Sur des tests statistiques utiles pour la reconnaissance des formes

Autor(en): **Streit, Franz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences et compte rendu des séances de la Société**

Band (Jahr): **50 (1997)**

Heft 3: **Archives des Sciences**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-740284

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Archs Sci. Genève	Vol. 50	Fasc. 3	pp. 217-222	Décembre 1997

Communication présentée à la séance du 30 octobre 1997

SUR DES TESTS STATISTIQUES UTILES POUR LA RECONNAISSANCE DES FORMES

PAR

Franz STREIT*

ABSTRACT

On some statistical tests useful for the recognition of forms. - This article continues the study started in (STREIT, 1996) of statistical tests for the recognition of the original form of planar objects which have been subjected to a random deformation.

First a test is described for the case where the stochastic model proposed in STOYAN & STOYAN (1992) is applicable and where the random variables representing the deformations follow up to a sign change the law of the absolute value of a standard normal random variable.

Then a test is introduced which is based on an alternative stochastic model of multiplicative type with an underlying exponential distribution. It is explained how one can incorporate in the analysis stochastic dependencies between the experimental measures taken from the same object.

The practical implementation of some of these techniques applied to the classification of the form of sand grains is briefly discussed.

Key-words: Pattern recognition, statistical tests, models for stochastically deformed contours, incorporating stochastic dependence relations between measurements.

INTRODUCTION. UN EXEMPLE DE L'APPLICATION DU MODÈLE ADDITIF POUR DEFORMATIONS

En sciences expérimentales on observe fréquemment des systèmes d'objets plans et on constate que ces objets ont une forme similaire mais pas identique. Souvent il est raisonnable de supposer que lors de sa genèse chaque objet ou grain est réalisé par une déformation aléatoire de son contour à partir d'une forme commune originale. Typiquement dans une telle situation on ne connaît pas concrètement cette forme originale mais on observe des objets individuels déformés. Le but de ce travail est de montrer que l'on peut utiliser des techniques statistiques simples pour déterminer aussi bien que possible la forme originale des objets.

Bien sûr il existe différentes manières concevables de décrire mathématiquement l'influence du hasard dans ce contexte. Pour expliquer le principe de base je vais d'abord me restreindre à utiliser un modèle proposé dans STOYAN & STOYAN (1992): On suppose que les formes $K_1, \ldots, K_n$ des objets plans $O_1, \ldots, O_n$ forment un échantillon aléatoire et que la forme K_i admet la description par la formule

*Université de Genève, Section de Mathématiques, case postale 240, CH-1211 Genève 24.

$$R_i(\varphi) = r(\varphi) + Z_i(\varphi) \qquad [0 \leq \varphi < 2\pi; i = 1, \ldots, n]. \tag{1}$$

Ici R_i (φ) désigne le rayon vecteur de la forme K_i à l'angle φ mesuré à partir d'un point de référence P_i, par exemple du centre de gravité de O_i et à partir d'un point de référence sur le contour qui caractérise la direction à l'angle $\varphi = 0$. $r(\varphi)$ désigne le rayon vecteur de la forme originale commune non-déformée et $Z_i(\varphi)$ la déformation dans la direction φ de l'objet O_i. K_i est obtenue de O_i en translatant l'objet de telle façon que P_i coïncide avec l'origine du système des coordonnées du plan. Pour des explications plus détaillées du modèle et des suppositions faites concernant les O_i voir STREIT (1996).

Nous allons considérer le cas où on admet comme formes originales une classe d'ellipses. En orientation standard $r(\varphi)$ satisfait aux relations

$$r(\varphi) = (\cos(\varphi)^2/a^2 + \sin(\varphi)^2/b^2)^{-1/2} \qquad [0 \leq \varphi \leq \pi/2] \tag{2}$$

$$r(\varphi) = r(\pi - \varphi) \qquad [\pi/2 < \varphi \leq \pi] \qquad r(\varphi) = r(\varphi - \pi) \qquad [\pi < \varphi < 2\pi].$$

L'étude de $K_1, \ldots, K_n$ se fait concrètement en mesurant le rayon vecteur de la forme à des angles prescrits, par exemple aux angles $\varphi = 0^0, 90^0, 180^0$ et 270^0.

En supposant que les déformations $Z_i(l\pi/2)$ $[i = 1, \ldots, n; l = 0, 1, 2, 3]$ forment un échantillon aléatoire de taille $4n$ d'une population à fonction de densité

$$f_Z(z) = (2/\pi)^{1/2} \exp[-z^2/2] \qquad [z \leq 0] \qquad f_Z(z) = 0 \qquad [z > 0], \tag{3}$$

la situation expérimentale est complètement spécifiée.

Considérons le cas où on voudrait savoir si l'on a effectivement besoin d'admettre la classe des ellipses ou s'il suffit de travailler avec la classe plus restreinte des cercles: c'est-à-dire on veut tester les hypothèses

$H_0 : a = b$

contre

$H_1 : a \neq b,$

où les demi-axes a et b ne sont pas connus et sont positifs.

Dans un tel cas la méthodologie statistique recommande (WITTING & MUELLER-FUNK, 1995, section 6.2.1) de baser la décision sur le test du rapport des vraisemblances généralisé. On obtient la statistique de ce test en calculant d'abord la fonction de vraisemblance L associée à $\mathbf{R} = (R_i(l\pi/2) \qquad [i = 1, \ldots, n; l = 0, 1, 2, 3])'$
[où $'$ désigne le transposé d'un vecteur] selon

$L(a, b : \mathbf{R}) = (2/\pi)^{2n} \exp[-\sum_{l=0,2} \sum_{i=1}^{n} (R_i(l\pi/2) - a)^2/2 - \sum_{l=1,3} \sum_{i=1}^{n} (R_i(l\pi/2) - b)^2/2]$

et en posant

$\Lambda_{gen} = [\sup_{a,b>0}(L(a, b : \mathbf{R}))]^{-1} \; [\sup_{r>0}(L(r, r : \mathbf{R}))]$

ce qui résulte en $\Lambda_{gen} = [L(\hat{A}, \hat{B} : \mathbf{R})]^{-1} \; [L(\hat{R}, \hat{R} : \mathbf{R})]$.

Il est facile à vérifier que les estimateurs du maximum de vraisemblance de r, a et b sont données par

$$\hat{R} = \max_{i=1,\ldots,n;l=0,1,2,3} (R_i(l\pi/2)) \tag{4}$$

et

$$\hat{A} = \max_{i=1,\ldots,n:l=0,2} (R_i(l\pi/2)) \qquad \hat{B} = \max_{i=1,\ldots,n;l=1,3} (R_i(l\pi/2)). \tag{5}$$

Asymptotiquement pour n grand la statistique modifiée $-2\ln(\Lambda_{gen})$ suit une distribution de χ_1^2 de K. Pearson à un degré de liberté. Le test de niveau de signification α s'effectue donc en comparant la valeur réalisée de la statistique du test asymptotique

$$-2\ln(\Lambda_{gen}) = \sum_{l=0}^{3}\sum_{i=1}^{n}(R_i(l\pi/2)-\hat{R})^2 - \sum_{l=0,2}\sum_{i=1}^{n}(R_i(l\pi/2)-\hat{A})^2 - \sum_{l=1,3}\sum_{i=1}^{n}(R_i(l\pi/2)-\hat{B})^2 \tag{6}$$

à la valeur critique $\chi_1^2(1-\alpha)$ définie par $P(\chi_1^2 \leq \chi_1^2(1-\alpha)) = 1-\alpha$, (que l'on trouve tabulée dans beaucoup de livres statistiques) et en rejetant H_o si et seulement si

$$-2\ln(\lambda_{gen}) > \chi_1^2(1-\alpha). \tag{7}$$

UN MODÈLE STOCHASTIQUE DU TYPE MULTIPLICATIF

Le modèle additif pour les déformations n'est peut-être pas le seul modèle à considérer. On peut aussi s'imaginer que les rayons vecteurs observés sont multiplicativement liés aux rayons vecteurs de la forme originale selon la formule

$$R_i(\varphi) = Z_i(\varphi)r(\varphi) \qquad [i = 1,\ldots,n; 0 \leq \varphi < 2\pi]. \tag{8}$$

Du point de vue mathématique ce modèle est plus facile à manier. En principe toutes les distributions à valeurs exclusivement non-négatives sont admises et on n'a pas besoin de limiter les supports des distributions pour respecter les restrictions $R_i \geq 0$ et $r \geq 0$. Un choix judicieux va souvent être la distribution exponentielle de paramètre 1 spécifiée par la fonction de densité

$$f_Z(z) = e^{-z} \quad [z > 0] \qquad f_Z(z) = 0 \quad [z \leq 0]. \tag{9}$$

Regardons le procédé que l'on obtient, quand on résout notre problème de tester les hypothèses $H_0 : a = b$ et $H_1 : a \neq b$ pour la classe des ellipses spécifiées par (1) en observant $R_i(l\pi/2)$ $[i = 1,\ldots,n; l = 0,1,2,3]$ dans le cadre de ce nouveau modèle défini par (8). On suppose que les variables aléatoires $R_i(l\pi/2)/a$ $[i = 1,\ldots,n; l = 0,2]$ et $R_i(l\pi/2)/b$ $[i = 1,\ldots,n; l = 1,3]$ forment un échantillon de taille $4n$ de (9).

On trouve donc pour la fonction de vraisemblance associée à

$\mathbf{R} = (R_1(l\pi/2),\ldots,R_n(l\pi/2)\ [l = 0,1,2,3])'$
$L(a,b:\mathbf{R}) = a^{-2n}b^{-2n}\exp[-\sum_{l=0,2}\sum_{i=1}^{n} R_i(l\pi/2)/a - \sum_{l=1,3}\sum_{i=1}^{n} R_i(l\pi/2)/b]$

et pour la statistique du test du rapport généralisé des vraisemblances

$$\Lambda_{gen} = [\sup_{a,b} L(a,b:\mathbf{R})]^{-1} \sup_r L(r,r:\mathbf{R}) = [L(\hat{A},\hat{B}:\mathbf{R})]^{-1}\ L(\hat{R},\hat{R}:\mathbf{R}).$$

Il est simple à vérifier que les estimateurs du maximum de vraisemblance sont donnés par

$$\hat{R} = \overline{R}_{0,1,2,3} = \sum_{l=0}^{3}\sum_{i=1}^{n} R_i(l\pi/2)/(4n), \tag{10}$$

et

$$\hat{A} = \overline{R}_{0,2} = \sum_{l=0,2}\sum_{i=1}^{n} R_i(l\pi/2)/(2n), \qquad \hat{B} = \overline{R}_{1,3} = \sum_{l=1,3}\sum_{i=1}^{n} R_i(l\pi/2)/(2n). \tag{11}$$

On constate alors que

$$\Lambda_{gen} = ((\overline{R}_{0,1,2,3})^{-2}\overline{R}_{0,2}\overline{R}_{1,3})^{2n} = [4V^*(1-V^*)]^{2n},$$

où $V^* = [2\overline{R}_{0,1,2,3}]^{-1}\overline{R}_{0,2}$ suit sous H_0 la loi bêta à fonction de densité

$$f_{V^*}(v^*) = [\Gamma(2n)]^{-2}\Gamma(4n)(v^*)^{2n-1}(1-v^*)^{2n-1}.$$

Donc le test au niveau de signification α possède la région critique
$\{v* < B(2n,2n)(\alpha/2)\} \cup \{v* > B(2n,2n)(1-\alpha/2)\}$,
où B désigne la distribution bêta et la formulation précédente fait intervenir des valeurs critiques bilatérales.
Asymptotiquement, pour n grand, on a que la statistique transformée $-2\ln(\Lambda_{gen})$ suit une loi de χ_1^2 ,
ce qui nous conduit à utiliser comme région critique du test asymptotique l'ensemble caractérisé par l'inégalité

$$-2(\ln(\lambda_{gen})) > \chi_1^2(1-\alpha). \tag{12}$$

UN EXEMPLE ILLUSTRATIF

Nous allons appliquer les considérations du paragraphe précédent à la classification de la forme de grains de sable. On trouve dans STOYAN & STOYAN (1992, page 187) la reproduction des contours de 72 grains de sable. Les premiers 24 contours représentent des grains de sable trouvés à la côte de la mer baltique proche à Tressenheide, les 24 contours suivants proviennent de grains de sable collectionnés à la rivière Selenčuk en Caucase et les derniers 24 contours montrent des grains de sable trouvés dans le désert Gobi; les grains sont d'habitude couchés sur leur côté large. Les contours ont été produits à la base de photos qui donnent une image bi-dimensionelle des grains par projection.

On a effectué le test de circularité basé sur le modèle multiplicatif à distribution exponentielle à ces données. Cependant, pour faciliter la prise des mesures, on a basé les calculs sur la somme des deux rayons vecteurs en direction horizontale et les deux

rayons vecteurs en direction verticale plutôt que les quatre rayons vecteurs individuels et on a supposé que ce sont les sommes réduites
$D_i(0)/(2a) = [R_i(0) + R_i(\pi)]/(2a)$ et
$D_i(\pi/2)(2b) = [R_i(\pi/2) + R_i(3\pi/2)]/(2b) \quad [i = 1, \ldots, n]$
qui forment un échantillon aléatoire de taille $2n$ de la distribution exponentielle de paramètre 1.

On a trouvé pour les valeurs de la statistique du test asymptotique ainsi que pour les probabilités α_{obs} d'observer une valeur au moins aussi élevée que celle qui a été réalisée (évaluée sous l'hypothèse que H_0 est vraie et que n est grand)
pour les grains de la rivière: $-2\ln(\lambda_{gen}) = 1,11 \quad \alpha_{obs} = 0,29$
pour les grains du désert Gobi: $-2\ln(\lambda_{gen}) = 0,76 \quad \alpha_{obs} = 0,38$
pour les grains de la mer baltique: $-2\ln(\lambda_{gen}) = 0,35 \quad \alpha_{obs} = 0,56$.

Donc on se décide dans les trois cas pour la forme originale sphérique des grains. On note que la déviation de la forme sphérique s'avère la plus marquée pour les grains de sable provenant de la rivière et la plus faible pour les grains de sable provenant de la mer. Cela est en bon accord avec les résultats d'autres analyses statistiques de ces données.

MODÈLES À DÉPENDANCES STOCHASTIQUES ENTRE LES MESURES PRISES DU MÊME OBJET

Décrivons maintenant à l'aide d'un exemple élaboré en détail comment (si cela s'avère nécessaire) on peut tenir compte de l'existence de relations d'interdépendance entre les mesures expérimentales prises du même objet.

L'idée de base consiste à remplacer la supposition que les Z -variables forment un échantillon aléatoire par une condition alternative.

Nous voulons décrire une situation, où des valeurs larges obtenues pour les mesures horizontales entraînent d'habitude qu'également les mesures en direction verticale sont grandes. Un modèle multiplicatif à dépendance Markovien entre les mesures prises de la même unité basée sur la somme des rayons vecteurs horizontaux $D_i(0)$ et la somme des rayons vecteurs verticaux $D_i(\pi/2)$ $[i = 1, \ldots, n]$ est engendré par les hypothèses suivantes: On suppose que $D_i(0)/(2a) = Z_i(0)$ et $D_i(\pi/2)/(2b) = Z_i(\pi/2)$ $[i = 1, \ldots, n]$ et que les variables aléatoires
$Z_1(0), \ldots, Z_n(0)$ forment un échantillon aléatoire d'une distribution exponentielle de paramètre 1 et que la variable aléatoire conditionnelle
$Z_i(\pi/2)|Z_i(0)$ suit une distribution exponentielle de paramètre $[Zi(0)]^{-1}$ et cela indépendamment de $Z_l(\pi/2)$, $Z_l(0)$ avec $l \neq i$. Au lieu de former un échantillon aléatoire de taille $2n$, la loi composée des Z-variables possède donc dans ce modèle une structure plus complexe.

Nous obtenons pour la fonction de vraisemblance associée à
$\mathbf{D} = (D_i(l\pi/2); [i = 1, \ldots, n; l = 0, 1])'$:

$L(a,b:\mathbf{D}) = (2a)^{-n}\exp[-(2a)^{-1}\sum_{i=1}^{n} D_i(0)]\prod_{i=1}^{n}\{(D_i(0))^{-1}\}(2a/(2b))^n$
$\exp[-(2a/(2b))\sum_{i=1}^{n}(D_i((0))^{-1}D_i(\pi/2))]$ et donc
$\ln(L(a,b:\mathbf{D})) = -n\ln(2) - n\overline{D_0}/(2a) - \sum_{i=1}^{n}\ln(D_i(0)) - n\ln(b) - na\overline{D}_{1|0}/b,$
où on définit $\overline{D}_0 = \sum_{i=1}^{n} D_i(0)/n$ et $\overline{D}_{1|0} = \sum_{i=1}^{n}((D_i(0))^{-1}D_i(\pi/2))/n$.

L'estimation selon la méthode du maximum de vraisemblance de a et b donne à partir de l'équation $\partial\ln(L(a,b,\mathbf{D}))/\partial a = 0$ $\hat{A} = (\hat{B}\overline{D}_0/(2\overline{D}_{1|0}))^{1/2}$ et à partir de l'équation $\partial\ln(L(a,b:\mathbf{D}))/\partial b = 0$ $\hat{B} = \hat{A}\overline{D}_{1|0}$, ce qui conduit finalement à

$$\hat{A} = \overline{D}_0/2 \tag{13}$$

et

$$\hat{B} = \overline{D}_0\overline{D}_{1|0}/2 \tag{14}$$

Pour estimer $a = b = r$ dans le cas où H_0 est correcte on trouve à partir de l'équation $\partial\ln(L(r,r:\mathbf{D}))/\partial r = 0$ que

$$\hat{R} = \overline{D}_0/2. \tag{15}$$

En se servant de ces résultats on arrive à partir de
$\Lambda_{gen} = [L(\hat{A},\hat{B}:\mathbf{D}]^{-1}\,[L(\hat{R},\hat{R}:\mathbf{D})]$ à

$$\Lambda_{gen} = (\overline{D}_{1|0})^n\exp[n(1-\overline{D}_{1|0})]. \tag{16}$$

Pour n on peut utiliser la région critique asymptotique

$$-2\ln(\lambda_{gen}) = -2n(\ln(\overline{D}_{1|0}) - \overline{D}_{1|0} + 1) > \chi_1^2(1-\alpha)$$

pour tester H_0 versus H_1.

RÉSUMÉ

Ce travail poursuit l'étude de l'utilisation de tests statistiques pour la reconnaissance de la forme originale d'objets plans aléatoirement déformés qui a été commencée dans STREIT (1996).

On décrit d'abord un test pour le cas où le modèle stochastique proposé dans STOYAN & STOYAN (1992) est applicable et où les variables aléatoires décrivant les déformations suivent à un changement de signe près la loi du montant absolu d'une variable aléatoire normale centrée réduite.

On introduit ensuite un test basé sur un modèle alternatif du type multiplicatif à distribution exponentielle. On explique comment on peut incorporer dans l'analyse des dépendances stochastiques entre les mesures expérimentales prises du même objet.

On montre l'application pratique de certaines de ces techniques à la classification de la forme de grains de sable.

Mots-clés: Reconnaissance de formes, tests statistiques, modèles pour des contours déformés aléatoirement, modèles à dépendances stochastiques entre mesures expérimentales.

RÉFÉRENCES

STOYAN, D. & H. STOYAN, 1992. *Fraktale, Formen, Punktfelder. Methoden der Geometrie-Statistik*, Akademie Verlag, Berlin.

STREIT, F. 1996. Recognition of the form of planar objects by means of statistical tests. *Microsc. Microanal. Microstruct.* 7: 441-445.

WITTING, H. & U. MUELLER-FUNK, 1995. *Mathematische Statistik II*, Teubner, Stuttgart.