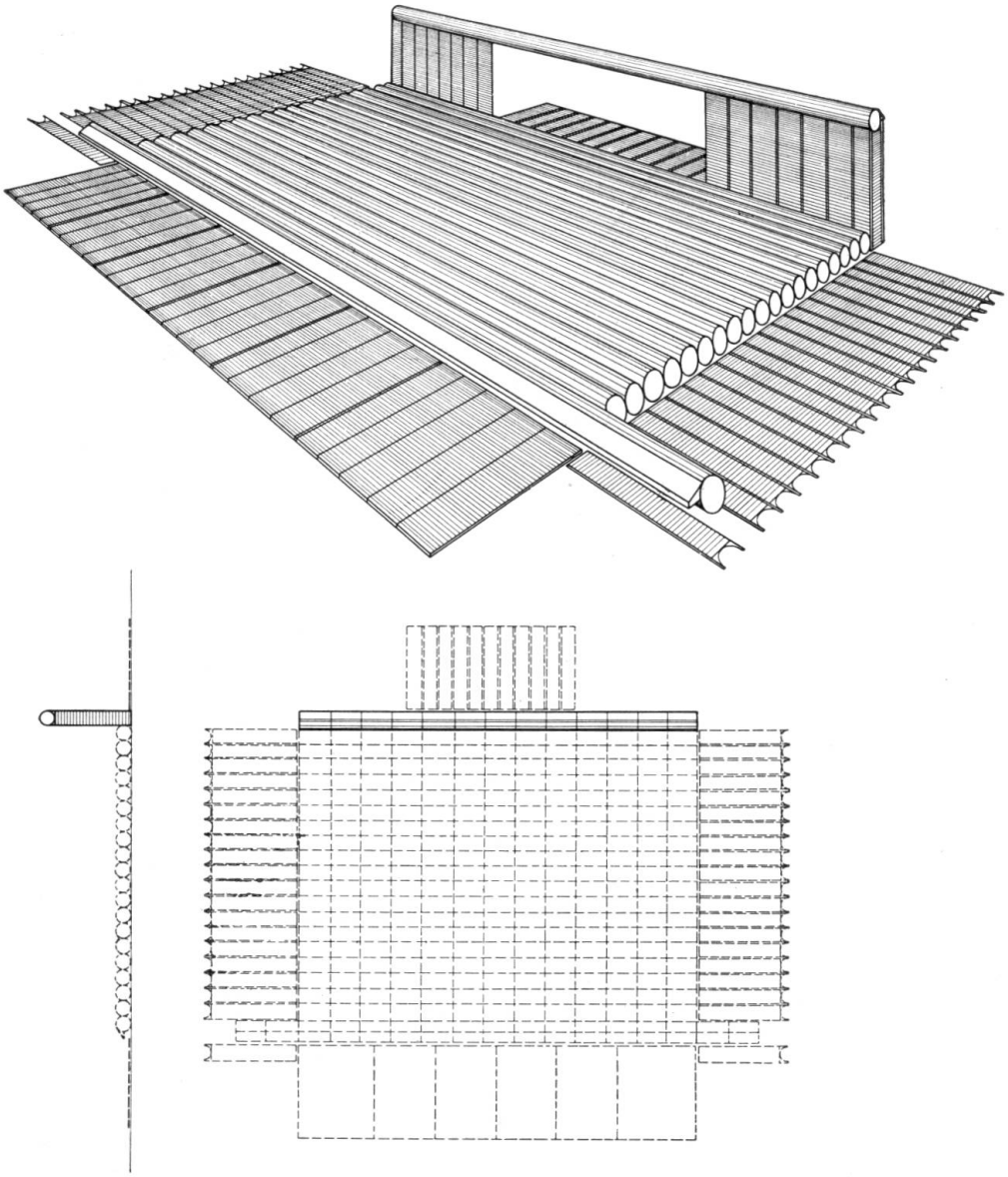


Fig. 17.

Fig. 17 bis 21: Zerlegbare Halle. Verschiedene Bauzustände.

Dies ist auf der schematischen Zeichnung der Fig. 5 dargestellt.

Man kann verschiedene Anordnungen von dünnen Blechschalen vorsehen, sowohl um große freie Öffnungen auf den Seiten der Gebäude zu erhalten, als auch um Werkstätten mit Oberlichter zu überdecken.

Diese verschiedenen Gebäudetypen wurden studiert im Hinblick auf Arbeiten in Italien und es wurden darüber schon abschließende Versuche gemacht.

(Fig. 17—21.)

Eine weitere interessante Art, Wände aus dünnem Blech als tragendes Element und als Füllung zu verwenden, besteht darin, den Bau mit Hilfe von geschlossenen, kreisförmigen Rohren zu überdecken. Ein solches Schema führt dazu eine viel geringere Anzahl von Konstruktionselementen zu verwenden und ergibt sehr rasche Transport- und Konstruktionsmöglichkeiten.

Für Spannweiten der Größenordnung von 25 m wiegt eine solche Konstruktion 55 kg/m², darin inbegriffen die Türen und die seitlichen Abschlußwände.

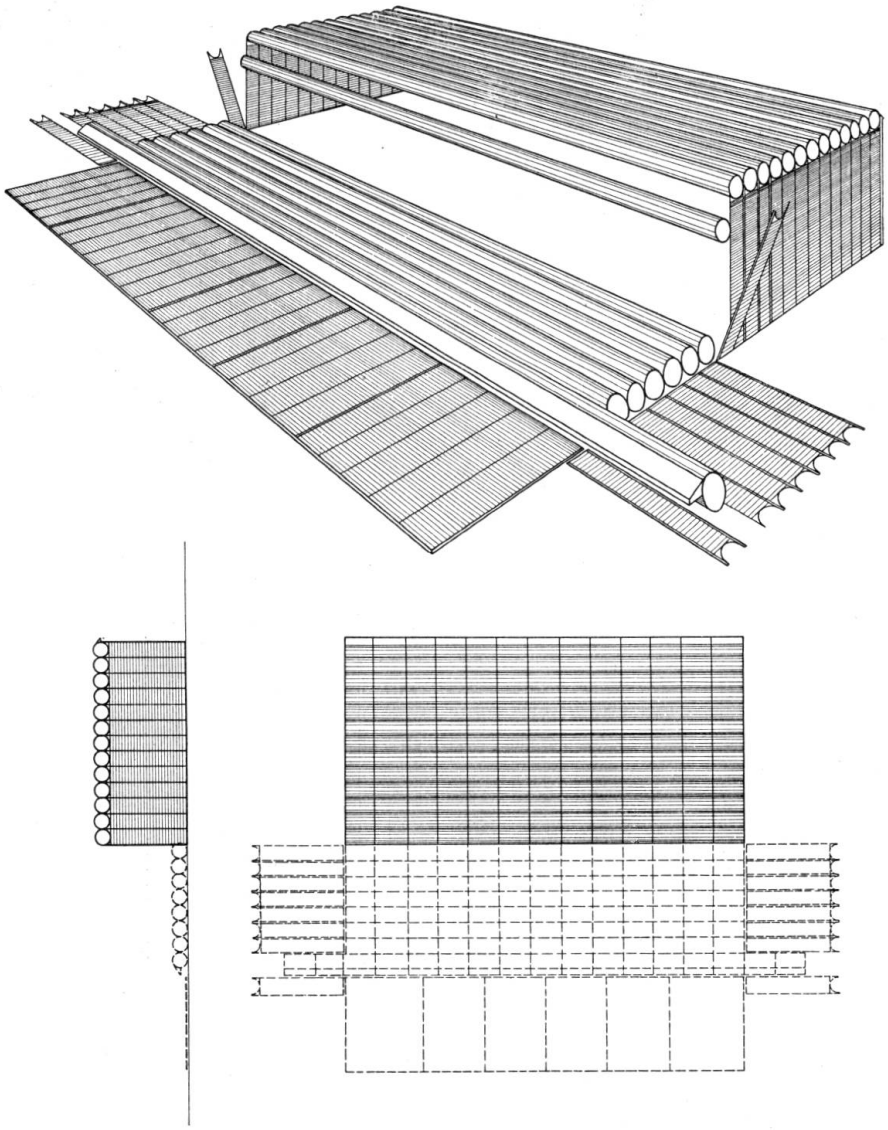


Fig. 18.

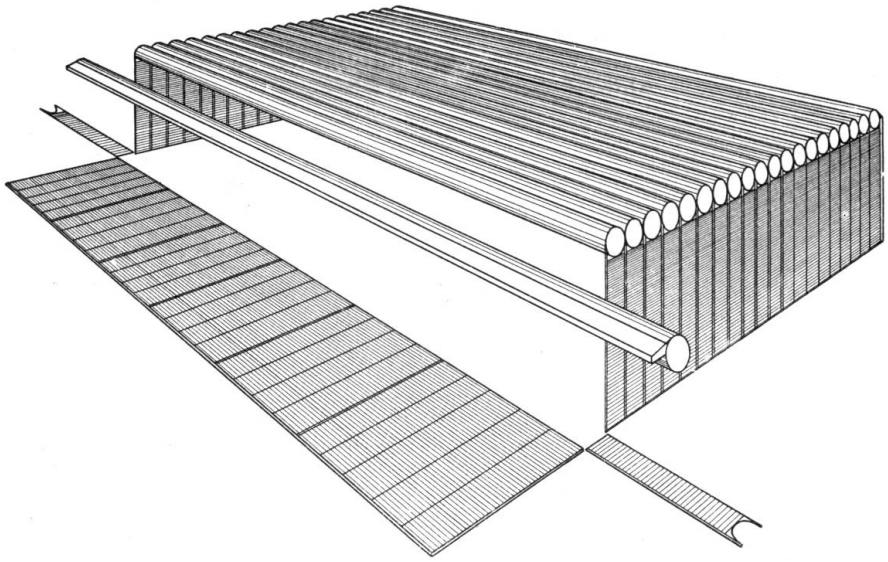


Fig. 19.

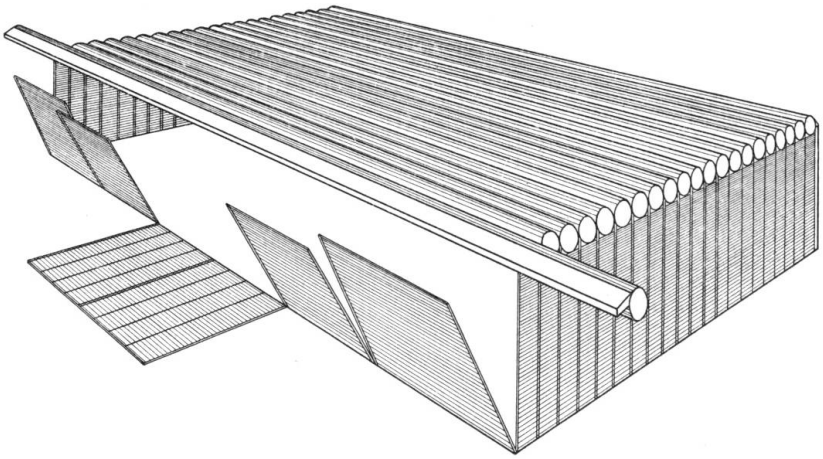


Fig. 20.

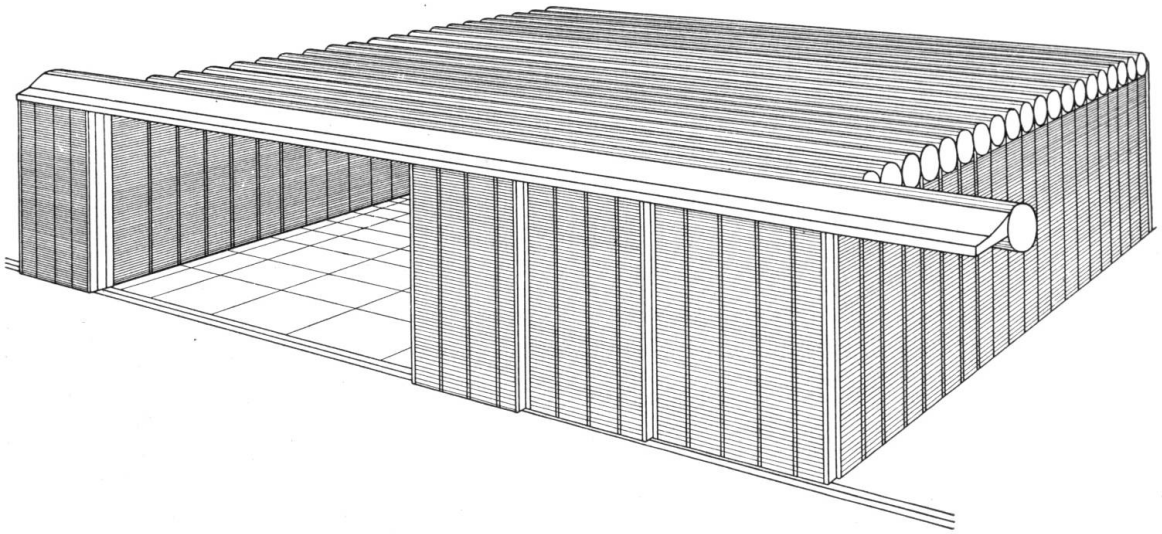


Fig. 21.

Zum Schlusse dieser kurzen Darstellung über die systematische Verwendung von dünnem Blech in der Konstruktion halten wir es für notwendig, unsern Gedankengang genau darzulegen:

Selbst wenn es sich nicht darum handeln würde, einen größeren Handels- und Industrieumsatz für ein Baumaterial wie das Blech im allernützlichsten Sinne herbeizuführen, muß man darauf achten, daß alle diese Versuche und Ausführungen, welche sich meist auf rein technischen oder mathematischen Angaben und Betrachtungen stützen, neue Formen und wenig bekannte architektonische Linien hervorrufen, die in die Baukunst einzureihen sind.

Ich möchte die Architekten und Ingenieure dazu bewegen, die Lösungen dieser neuesten Probleme mit großem gegenseitigem Verständnis sowohl vom ästhetischen wie auch vom streng technischen Standpunkte aus zu suchen.

Auf diesem Gebiet gibt es immer mehr Arbeit. Die mathematisch genialen Lösungen, manchmal sogar in einer etwas verschlossenen Form dargestellt, laufen Gefahr, in Bezug auf die Gesamtheit der Anordnungen und unveränderlichen Schemen in eine mathematische Starrheit zu verfallen.

Man begreift, daß derjenige, der die Konstruktion in ihrer Beziehung zu Volumen und Oberfläche beurteilt, und der die Proportionen sucht, um daraus eine Art der Darstellung der menschlichen Anschauung abzuleiten, mit andern Worten der Architekt vor einer Differenzialgleichung zurückschreckt und dieses Gebiet der Festigkeitslehre, das in mathematischer Hinsicht weitgehend verfolgt wird, vor Ehrfurcht dem Ingenieur überläßt.

Es wäre schade, wenn eine solche Trennung entstehen würde, weil die bittere Frucht der mathematischen Wissenschaft nicht immer gekostet werden kann; auf dem Gebiete der Baukunst haben die gezeigten Beispiele eine solch starke Rückwirkung auf den Gemeinschaftsgeist der Menschheit, daß sie diesen Geist nicht verderben, sondern eher unterrichten sollen.

B. Theoretische Studie über die Balken und Bogen aus versteiften Blechschalen.

Wir haben im ersten Teil unseres Berichtes die Überlegungen gezeigt, welche uns zur Verwirklichung von Konstruktionen aus versteiften Blechschalen geführt haben.

Hier geben wir einige theoretische und mathematische Überlegungen zu dieser Frage an.

Zunächst eine Rechtfertigung der Bedeutung der Rahmen, welche hauptsächlich durch eine Reihe von Versuchen anschaulich gemacht wurden, die wir besprechen werden. Und dann eine Betrachtung des Knickproblems.

Wir erinnern daran, daß wir für die mathematische Untersuchung der Rahmen in Herrn *L. Beschkine* einen wertvollen Mitarbeiter gehabt haben und daß für die Untersuchung des Knickens, welche wir übrigens jetzt noch weiter führen, Herr *F. Vasilesco* seine unbestreitbare Fähigkeiten in unsern Dienst gestellt hat.

Wenn man ein Gewölbe aus dünnem Blech, das als Bogen wirkt, verwirklicht, wie der in Fig. 3 dargestellte Teil, so kann man daran die Hauptdeformationen mit Hilfe folgender Einrichtungen wahrnehmen.

Wir verbinden die Kämpfer des Gewölbes, konstruiert aus leichtem Karton, mit den hölzernen Widerlagern und schrauben sie auf einen Tisch fest. Der Gewölbeachse folgend machten wir 11 gleich weit entfernte Löcher in das Gewölbe und durch diese Löcher steckten wir vertikale Meßstäbchen. Auf diese Weise konnten wir die relativen Deformationen der Mittellinie der Gewölbeachse infolge einer gegebenen Belastung mit Bezug auf den Experimenttisch als Vergleichsebene bestimmen.

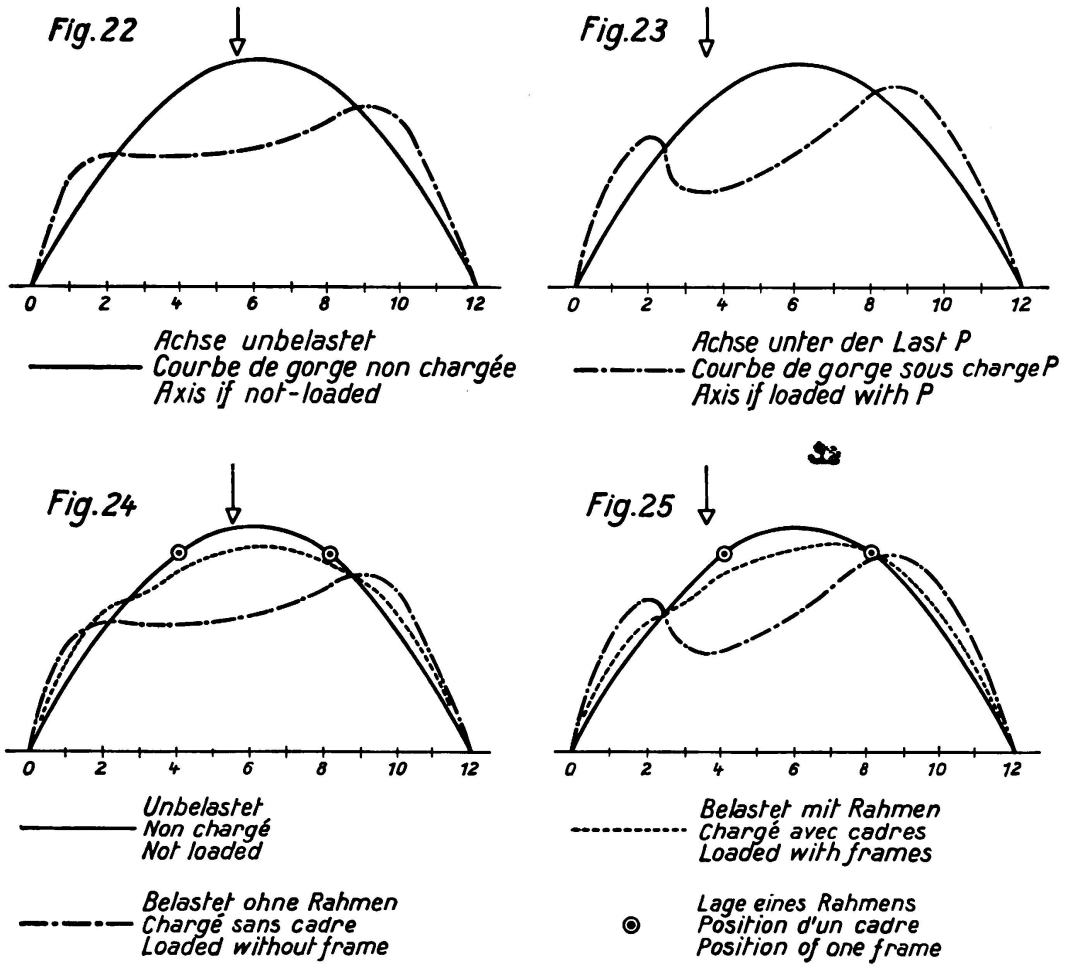


Fig. 22 bis 25.

Als Beispiel geben wir einige ziemlich charakteristische Resultate dieser Versuche: Fig. 22 zeigt in ausgezogener Linie die nicht belastete Mittellinie der Gewölbeachse (vergrößerte Ordinate); im Moment wo eine Belastung P zwischen den Punkten 5 und 6 angebracht wurde, nahm die Mittellinie die Form der strichpunktierten Kurve an.

Wenn die Belastung P anstatt zwischen dem Punkt 5 und 6, sich zwischen dem Punkt 3 und 4 befinden würde, so erhielte man das Bild der Deformationen, welche in Fig. 23 dargestellt sind.

Nach der Entlastung nahm das Gewölbe seine ursprüngliche Form wieder an. Die Untersuchung des Gewölbes im Moment der max. Deformation zeigte, daß sich die Querschnitte der doppeltgekrümmten Schalen ziemlich stark deformierten; wenn wir z. B. im Ruhezustand eine unveränderliche hyperbolische

Form des Querschnittes hätten, so würde sich dieser Bogen unter einer Belastung deformieren; sie würde sich „öffnen" oder „schließen", woraus die Idee entstand, die gesamte Oberfläche biegungssteifer zu machen und längs des Bogens Elemente anzuordnen, die der Biegung Stand halten können; dies sind die Rahmenelemente.

Wenn wir die beiden soeben gewählten Versuche betrachten, so werden wir auf den Figuren den Einfluß der beiden Rahmenelemente wahrnehmen, die symmetrisch über den Punkten 4 und 8 der Einteilung der Gewölbeachse angeordnet sind.

Auf der Fig. 24 zeigt die punktierte Kurve die Deformation der Gewölbeachse unter der Belastung P zwischen 5 und 6.

Die Fig. 25 zeigt die Deformation derselben Gewölbeachse unter der gleichen Belastung P zwischen 3 und 4.

In beiden Fällen ist der beträchtliche Einfluß dieser Rahmen auf die Haltung der dünnen Haut bezeichnend.

Wir haben die Versuche sehr oft wiederholt, indem wir die Stellungen der Belastung P variierten, die Lage der Rahmenelemente und sogar die Form der erzeugenden Kurve, welche z. B. Hyperbeln, Kreise, Ellipsen, Cycloide und Parabeln bildete, indem wir jedesmal die Deformationen aufzeichneten.

Wir können so mathematisch folgende Resultate zusammenstellen:

Die Balken und Bogen aus dünnem Blech sind feste Körper, erzeugt durch ein gegebenes Profil und durch einen Körper von geringer Dicke in Bezug auf seine Länge. Das Profil, das sich im Raum verschiebt, folgt einem bestimmten Gesetz, so daß alle Punkte in parallelen Ebenen bleiben.

Da eine solche Haut einerseits in seiner Dicke keine Biegung aufnehmen kann und nicht sehr druckwiderstandsfähig ist (Knicken) sind Verstärkungssysteme in verschiedenen Teilen des Körpers angeordnet.

Diese Versteifungssysteme können in 2 Kategorien angeordnet werden.

1. Die Versteifungen als solche die nur das Knicken verhindern.
2. Die Versteifungsrahmen die ein genügend großes Trägheitsmoment besitzen, können außer ihrer Rolle als Versteifung noch Biegungsbeanspruchungen übertragen, welche einem festen Körper erlaubt, sich wie ein Körper zu verhalten, der dem Gesetz der Festigkeitslehre unterliegt.

Wir betrachten einen solchen Körper, der durch irgendwelche Kräfte beansprucht wird. Wenn wir die innern Kräfte vernachlässigen, in einer ebenen Schnittfläche, so ergeben die Lehrsätze über die innere Energie eine Verteilung der Spannungen, die meistens ziemlich gut mit den Resultaten der Festigkeitslehre übereinstimmt (lineare Verteilung der Kräfte für geradlinige Körper, hyperbolische Verteilung für krummlinige Körper). Diese so gefundenen Kräfte, ausgenommen im Falle von Einzelbelastung, können nur im Gleichgewicht mit den angewandten Kräften sein, wenn man in den Querschnitten Biegung annimmt, was in Bezug auf die Dicke des Querschnittes unmöglich ist.

Wir betrachten ein Schalen-Feld zwischen zwei Aussteifungen. Da diese Haut in ihrer Dicke keine Biegung aufnehmen kann, kann man 3 Gleichgewichtsgleichungen aufstellen, welche die innern Kräfte in der Haut vollständig bestimmen (Normalkräfte und Schubkräfte), bis auf willkürliche Funktionen, die durch die Integration der Differentialgleichungen entstehen. Da diese Diffe-

rentialgleichungen linear sind, entsteht ihre Lösung aus der Superposition einer partiellen Lösung mit Konstanten, die nicht null sind, und der allgemeinen Lösungen, deren Konstanten null sind.

Ein Feld kann im allgemeinen als durch Rotationsschalen gebildet betrachtet werden, da die Verschiebung des Querschnittes einer Aufeinanderfolge von Drehungen gleichgesetzt werden kann.

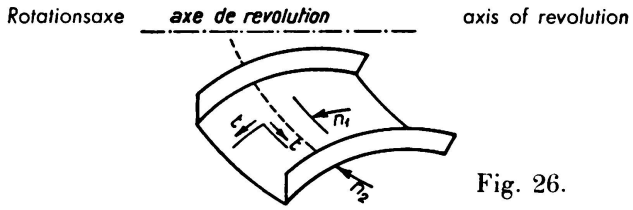


Fig. 26.

Unter diesen Bedingungen, wenn man die Normalspannungen längs des Meridians und der Parallelkreise mit n_1 und n_2, den Radius der Parallelkreise mit r, die Schubspannungen mit t, die Kote des Bogens im Axialschnitt mit t(r), den Winkel der Tangente an den Meridian mit der Achse mit α, den Rotationswinkel mit ϑ bezeichnet und wenn man setzt:

$$\sigma_n = n_1 \cdot \sin\alpha = \frac{n_1}{\sqrt{1 + z'^2}}$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{n_2}{\sin\alpha} = n_2 \sqrt{1 + z'^2}$$

$$\tau_{\vartheta r} = t.$$

sind die Differentialgleichungen die folgenden:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r z' \sigma_r) + \frac{\partial}{\partial \vartheta}(z' \tau_{\vartheta r}) = Zr = \frac{Vr}{\sin\alpha}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sigma_\vartheta r) + \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{\vartheta r}) = Tr^2$$

$$\sigma_r \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \sigma_\vartheta \frac{z'}{r} = \frac{N}{\sin\alpha}.$$

Im Falle von doppeltgekrümmten Schalen und besonders im Falle von Regelflächen können diese Gleichungen vereinfacht und auf zwei reduziert werden.[1]

Z und T sind die Komponenten parallel zur Achse und parallel zu den Tangenten an die Parallelkreise der Oberflächenbelastungen auf die Flächeneinheit, projiziert auf eine senkrecht zur Achse stehende Ebene; V und N sind die Normalkomponenten der Belastungen der wahren Oberfläche.

Wenn man ein genügend kleines Element betrachtet, damit zwischen den Rahmenelementen die angewandte Kraft als unabhängig von ϑ betrachtet werden kann, so wird die von ϑ unabhängige Lösung gegeben durch die Gleichungen:

[1] Siehe Comptes-rendus de l'Académie des Sciences Paris, *L. Beschkine*, 18. November 1935.

$$\frac{d}{dr}(r z' \sigma_r) = Z r$$

$$\frac{d}{dr}(r^2 \tau_{\vartheta r}) = T r^2$$

$$\sigma_r \frac{d^2 z}{dr^2} + \sigma_\vartheta \frac{z'}{r} = \frac{N}{\sin \alpha}.$$

Diese Gleichungen ersten Grades lassen sich ohne Schwierigkeiten integrieren.

Wenn man z. B. einen symmetrischen Schnitt in Bezug auf eine parallele Ebene betrachtet, wobei r_o der Radius in dieser Ebene bedeutet, ist

$$1) \qquad t = \tau_{\vartheta r} = \frac{1}{r^2} \int_{r_o}^{r} T r^2 \, dr$$

$$2) \qquad \sigma_r = \frac{\int_{r_o}^{r} Z r \, dr}{r z'}$$

daraus folgt:

$$n_1 = \frac{\int_{r_o}^{r} \frac{V r \, dr}{\sin \alpha}}{r \cos \alpha}$$

$$3) \qquad \frac{n_2}{R_2} = N - \frac{n_1}{R_1}$$

wo R_2 und R_1 die Hauptkrümmungsradien sind:

$$R_1 = \frac{(1 + z'^2)^{3/2}}{z''} = \frac{1}{z'' \sin 2\alpha}$$

$$R_2 = \frac{r}{\cos \alpha}$$

Daraus folgt:

$$n_2 = r \left[\frac{N}{\cos \alpha} - n_1 z'' \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin^2 \alpha \right]$$

Damit das Problem vollständig gelöst sei, müssen beliebige Ausdrücke für reine Biegung und Biegung mit Schub kombiniert, eingeführt werden können.

a) Reine Biegung:

Setzen wir

$$\sigma_\vartheta = \sum u_n \cos n \vartheta$$

wenn σ_ϑ den Gesetzen der Festigkeitslehre für lange Körper $\vartheta = 0$ entspricht, so folgt daraus:

$$\sigma_r = -\frac{z'}{r z''} \sum u_n \cos n \vartheta$$

Setzen wir

$$\tau_{\vartheta r} = \sum V n \cdot \frac{\sin n \vartheta}{n}$$

so ergibt sich

$$V n = \frac{1}{z'} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{z'^2 u_n}{z''} \right)$$

woraus

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r^2}{z'} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{z' u_n}{z''} \right) \right] = n^2 \cdot r u_n$$

und mit

$$\sum u_n = (\sigma_\vartheta)_{\vartheta = 0} = \sigma_0$$

schließlich

$$\sum n^2 u_n = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r^2}{z'} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{z'^2 \sigma_0}{z''} \right) \right] = \lambda_0$$

folgt.

Wenn man sich auf die Ausdrücke ersten Grades in ϑ beschränkt, sieht man, daß in keiner der Spannungen σ_r, σ_ϑ, $\tau_{r\vartheta}$ n auftritt. Daraus folgt, daß für ein kleines ϑ (kleiner Abstand zwischen den Rahmen) es unnötig ist, die Größen $n_1 \ldots\ldots n_n$ getrennt zu bestimmen. Man könnte es durch Anwendung der Theorie der minimalen Arbeit lösen, indem man sie auf eine Rahmenfläche mit Rändern anwenden würde, wo die bei diesen Elementen eingeführten Wirkungen Funktionen von n wären.

b) Biegung mit Schub:

Setzen wir ebenso:

$$\sigma_\vartheta = \sum S_n \frac{\sin n \vartheta}{n} + \sum u_n \cos n \vartheta$$

Nehmen wir den ersten Ausdruck für sich, da wir den zweiten oben schon behandelt haben.

$$\sigma_\vartheta = \sum S_n \frac{\sin n \vartheta}{n}$$

$$\sigma_r = -\frac{z'}{r z''} \sum S_n \frac{\sin n \vartheta}{n}$$

wir setzen:

$$\sigma_{r\vartheta} = \sum t_n \cos n \vartheta$$

und erhalten

$$t_n = \frac{1}{r^2} \int S_n r \, dr$$

woraus folgt

$$n^2 \frac{1}{r^2} \int S_n r \, dr = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{z'^2}{z''} S r \right).$$

Es können hier die gleichen Überlegungen wie für die reine Biegung gemacht werden.

In erster Linie

$$\tau_{r\vartheta} = \Sigma\, t_n = \frac{1}{r^2}\int (\sigma_\vartheta)_0\, r\, dr$$

In der Gleichung kommt ϑ nicht vor. Die Glieder höherer Ordnung sind durch das Prinzip der minimalen Arbeit bestimmt.

Das Problem ist somit vollständig gelöst, da wir

1. die Verteilung der örtlichen Spannungen,
2. die Verteilung der Spannungen im Gesamten

kennen, wenn die Verteilung der Spannungen n_2 (oder von σ_ϑ) bekannt wären.

Die heute übliche Konstruktion dieser Schalen ist die, daß alle Kräfte der ersten Kategorie, die Kräfte n von der zweiten und die Spannungen in den Versteifungsrahmen geringe Werte für das innere Potential im Verhältnis zu den Gesamtspannungen n_2 und t geben.

Es folgt daraus, daß die Resultate der Elastizitätsberechnungen von zweidimensionalen Körpern (Balken und Bogen ohne wesentliche Stärke) auf diese Fälle angewendet werden können. Daher können die Kräfte n_2, bis auf eine Annäherung, die wesentlich kleiner ist als der gefundene Wert $\frac{n'_2}{n_2}$ (n'_2 = örtliche Kräfte) als solche betrachtet werden, welche den Gesetzen der klassischen Festigkeitslehre gehorchen.

Aus diesen Werten n_2 bestimmt man die gesamten Spannungen n_1 und t; daraus ergeben sich durch die oben angeführten Gleichungen die Kräfte auf die Rahmen und auf die Ränder.

Das Problem der Spannungsverteilung ist dadurch voll und ganz gelöst. Es folgt daraus, daß die Untersuchung über die Balken und Rahmen aus Schalen als eine solche angesehen werden kann, die sich direkt an die klassischen Hypothesen anschließt, und wo die sekundären Kräfte für die Berechnung der Versteifungselemente eingeführt werden.

Die Darstellung der Theorie mag für diesen Bericht genügen. In den von uns ausgeführten Bauten, die wir im Teil A unseres Berichtes behandeln, haben wir diese Theorien angewendet.

Wir werden im Band 1937 der Abhandlungen einige zahlenmäßige Anwendungsbeispiele geben, um die praktische Art der Anwendung dieser Gleichungssysteme zu erklären. Wir sahen, daß unter den Versteifungen, welche an den Schalen angebracht sind, einige nur dazu dienen, das Knicken zu verhindern.

Das Knicken schien uns bei der Betrachtung dieser Schalen immer ein wichtiges Element zu sein. Die Tatsache, daß es „dünne" Schalen sind, setzt eine sehr kleine Trägheit voraus, somit eine ausgesprochene Neigung zum örtlichen Ausknicken und zum Ausbeulen.

Bei der Ausführung einer Konstruktion machten wir vor allem Knickversuche an Rahmenelementen von natürlicher Größe.

Diese Versuche wurden unter Stanzpressen der Stahlwerke der Marine in St. Chamond anfangs Juli 1935 ausgeführt.

Wir ließen eine Reihe von zylindrischen Platten mit verschiedenen Stärken und Krümmungsradien herstellen; darauf ordneten wir Versteifungen aus einfachen gebogenen Winkeln an.

Die Fig. 27 und 28 zeigen einen dieser Teile vor und nach dem Knickversuch.

Unter den verschiedenen von uns gemachten Versuchen befaßten sich einige mit Druckkräften nur auf ein Teilstück des ganzen Querschnittes. Diese Versuchsreihe wurde gewählt, um sich dem häufigsten Fall einer Spannungsverteilung n_2, einem Biegungsgesetz gehorchend, zu nähern, der oben schon be-

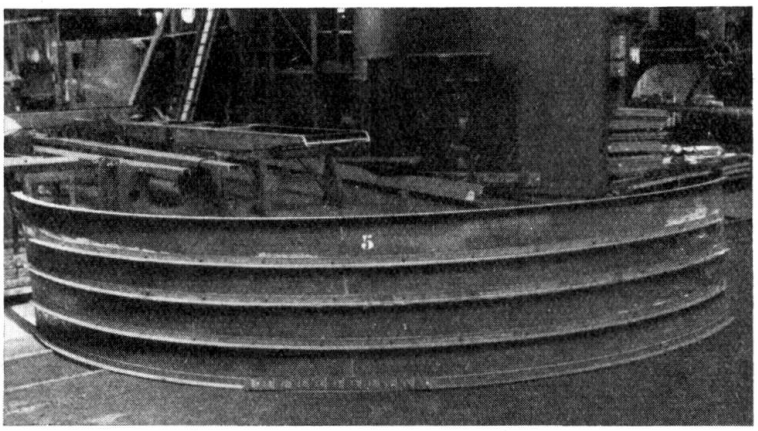


Fig. 27.

Gebogenes Blechstück mit Aussteifungen vor den Knickversuchen in St. Chamond (Frankreich), Juli 1935.

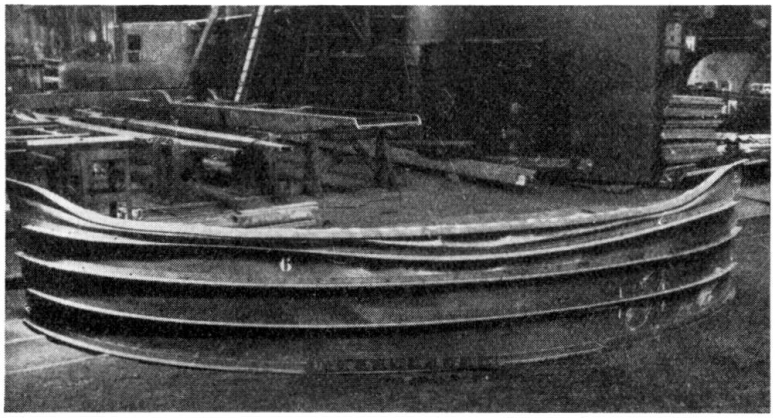


Fig. 28.

Gebogenes Blechstück mit Aussteifungen nach den Knickversuchen in St. Chamond (Frankreich), Juli 1935.

sprochen wurde. Die Ergebnisse haben wir, abgesehen vom Sicherheitsgrad, als anwendbare Grenzen betrachtet.

Darauf haben wir diese Erscheinungen theoretisch untersucht. Wir geben hier die Zusammenfassung dieser Studien:

Sie beziehen sich auf kreisförmige Zylinderteile. Wir haben diese Berechnungen auch ausgedehnt auf nichtkreisförmige Zylinder und so eine Änderung des Krümmungsradius längs des Querschnittes eingeführt. Es schien in der Tat wünschenswert, sich den praktischen Fällen und den Fällen der Anwendungen zu nähern. Man hat augenscheinlich Interesse daran, die Knickfestigkeit in Ab-

hängigkeit der Verteilung der Kräfte n_2 in einem gebogenen Querschnitt örtlich zu vergrößern.

Man betrachtet eine dünne kreiszylinderförmige Platte mit der Öffnung Φ, der Höhe l, dem Radius r und der Stärke $t = 2h$.

Man denkt sich diese Platte unter einem Druck der auf die Kreisränder in der Richtung der Erzeugenden wirkt.

Das Problem besteht darin, die kritische Knicklast zu finden, d. h. den kleinsten Druck, für den ein elastisches Gleichgewicht der verformten Platte besteht.

Man wendet die Methode von *Ritz-Rayleigh* an. Sie besteht darin, daß man zum vornherein für die Ausbiegungsform eine Funktion mit frei gewählten Konstanten annimmt, die Gesamtenergie der inneren und äußeren Kräfte aufstellt und diese Energie zur Bestimmung der willkürlichen Konstanten extremal werden läßt. Die Bedingungen für diese Konstanten lassen den Druck bestimmen, der die kritische Knicklast darstellt.

Herr *Redshau* hat in seinem Bericht „Elastic instability of a thin curved panel", Aeronatical research Committee R. J. M. Nr. 1565, London, diese Fragen behandelt, indem er die Verschiebungen folgendermaßen angab:

$$u = A \cdot \sin \frac{\pi \vartheta}{q} \sin \frac{kx}{r}$$

$$v = r \cdot \eta = o$$

$$w = C \cdot \sin \frac{\pi \vartheta}{\varphi} \cos \frac{kx}{r}$$

und indem er eine gleichförmig längs des ganzen Schnittes verteilte Belastung betrachtete.

Wir versuchten die Verschiebungen und den Druck entsprechend $p\,f(\vartheta)$ in einer allgemeineren Form darzustellen.

Als Ausbiegungen wurden folgende gewählt:

$$u = u(\vartheta, x)$$

$$v = r\eta = o$$

$$w = C \cdot \sin \frac{a \pi \vartheta}{\varphi} \cdot \sin \frac{q \pi x}{l}$$

a und q sind ganze positive Größen.

Betrachten wir die Funktion $u(\vartheta\, x)$.

In Bezug auf ϑ ist sie periodisch mit der Periode φ und für $u(\vartheta, o) = -u(\vartheta, l)$ schließt man, daß in Bezug auf x, $u(\vartheta, x)$ eine periodische Funktion ist mit der Periode 2 l.

Daraus folgt, daß u die allgemeine Form haben muß, die durch ihre Entwicklung in Fourierreihen gegeben ist.

$$u = F(\vartheta, x) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} a^{o}_{2s-1} \cos (2s-1) \frac{\pi x}{l} + \ldots$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos n \frac{2\pi\vartheta}{\varphi} \sum_{s=1}^{\infty} a^{n}_{2s-1} \cos (2s-1) \frac{\pi x}{l} \right.$$
$$\left. + \sin n \frac{2\pi\vartheta}{\varphi} \sum_{s=1}^{\infty} b^{n}_{2s-1} \cos (2s-1) \frac{\pi x}{l} \right].$$

Mit dieser Berechnung können wir a^{o}_{2s-1}, a^{n}_{2s-1}, b^{n}_{2s-1} bestimmen, wodurch auch u bekannt ist.

Die Zusammendrückung der Platte infolge der Ausbiegung ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] dx \quad ^{2}$$

Die Arbeit des Druckes p f (ϑ) ist ausgedrückt durch:

$$w = 2\,h\,r\,p\int_0^{\varphi}\int_0^{l}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] f(\vartheta)\,dx\,d\vartheta$$

Nach dem Integrieren findet man

$$w = 2\,h\,p\,r\left\{\int_0^{\varphi} f(\vartheta)\,[u(\vartheta, l) - u(\vartheta, o)]\,d\vartheta + \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} f(\vartheta)\,d(\vartheta)\int_0^{l}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\right\}$$

$$= 2\,h\,p\,r\left\{-2\int_0^{\varphi}\left[\frac{1}{2}\sum_1^{\infty} a^{o}_{2s-1}\,f(\vartheta) + \sum_1^{\infty} f(\vartheta)\cos n\,\frac{2\pi\vartheta}{\varphi}\sum_1^{\infty} a^{n}_{s-1} + \sum_1^{\infty} f(\vartheta)\right.\right.$$

$$\left.\left.\sin n\,\frac{2\pi\vartheta}{\varphi}\sum_1^{\infty} b^{n}_{2s-1}\right] d\vartheta + \frac{c^2}{2}\left(\frac{q\cdot\pi}{l}\right)^2\int_0^{\varphi} f(\vartheta)\sin^2\frac{a\,\pi\vartheta}{\varphi}\int_0^{l}\cos^2\frac{q\,\pi x}{l}\,dx\right\}$$

Die Funktion f (ϑ) hat die Periode φ wenn man setzt:

$$\frac{2\pi\vartheta}{\varphi} = \xi$$

das gibt:

$$f(\vartheta) = f\left(\frac{\varphi}{2\pi}\cdot\xi\right)$$

Diese letzte Funktion ist von der Periode 2π, wenn A_n und B_n ihre Fourierkoeffizienten sind. Man erhält:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\varphi}{2\pi}\xi\right)\cos n\,\xi\,d\xi$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\varphi}{2\pi}\xi\right)\sin n\,\xi\,d\xi$$

woraus:

$$A_n = \frac{2}{\varphi}\int_0^{\varphi} f(\vartheta)\cos n\,\frac{2\pi\vartheta}{\varphi}\,d\vartheta$$

$$B_n = \frac{2}{\varphi}\int_0^{\varphi} f(\vartheta)\sin n\,\frac{2\pi\vartheta}{\varphi}\,d\vartheta$$

---

[2] Applied Elasticity, I. Prescott, p. 562.

Man leitet daraus ab, daß:

$$w = -4\,h\,p\,r\,\frac{\varphi}{2}\left\{\frac{1}{2}A_o\sum_1^{\infty} a^o_{2s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_1^{\infty} a^n_{2s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sum_1^{\infty} b^n_{2s-1}\right\}$$
$$+\,h\,p\,r\left(\frac{q\,\pi}{l}\right)^2 c^2\,\frac{l}{2}\,\frac{\varphi}{4}\,(A_o - A_a)$$

Die Energie der innern Kräfte pro Flächeneinheit, hat folgenden Ausdruck:

$$v' = E'h\left[\alpha^2+\beta^2+2\,\sigma\,\alpha\,\beta+\frac{1-\sigma}{2}c^2\right]+\frac{E'J}{2}\left[c_1^2+c_2^2+2\sigma c_1 c_2+2(1-\sigma)(T-T_o)^2\right]$$

wo $E' = \dfrac{E}{1-\sigma^2}$ σ Poisson'sche Koeffizienten.

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad I = \frac{2\,h^3}{3}$$

$$\beta = \frac{w}{r} + \frac{\partial n}{\partial \vartheta}$$

$$c = r\,\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$$

$$c_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$c_2 = \frac{1}{r^2}\left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2}\right)$$

$$T = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \vartheta} - \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$T_o = o$$

Die vorhergehenden Ausdrücke werden mit den gewählten Verschiebungen:

$$v' = E'\,h\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}\sin^2\frac{a\,\pi\,\vartheta}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi\,\pi\,x}{l} + 2\,\sigma\,\frac{c}{r}\,\frac{\partial F}{\partial x}\sin\frac{\alpha\,\pi\,\vartheta}{\varphi}\sin\frac{q\,\pi\,x}{l}\right.$$
$$\left. + \frac{1-\sigma}{2\,r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)^2\right\}$$
$$+\frac{E'\,h^3}{3}\left\{c^2\left(\frac{q\pi}{l}\right)^4\sin^2\frac{a\,\pi\,\vartheta}{\varphi}\sin^2\frac{q\,\pi\,x}{l} + \frac{c^2}{r^4}\left[1-\left(\frac{a\,\pi}{\varphi}\right)^2\right]\sin^2\frac{a\,\pi\,\vartheta}{\varphi}\sin^2\frac{q\,\pi\,x}{l}\right.$$
$$-\,2\,\sigma\,\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{q\pi}{l}\right)^2\left[1-\left(\frac{a\,\pi}{\varphi}\right)^2\right]\sin^2\frac{a\,\pi\,\vartheta}{\varphi}\sin^2\frac{q\,\pi\,x}{l}$$
$$\left. + 2\left(\frac{1-\sigma}{r^2}\right)c^2\left(\frac{a\,\pi}{\varphi}\right)^2\left(\frac{q\,\pi}{l}\right)^2\cos^2\frac{a\,\pi\,\vartheta}{\varphi}\cos^2\frac{q\,\pi\,x}{l}\right\}$$

Die totale Energie der innern und äußern Kräfte schreibt sich folgendermaßen:

$$v = r\int_o^{\varphi}\int_o^{l} v'\,d\,x\,d\,\vartheta - w$$

Sie würde also nach dem Vorhergehenden folgenden Ausdruck annehmen:

$$v = r E' h \left\{ \int_0^{\varphi} \int_0^{l} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + 2\sigma \frac{c}{r} \frac{\partial F}{\partial x} \sin \frac{q \pi x}{l} \sin \frac{a \pi \vartheta}{\varphi} + \frac{1-\sigma}{2 r^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)^2 \right] dx\, d\vartheta \right\}$$

$$+ r E' h c^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{l}{2} \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{h^2}{3} \left[\left(\frac{q\pi}{l}\right)^4 + \frac{1}{r^4} \left[1 - \left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2 \right]^2 \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2\sigma}{r^2} \left(\frac{q\pi}{l}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2 \right] + 2 \left(\frac{1-\sigma}{r^2}\right) \left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2 \left(\frac{q\pi}{l}\right)^2 \right] \right\} - w$$

Durch Auflösen dieses Ausdruckes erhält man eine neue Form der allgemeinen totalen Energie, welche sich so schreiben läßt:

$$\frac{4}{\varphi l r E' h} V = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (2s-1)^2 (a^o_{2s-1})^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (2s-1)^2 \left[(a^n_{2s-1})^2 + \right.$$

$$\left. + (b^n_{2s-1})^2 \right] + \frac{1-\sigma}{2 r^2} \left(\frac{2\pi}{\varphi}\right)^2 \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left[(a^n_{2s-1})^2 + (b^n_{2s-1})^2 \right] +$$

$$+ \frac{2\sigma}{r} c \begin{cases} a \text{ ungerade} \begin{cases} -\dfrac{2q}{l} \left[\dfrac{a^o_q}{a} + a \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} - \dfrac{2 a^n_q}{4n^2 - a^2} \right] & q \text{ ungerade} \\ o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & q \text{ gerade} \end{cases} \\ a \text{ gerade} \begin{cases} -\dfrac{q\pi}{l} \sigma^{1/2}_q \quad \ldots\ldots\ldots & q \text{ ungerade} \\ o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & q \text{ gerade} \end{cases} \end{cases}$$

$$+ \frac{8p}{l E'} \left\{ \frac{1}{2} A_o \sum_{n=1}^{\infty} a^o_{2s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{s=1}^{\infty} a^n_{2s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sum_{s=1}^{\infty} b^n_{2s-1} \right\}$$

$$+ c^2 \left(\frac{q\pi}{l}\right)^2 \left\{ \frac{l^2}{r^2 q^2 \pi^2} + \frac{h^2}{3} \left[\frac{q^2 \pi^2}{l^2} + \frac{l^2}{q^2 \pi^2 r^4} \left[1 - \left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2 \right]^2 - \frac{2\sigma}{r^2} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2}{r^2} \left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2 \right] - \frac{1}{2} (A_o - A_a) \frac{p}{E'} \right\}$$

Sie ist eine Funktion der Konstanten.

$$a^o_{2s-1}; \qquad a^n_{2s-1}; \qquad b^n_{2s-1}; \qquad c.$$

Damit die Energie ein Extremum wird, hat man lediglich die partiellen Ableitungen erster Ordnung nach diesen Konstanten gleich null zu setzen und ihre Größe aus den so erhaltenen Gleichungen zu bestimmen.

Die Tatsache, daß man eine unbegrenzte Anzahl von Konstanten, also Gleichungen hat, ist nicht hinderlich, da man immer nur eine bestimmte Anzahl betrachten kann, um dann zu den Grenzbedingungen überzugehen. Übrigens sind die Variablen so getrennt, daß jede Gleichung den Wert einer einzigen Variablen ergibt.

Hier folgen die Gleichungen, die wir erhalten durch annullieren der partiellen Ableitungen in Bezug auf:

$$a^o_{2s-1}; \qquad a^o_q; \qquad a^n_{2s-1}; \qquad a^n_q; \qquad b^n_{2s-1}; \qquad b^n_q \text{ und } c$$

$$\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (2s-1)^2 a^o_{2s-1} + \frac{A_o}{2} \frac{8\pi}{l E'} = o$$

q ungerade, a ungerade

$$\frac{q^2\pi^2}{l^2}a_q^o + \frac{A_o}{2}\frac{8p}{lE'} - \frac{2\sigma}{r}\cdot\frac{2q}{a\cdot l}c = o$$

q ungerade, a gerade

$$\frac{q^2\pi^2}{l^2}a_{2s-1}^o + \frac{A_o}{2}\frac{8p}{lE'} = o$$

$$\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2(2s-1)^2 + \frac{1-\sigma}{2r^2}\left(\frac{2\pi}{\varphi}\right)^2 n^2\right]2a_{2s-1}^n + A_n\frac{8p}{lE'} = o$$

q ungerade, a ungerade

$$\left[\frac{q^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\sigma}{2r^2}\left(\frac{2\pi}{\varphi}\right)^2 n^2\right]2a_q^n + A_n\frac{8p}{lE'} + \frac{2\sigma}{r}\frac{4aq}{l}\frac{1}{4n^2-a^2}c = 0$$

q ungerade, a gerade

$$\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 q^2 + \frac{1-\sigma}{2r^2}\left(\frac{2\pi}{\varphi}\right)^2 n^2\right]2a_q^n + A_n\frac{8p}{lE'} = 0$$

$$\left[\frac{\pi^2}{l^2}(2s-1)^2 + \frac{1-\sigma}{2r^2}\left(\frac{2\pi}{\varphi}\right)^2 n^2\right]2b_{2s-1}^n + B_n\frac{8p}{lE'} = 0$$

q ungerade, a gerade

$$\left[\frac{\pi^2}{l^2}q^2 + \frac{1-\sigma}{2r^2}\left(\frac{2\pi}{\varphi}\right)^2\frac{a^2}{4}\right]2b_q^{\frac{a}{2}} + B_{\frac{a}{2}}\cdot\frac{8p}{lE'} - \frac{2\sigma}{r}c\cdot\frac{q\pi}{l} = 0$$

etc.

In diesen Gleichungen darf man ja nicht die Funktion $p\cdot f(\vartheta)$ aus den Augen verlieren.

Wir können uns damit begnügen, dieses System für den Fall zu lösen, daß die Funktion $f(\vartheta)$ gerade ist. Der allgemeine Fall ist nicht schwieriger aufzulösen, nur ist das Resultat hier etwas einfacher.

Wenn q gerade hat man sofort:

$$a_{2s-1}^o = -\frac{A_o}{2}\frac{8p}{lE'}\left(\frac{l}{\pi}\right)^2\frac{1}{(2s-1)^2}$$

$$2a_{2s-1}^n = -A_n\frac{8p}{lE'}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2(2s-1)^2 + \frac{1-\sigma}{2r^2}\left(\frac{2\pi}{\varphi}\right)^2 n^2}$$

$$b_{2s-1}^n = 0.$$

Da C nicht null sein darf, ergibt die letzte Gleichung des Systems den Ausdruck für die Druckkraft, welcher sich folgendermaßen schreibt:

$$p = \frac{E}{1-\sigma^2}\cdot\frac{2}{A_o - A_a}\left\{\frac{l^2}{r^2q^2\pi^2} + \frac{h^2}{3}\left[\frac{q^2\pi^2}{l^2} + \frac{l^2}{\varphi^2\pi^2r^4}\left(1-\left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2\right)^2 - \frac{2\sigma}{r^2} + \frac{2}{r^2}\left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2\right]\right\}$$

Er hängt von den Konstanten q und a ab. Diese Bestimmung wird so durchgeführt, daß p ein Minimum wird und also gleich wird der gesuchten kritischen Belastung.

Man wird also die partiellen Ableitungen von p nach q und a gleich null setzen müssen.

Die so erhaltenen Gleichungen sind dieselben wie diejenigen, welche man erhält, wenn man die Ableitungen der Energie nach q und a gleich null setzt.

Der erste dieser Ausdrücke lautet:

$$\frac{h^2 \pi^2 q}{2 \, l^2} - \left[\frac{l^2}{r^2 \pi^2} + \frac{h^2}{3} \cdot \frac{l^2}{r^4 \pi^2}\left(1 - \left(\frac{a \pi}{\varphi}\right)^2\right)^2\right] \cdot \frac{1}{q^3} = 0.$$

Den zweiten Ausdruck kann man nicht aufstellen solange der Wert von A_a der von a abhängt und der durch die Funktion f (ϑ) für jeden Fall bestimmt, nicht gefunden ist.

Aus diesem Ausdruck erhält man:

$$q_0 = \frac{l \sqrt[4]{3}}{r \sqrt{r h}} \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{h^2}{3 r^2}\left[1 - \left(\frac{a \pi}{\varphi}\right)^2\right]^2}$$

und man muß für q diejenige gerade, ganze Zahl nehmen, welche q_0 am nächsten ist.

Mit diesen Werten wird man die kritische Belastung folgendermaßen schreiben:

$$p = \frac{E}{1 - \sigma^2} \cdot \frac{2}{A_0 - A_a}\left\{\left[1 + \frac{h^2}{3 r^2}\left(1 - \frac{a^2 \pi^2}{\varphi}\right)^2\right] \frac{l^2}{r^2 \pi^2} \cdot \frac{1}{q^2} + \frac{h^3}{3} \frac{\pi^2}{l^2} q^2 + \frac{2 h^2}{3 r^2}\left(-\sigma + \frac{a^2 \pi^2}{\varphi^2}\right)\right\}.$$

Im besonderen Fall des gleichförmigen Druckes erhält man: f $(\vartheta) = 1$.

Man findet dann $A_0 = 2 \quad A_u = 0$.

u hängt nicht von ϑ ab und man erhält:

$$u(\vartheta, o) = -u(\vartheta, l) = -\frac{4 p l}{\pi^2 E'} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2 s - 1)^2}$$

Dies bedeutet, daß der Druck sich auf eine steife Art z. B. mit Hilfe von zwei Druckflächen auswirkt. Dies wurde bei den meisten Knickversuchen in St. Chamond angewendet. Wir werden später einige numerische Resultate angeben.

Man sieht, daß p im gleichen Sinne wie a variiert und man erhält also sein Minimum, wenn man a = 1 setzt.

Die kritische Belastung ist dann:

$$p = \frac{E}{1 - \sigma^2}\left\{\left[1 + \frac{h^2}{3 r^2}\left(1 - \frac{\pi^2}{\varphi^2}\right)^2\right] \frac{l^2}{r^2 \pi^2} \cdot \frac{1}{q^2} + \frac{h^2 \pi^2}{3 l^2} q^2 + \frac{2 h^2}{3 r^2}\left(-\sigma + \frac{\pi^2}{\varphi^2}\right)\right\}$$

Wenn q ungerade und a ungerade sind, wird man finden:

$$p = \frac{E}{1 - \sigma^2} \cdot \frac{2}{A_0 - A_a}\left\{\left[1 + \frac{h^2}{3 r^2}\left(1 - \frac{a^2 \pi^2}{\varphi^2}\right)^2\right] \frac{l^2}{r^2 \pi^2} \cdot \frac{1}{q^2} + \frac{h^2 \pi^2}{3 l^2} q^2 + \frac{2 h^2}{3 r^2}\left(-\sigma + \frac{a^2 \pi^2}{\varphi^2}\right) - \frac{\sigma^2}{r^2} \cdot \frac{1}{\frac{q^2 \pi^2}{l^2} + \frac{1 - \sigma}{2 r^2}\left(\frac{2 \pi}{\varphi}\right)^2 \cdot \frac{a^2}{4}}\right\}$$

Gegenwärtig haben wir mit Herrn *T. Vasilesco* die gleichen Probleme untersucht für den Fall eines Querschnittes mit variablen Krümmungen. Die Darstellung der Berechnungen dieser Probleme wird Gegenstand einer späteren Studie sein, der vorliegende Bericht wurde veröffentlicht als Auszug aus den „Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris 201, 1935, p. 537 und 201, 1935 p. 642.

Betrachten wir Platten aus gewalztem Eisenblech mit verschiedenen Daten, so wie wir sie bei unsern experimentellen Versuchen angewandt haben.

Diese Versuche wurden unter industriellen Bedingungen gemacht. Die erhaltenen Resultate sind ein wenig kleiner als die theoretischen Werte, die man bei Anwendung der in dieser Arbeit gefundenen Formeln erhalten hat.

Wenn man die kleinen erhaltenen Abweichungen berücksichtigt, die sich durch die auf der Platte vor dem Versuche nachgewiesenen Fehler und durch die behelfsmäßige Anordnung der Versuche, die mit Hilfe von großen Druckpressen gemacht wurden, erklären, kann man folgern, daß wir in der Anwendung unserer Formeln die experimentellen Resultate finden.

Nehmen wir eine zylindrische, kreisförmige Platte an, die folgende Dimensionen hat:

$$2\,h = 0{,}003\ \mathrm{m}; \qquad r = 2{,}1; \qquad \varphi = 160^0 = 2{,}795_G; \qquad l = 0{,}8$$

man findet:

$$\sin\frac{\varphi_1}{4} = \sin 40^0 = 0{,}643$$

$$\sin\frac{\varphi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0{,}643 = 0{,}455.$$

Diese Konstanten kennzeichnen die Zonen der Spannungsverteilung des variablen Druckes längs des Schnittes im Falle einer einfachen Biegung.

$$\frac{A_0 - A_1}{2} = 1 - 2{,}415 + 2{,}265$$

$$= 0{,}85$$

$$\frac{2}{A_0 - A_1} = 1{,}176.$$

Untersuchen wir den Fall eines gleichförmigen Druckes

$$q_0 = \frac{l\sqrt[4]{3}}{\pi\sqrt{rh}} = \frac{0{,}8\sqrt[4]{3}}{\pi\sqrt{2{,}1 \cdot \frac{3}{2 \cdot 10^3}}}$$

$$q_0 = 5{,}8$$

$$p = 2{,}2 \cdot 10^{10}\left\{\left[1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{10^6}\cdot\frac{1}{2{,}1^2}\left(1 - \left(\frac{\pi}{2{,}795}\right)^2\right)^2\right]\frac{8^2}{10^2 - 2{,}1^2\,\pi^2}\cdot\frac{1}{36}\right.$$
$$\left. + \frac{3}{4\cdot 10^6}\cdot\frac{\pi^2\cdot 10^2}{8^2}\cdot 36 + \frac{3}{4\cdot 10^6} + \frac{2}{2{,}1^2}\left(-0{,}3 + \frac{\pi^2}{2{,}795^2}\right)\right\}$$

$$p = 2{,}2 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}000825$$
$$= 18{,}5\ \mathrm{kg/mm^2}.$$

Die Versuche unter Pressen haben mittlere Werte von der Größenordnung von 15 kg/mm² ergeben.

Es ist interessant zu wissen, daß im Falle der einfachen Biegung die größte kritische Spannung betragen würde:

$$\begin{aligned} p_f &= p \cdot \frac{2}{A_0 - A_1} \\ &= 18{,}15 \cdot 1{,}176 \\ &= 21{,}35 \text{ kg/mm}^2. \end{aligned}$$

Bei Biegung entsteht wirklich der Bruch durch Knickung infolge Druckspannungen, die ein wenig größer als diejenigen sind, welche durch gleichmäßig verteilten Druck entstehen.

Schlußfolgerungen:

Dieser vorliegende Bericht ist eine Ergänzung zur Anwendung des Bleches in der Konstruktion, eine Anwendung, welche diesem Material eine wichtige Rolle gibt sowohl infolge der Ersparnis die daraus entsteht, wie auch infolge der neuen Formen, die gefunden werden können.

Das Material „Blech" ist wesentlich verschieden vom Material „Walzprofile".

Die Walzprofile, ob es sich um U, I oder Winkeleisen handelt, werden immer Gerüstbestandteile und Gerippe sein, um die Füllungen zu tragen.

Sie laufen Gefahr, wie man leider sehr oft sieht, ein umfassendes Konstruktionsgebiet an sich zu reißen, für welches die Bestrebung nach einer Baukunst seit langem verloren gegangen ist.

Die Technik selbst verkennt oft das geduldige Suchen nach Proportionen, nach Raumwirkungen, nach Kontrasten, die doch dazu beitragen, die ausgeführten Gebäude ästhetisch zu gestalten. Als Entschuldigung kann man sagen, daß das Zusammenfügen von vielen Winkeln, bedingt durch die Festigkeit des Materials, schwerlich vollkommene Raumwirkungen erzeugen kann.

Unsere Bemühungen gehen dahin, dem Blech, einem relativ neuen Material, eine mit der Baukunst stärker verbundene Entwicklungsmöglichkeit zu schaffen.

Zusammenfassung.

Durch Versuche zeigt der Verfasser das Verhalten der betrachteten Schalen unter den verschiedenen Belastungen.

Dann behandelt er das Problem mathematisch und zeigt, daß die erhaltenen Resultate mit denjenigen der Versuche bis auf kleine Abweichungen, bedingt durch die Beschaffenheit des Materials, übereinstimmen.

An Hand von schon ausgeführten Bauten zeigt er, welch große Möglichkeiten diese Schalen bieten, Bauten auf eine wirtschaftliche und doch ästhetische Art auszuführen.

Leere Seite
Blank page
Page vide