Modèles numériques de systèmes autogravitants. III. Couches planes parallèles

Autor(en): **Janin, Guy**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **23 (1970)**

Heft 1

PDF erstellt am: **30.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-739132

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

MODÈLES NUMÉRIQUES DE SYSTÈMES AUTOGRAVITANTS III. COUCHES PLANES PARALLÈLES

PAR

Guy JANIN

Soit un ensemble de N masses ponctuelles mobiles le long d'une droite. C'est un système uni-dimensionnel. Son correspondant tri-dimensionnel est un ensemble de N plans matériels infiniment minces perpendiculaires à un axe et tels que leur dimension est grande vis-à-vis de leur écartement. Le mouvement de ces masses ponctuelles, respectivement de ces plans, est caractérisé par le fait que la force entre deux éléments est indépendante de leur distance mutuelle. Les équations de mouvement sont ainsi très simples ce qui rend ces modèles particulièrement intéressants pour les expériences numériques sur la dynamique des systèmes à grand nombre de particules. Des modèles comprenant jusqu'à $N = 2000$ masses (HOHL et CAMPBELL, 1968) ont pu être étudiés avec profit.

Il est cependant possible de simplifier encore ce modèle. En effet il ne nous intéresse guère de connaître la trajectoire de chaque particule, seul leur comportement collectif nous importe et la méthode précédente nous donne trop de renseignements.

Le modèle de l'outre. — Un système matériel à grand nombre de particules n'évolue, dans sa première phase, que sous l'effet de son potentiel lissé (pas de rencontres) et sa fonction de distribution obéit à l'équation de Liouville (pas de second membre). La résolution de cette équation est équivalente à la résolution des équations de mouvement. Une conséquence de l'équation de Liouville est la conservation des éléments de volume du domaine représentatif du système dans l'espace de phase. Si l'on choisit l'état initial du système tel que la densité de points dans l'espace de phase est constante dans un certain domaine D et nulle en dehors, l'évolution du système ne se traduira que par une déformation du domaine D avec conservation de son volume. C'est le modèle de l'outre *(water-bag model)*. Ainsi, au lieu d'étudier l'ensemble des particules du système, suffit-il de n'étudier que les particules limitant le bord du domaine D. C'est la méthode utilisée par ROBERTS et BERK (1967) pour

étudier l'instabilité à deux courants dans un plasma linéaire. Cette méthode illustre le point de vue eulérien tandis que la précédente applique le point de vue lagrangien.

Mouvement d'un contour dans l'espace de phase. — L'espace de phase de notre système est plan: une dimension de position et une dimension de vitesse. Le contour sera une ligne fermée dans ce plan. Nous le représenterons par une suite de points i de coordonnées (x_i, v_i) numérotés de 1 à n.

L'intégration du mouvement de ces points sera confiée à un algorithme très simple:

$$x_i(t+dt) = x_i(t) + v_i(t+dt/2)\,dt$$

$$v_i(t+dt/2) = v_i(t-dt/2) + a_i(t)\,dt$$

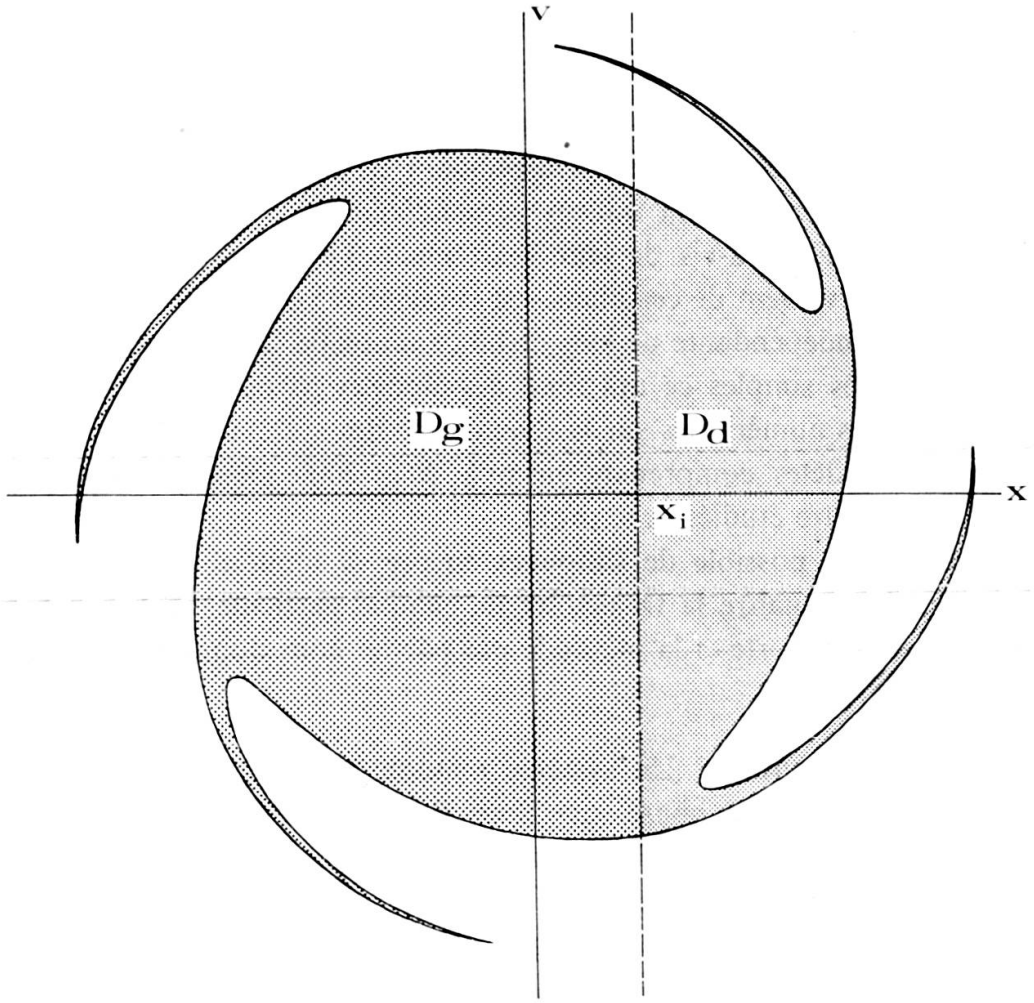

FIG. 1.

$a_i(t)$, l'accélération du point i, dépend de la différence de masse des points du système situés entre la droite et la gauche du point i. Cette masse est proportionnelle à la différence entre les surfaces D_d et D_g découpées dans D par la verticale d'abscisse x_i dans l'espace de phase (fig. 1).

Ces surfaces se calculent par sommation des aires des trapèzes de sommets (x_k, v_k), (x_{k+1}, v_{k+1}), $(x_k, 0)$, $(x_{k+1}, 0)$. Le contour prenant assez vite une forme tourmentée, la verticale d'abscisse x_i traversera des trapèzes dont les surfaces devront être fractionnées. Ce dernier point rend l'estimation de $a_i(t)$ assez compliquée et oblige notamment à effectuer n ensembles d'opérations pour calculer l'accélération d'un point i. L'avance du système d'un pas temporel dt nécessitera ainsi n^2 ensembles d'opérations et on retrouve cette dépendance en n^2 caractéristique des méthodes d'intégration du mouvement des problèmes à n corps.

Il ne sert à rien d'utiliser une méthode d'intégration d'ordre élevé car la variation des grandeurs est discontinue. En effet, lors de l'estimation des surfaces des trapèzes fractionnés, un léger déplacement de x_i peut considérablement changer la valeur de ces surfaces pour peu que ce déplacement nous transporte d'un trapèze au suivant.

Notons que le calcul de $a_i(t)$ exige la connaissance de $v_i(t)$. Nous en prenons une valeur approximative en calculant simultanément avec $x_i(t+dt)$

$$v_i(t+dt) = v_i(t-dt/2) + a_i(t)\,3dt/2$$

L'expérience montre que le contour polygonal subit en certains endroits des allongements. Pour que notre approximation polygonale conserve son sens, il est nécessaire d'ajouter des points en cours d'évolution. Cette opération est effectuée après chaque pas dt: les segments dépassant une certaine longueur se voient ajouter un point en leur milieu.

Test de l'algorithme. — Deux grandeurs globales permettent de vérifier que le processus ne diverge pas d'un processus physique. Ce sont la surface du domaine D et l'énergie totale E; elles doivent rester constantes. Dans nos expériences, elles ne varient jamais plus d'un millième de la valeur initiale.

Calcul de l'énergie. — L'énergie totale du système n'est pas aussi évidente à estimer dans notre cas que dans le cas classique des N points matériels. Il convient d'utiliser le caractère discret de notre méthode qui se concrétise par les trapèzes définis par les points (x_k, v_k) du contour. Une manière d'estimer approximativement l'énergie du système consiste à supposer que chaque trapèze est un plan matériel infiniment mince de masse proportionnelle à la surface du trapèze situé en x_k. L'énergie potentielle se calculera en construisant le système à partir d'une configuration à énergie nulle. Cette configuration, dans le cas d'un univers unidimensionnel, est celle où tous les plans sont confondus, à une abscisse quelconque. Mettons tous les plans à l'origine. Le total des travaux nécessaires pour les déplacer jusqu'à leur position x_k sera égal à l'énergie potentielle. Cette énergie sera positive.

L'énergie cinétique se calculera très simplement en considérant des trapèzes « horizontaux » définis par leur ordonnée v_k, assimilés à des plans matériels infiniment minces de vitesse v_k.

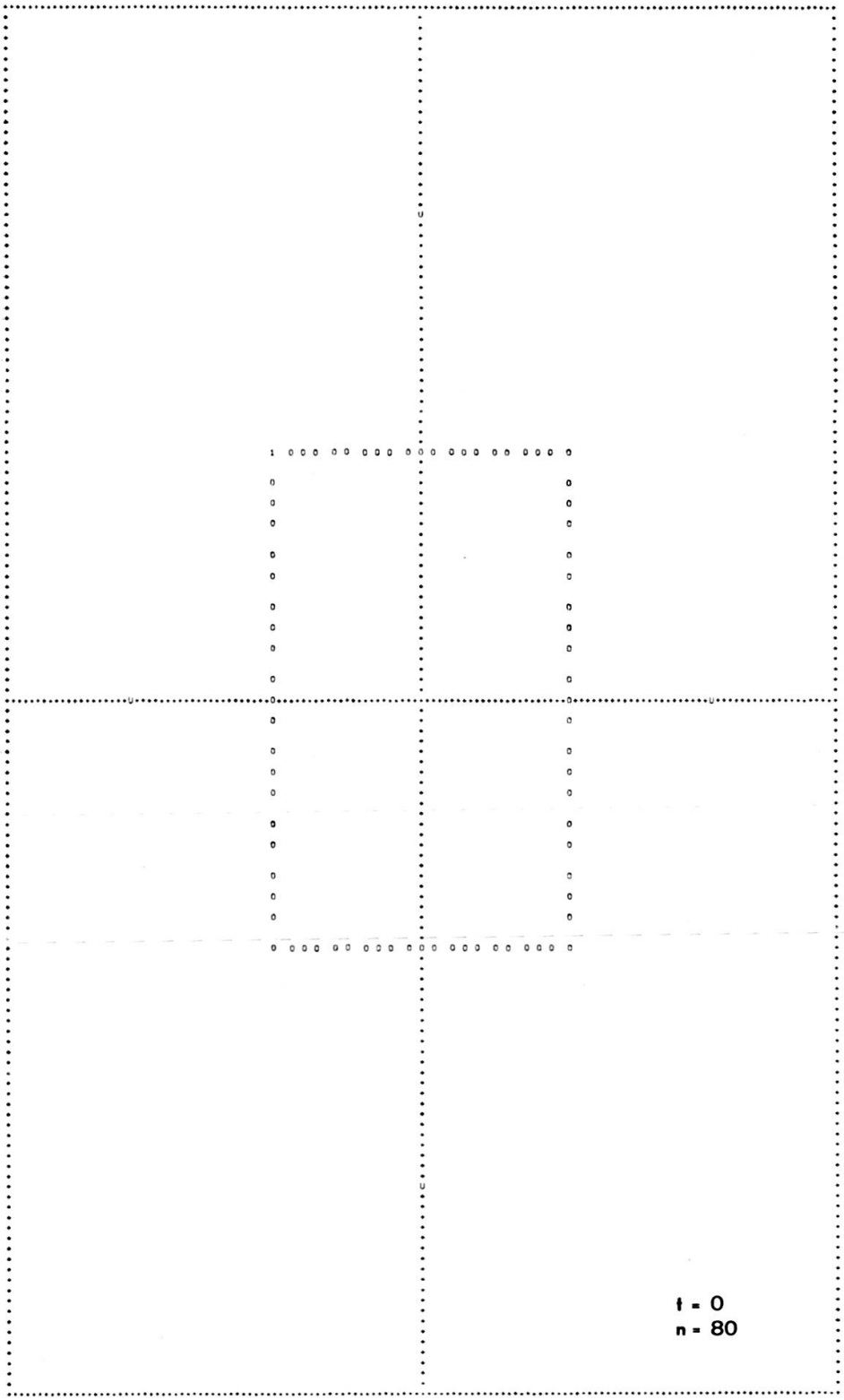

FIG. 2 a)

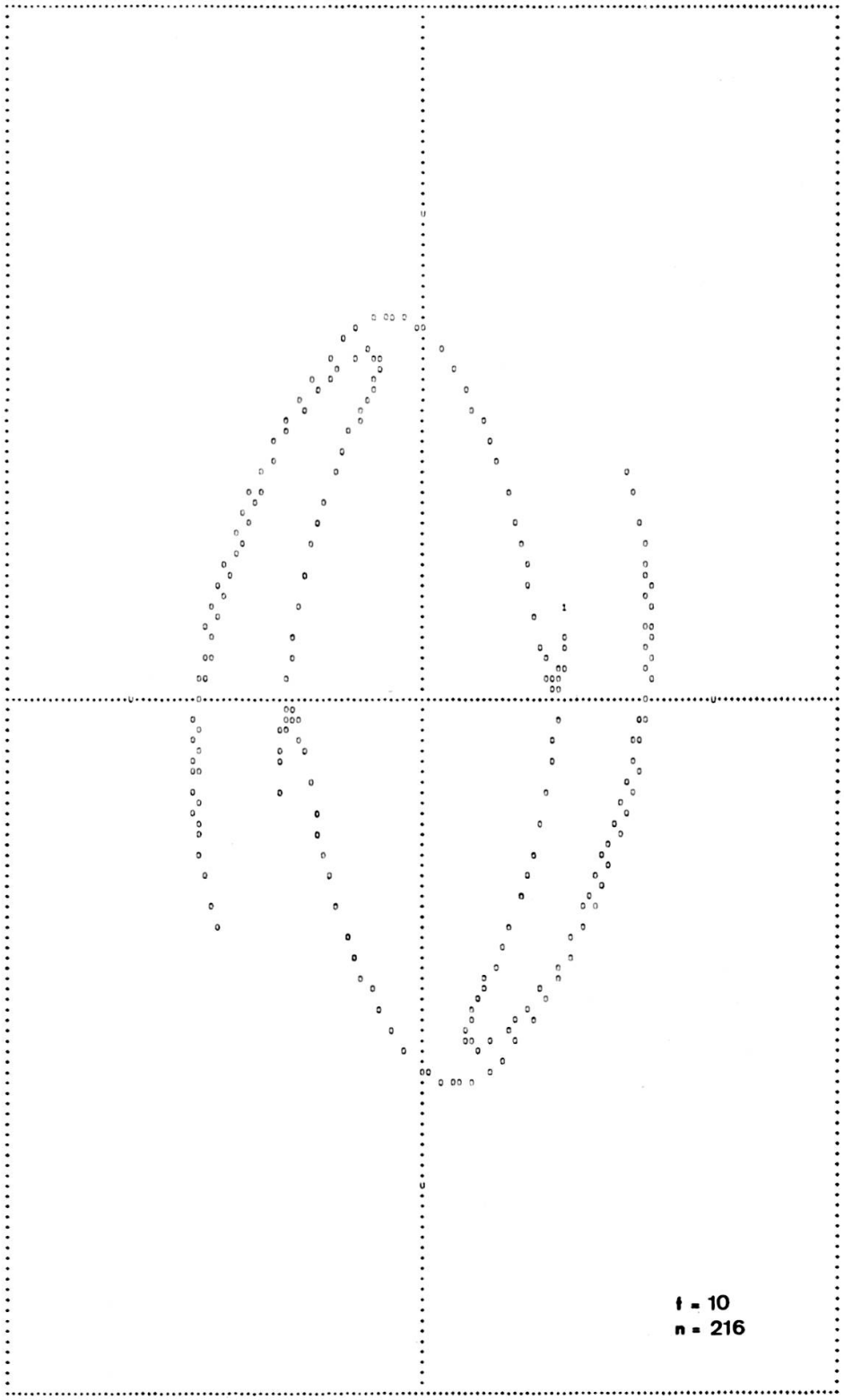

FIG. 2 b)

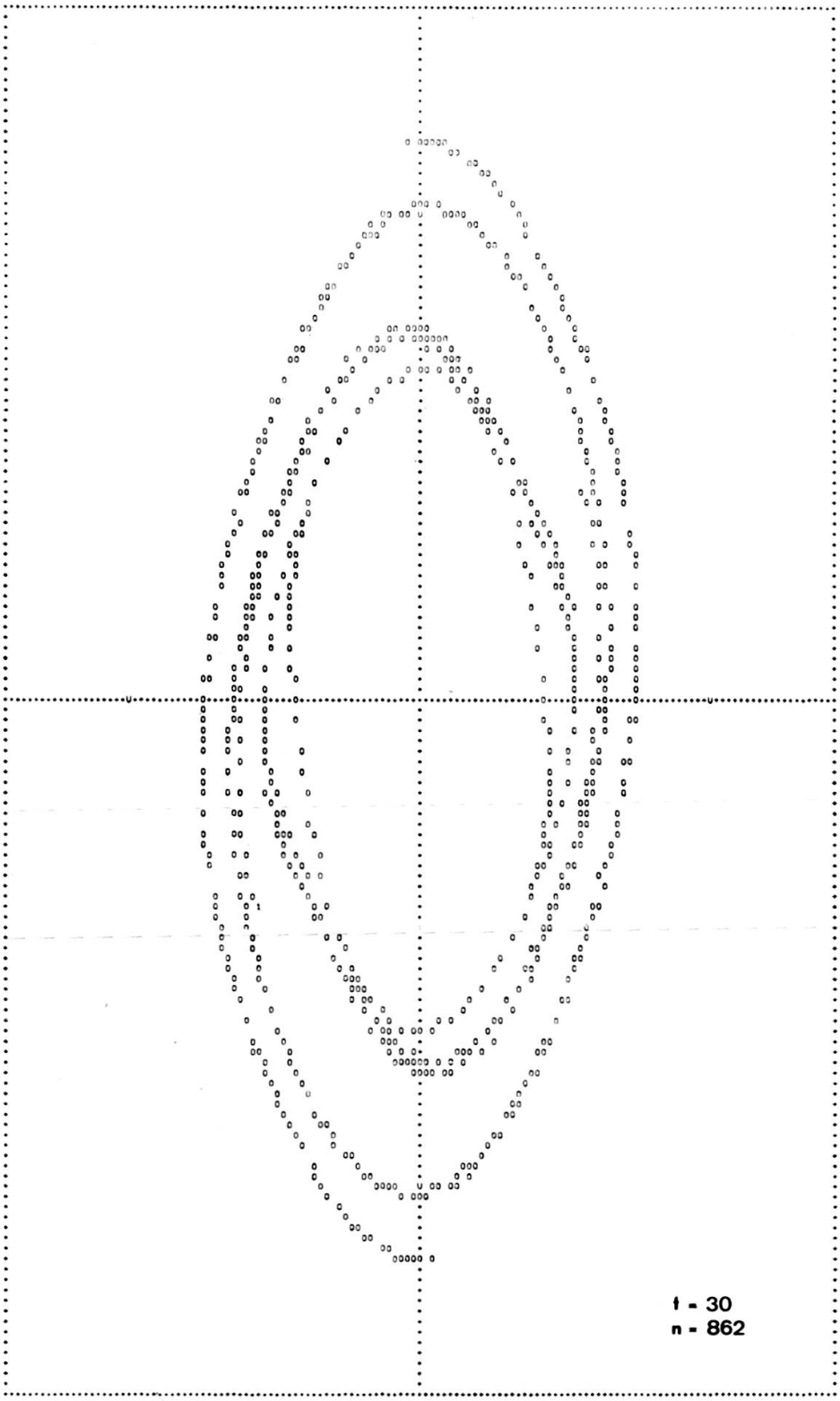

FIG. 2 c)

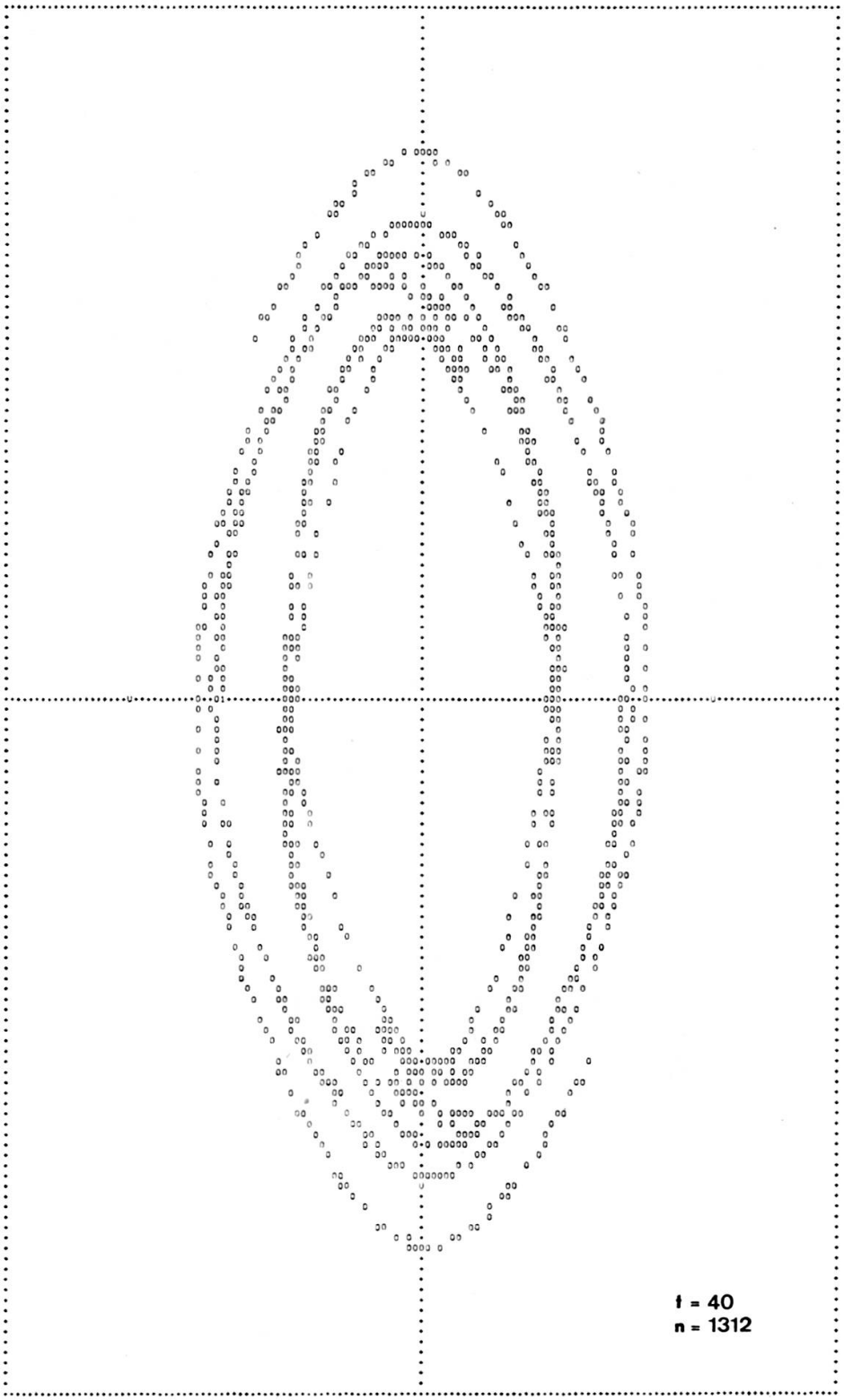

FIG. 2 d)

Unités. — Afin d'éviter d'inutiles manipulations de constantes, le système d'unités a été choisi tel que $2\pi G = 1$ et que la surface du domaine D soit numériquement égale à 1. Si la surface D est un carré de côté unité centré à l'origine, un point d'un sommet mettra environ un temps unité pour parcourir 0.5; le temps de chute τ_c est donc de l'ordre de l'unité.

Expérience numérique type. — La figure 2 indique quatre stades de développement d'un domaine initialement carré défini par 80 points. Ces figures sont réalisées par l'imprimante de l'ordinateur. On voit la déformation du domaine D en une zone centrale entourée de bras spiraux. Le pas temporel est de 0.1 et on a pu aller jusqu'à 50 τ_c en approximativement 4 heures d'ordinateur CDC 3800. L'intégration cesse automatiquement lorsque le nombre de points atteint 2000 ou lorsque la surface de D subit une fluctuation supérieure à $^1/_{10}$ de sa valeur initiale.

Le programme a été rédigé en FORTRAN. Lors du calcul, les coordonnées des points sont régulièrement enregistrées sur bande magnétique.

Applications. — Les modèles d'étude de systèmes autogravitant à grand nombre de particules sont rares et les résultats qu'ils nous donnent sont extrêmement précieux pour vérifier les considérations théoriques qu'on peut formuler sur ces systèmes. Nous effectuons avec ce modèle des expériences analogues à celles de HOHL et CAMPBELL (1968) ou GOLDSTEIN, CUPERMAN et LECAR (1969) qui, utilisant le modèle classique, ont essayé de vérifier la théorie statistique des systèmes stellaires sans collision proposé par LYNDEN-BELL (1967).

Observatoire de Genève

BIBLIOGRAPHIE

GOLDSTEIN, S., S. CUPERMANN et M. LECAR, 1969, *MN* **143**, 209.
HOHL, F. et J. W. CAMPBELL, 1968, *AJ* **73**, 611.
LYNDEN-BELL, D., 1967, *MN* **136**, 101.
ROBERTS, K. V. et H. L. BERK, 1967, *Phys. Rev. Let.* **19**, 297.