**Zeitschrift:** Archives des sciences [1948-1980]
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
**Band:** 18 (1965)
**Heft:** 3

**Artikel:** Aires en géométrie pascalienne
**Autor:** Rossier, P.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-739242

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 09.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

BIBLIOGRAPHIE

1. Commission internationale pour la Protection des eaux du lac Léman et du Rhône contre la pollution.
2. MORTIMER, C. H. 1941-42. The exchange of dissolved substances between mud and water in lakes. *Journal of Ecology*, vol. 29, pp. 280-329 et vol. 30, pp. 147-201.
3. SAUVAGE, J. et C. SERRUYA. 1964. Au sujet de la présence d'un Dryas dans les sédiments du lac Léman au large de Thonon-les-Bains. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 259, pp. 3310-3313.
4. BOSWELL, P. G. H. 1961. *Muddy sediments*. W. Heffer & Sons Ltd., Cambridge.

Manuscrit reçu le 2 septembre 1965.

## P. ROSSIER. — Aires en géométrie pascalienne.

### 1. INTRODUCTION

La géométrie pascalienne repose sur les axiomes d'appartenance, d'ordre et sur deux axiomes de parallélisme; le premier est celui de l'existence et de l'unicité de la parallèle à une droite, issue d'un point donné; le second est la proposition suivante: soit un hexagone $ABCDEF$ inscrit à une paire de droites; si les côtés opposés $AB$ et $DE$, $BC$ et $EF$ sont respectivement parallèles, il en est de même de ceux de la troisième paire $CD$ et $FA$.

Ces axiomes permettent d'introduire la congruence des figures par translation et symétrie centrale ainsi qu'un calcul segmentaire qui a les propriétés habituelles du calcul arithmétique. La géométrie pascalienne a une forme analytique; les calculs dont elle fait usage représentent des constructions effectuées sur des segments [1].

Avec Hilbert [2] nous dirons que deux polygones sont *équidécomposables* s'il est possible de les découper en un nombre fini de triangles congruents deux à deux; ils sont *équicomplémentaires* si, par adjonction de polygones équidécomposables, ils donnent des polygones équidécomposables.

On démontre la transitivité de l'équicomplémentarité.

### 2. AIRE DES POLYGONES

Deux parallélogrammes ayant un côté commun et dont les côtés opposés à celui-là ont même support sont équicomplémentaires; ils sont équidécomposables si les côtés précédents ont au moins un point commun.

[1] V. P. ROSSIER, Géométrie affine et géométrie pascalienne. *Archives des Sciences*, 13, fasc. 3, p. 355, 1960.

[2] *Grundlagen der Geometrie*, ch. IV. P. ROSSIER, *Les fondements de la géométrie et David Hilbert*, 2e partie, ch. IV (ouvrage à paraître).

Dans le plan, considérons deux directions distinctes $x$ et $y$. Soit un parallélogramme $ABCD$. Faisons glisser le côté $BC$ sur son support de telle sorte que le côté $AB'$ du parallélogramme obtenu soit parallèle à $x$. Les parallélogrammes $ABCD$ et $AB'\,C'\,D'$ sont équicomplémentaires.

Faisons glisser $C'\,D'$ sur son support de telle sorte que le côté $AD''$ du parallélogramme $AB'\,C''\,D''$ ainsi construit soit parallèle à la direction $y$. Les parallélogrammes $ABCD$ et $AB'\,C''\,D''$ sont équicomplémentaires. Nous dirons que le parallélogramme $ABCD$ a été réduit par $B$ et $D$ aux axes $x$ et $y$.

Permutons les rôles des côtés $AB$ et $AD$. Faisons glisser $CD$ en $C_1\,D_1$ de façon que le côté $AD_1$ du parallélogramme $ABC_1\,D_1$ soit parallèle à $y$, puis faisons glisser le côté $BC_1$ en $B_2C_2$ pour obtenir le parallélogramme $AB_2\,C_2\,D_1$ de côtés parallèles à $x$ et $y$. Le parallélogramme donné a été réduit par $D$ et $B$ aux axes $x$ et $y$.

Les parallélogrammes $AB'\,C''\,D''$ et $AB_2\,C_2\,D_1$ sont équicomplémentaires à $ABCD$, donc équicomplémentaires entre eux.

Introduisons un système de coordonnées parallèles à $x$ et $y$ et d'origine $A$. Soient $y = mx$ et $y = nx$ les équations des droites $AB$ et $AD$, $b$ et $d$ les abscisses $x$ de $B$ et $D$. Le calcul donne

$$AB' = b\left(1 - \frac{m}{n}\right), \qquad AD'' = nd\,,$$

$$AB_2 = b\,, \qquad AD_1 = d\,(n - m)\,.$$

Ces expressions montrent l'égalité des produits $AB' \,.\, AD''$ et $AB_2 \,.\, AD_1$. Le produit précédent conduit à un segment que nous appellerons l'aire $S$ du parallélogramme $ABCD$, relative au système de coordonnées choisi.

L'expression précédente de l'aire du parallélogramme $ABCD$ peut être mise sous la forme du déterminant

$$S = \begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_D & y_D \end{vmatrix}.$$

L'aire du parallélogramme dont trois sommets $A$, $B$ et $D$ ont les coordonnées $x_A$, $y_A$, ..., $y_D$ est le déterminant

$$S = \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_D & y_D \end{vmatrix}.$$

Nous avons obtenu ainsi l'essentiel de la théorie des aires des parallélogrammes; on passe à celle des triangles par découpage du parallélogramme par une diagonale; la translation d'un sommet, parallèlement au côté opposé conserve l'aire. La théorie

des aires des polygones est obtenue par décomposition en triangles. On obtient enfin le théorème suivant: *Si deux polygones sont équicomplémentaires, ils ont même aire.*

Hilbert a montré que la démonstration de la réciproque exige un axiome de continuité [1].

## 3. Conclusion

En géométrie élémentaire, l'aire d'un carré de côté unité est choisie comme unité; ce carré peut être déplacé arbitrairement. Ce choix conduit à la rectangularité du système de coordonnées; les aires sont indépendantes lors d'une rotation ou d'une translation de ce système.

En géométrie pascalienne, seule la translation des axes a un sens. Cependant, la forme analytique de la théorie est la même qu'en géométrie élémentaire; ainsi, cette forme est indépendante des axiomes de congruence.

Le second axiome de parallélisme (le théorème de Pascal selon Hilbert) suffit donc pour l'élaboration de la théorie des aires des polygones; en cette matière, il permet d'éliminer tout axiome de continuité.

L'extension aux volumes des polyèdres et aux hypervolumes des polytopes ne présente pas de difficultés. On peut la construire au moyen de la théorie des déterminants.

Manuscrit reçu le 21 octobre 1965.

## P. ROSSIER. — Points cylindriques et paraboliques d'une surface.

Un point d'une surface où le paraboloïde osculateur d'axe normal à celle-ci est un cylindre est indifféremment dit cylindrique ou parabolique.

Nous réservons le nom de points paraboliques aux précédents et distinguons comme suit les points cylindriques.

Soit $A$ un point d'une surface $\sigma$. Supposons l'existence du plan tangent en $A$. En général, au moins dans un voisinage approprié, ce plan n'est tangent à la surface qu'en $A$. S'il existe un arc de courbe de la surface tel que le plan tangent en $A$ est tangent à celle-ci en tous les points de cet arc, nous dirons que les points de cet arc sont des *points cylindriques* de la surface. Les points d'une génératrice d'une surface développable, ceux des parallèles limites des tores sont cylindriques.

Il existe des points cylindriques non paraboliques. En voici un exemple. Soit la courbe d'équation

$$y = x^2 \left( a + \int_0^x f(x)\, dx \right),$$

[1] Voir note [2].