Axiome de Pasch et géométrie projective

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **18 (1965)**

Heft 1

PDF erstellt am: **29.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-739176

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Séance du 17 décembre 1964

Paul ROSSIER. — Axiome de Pasch et géométrie projective.

L'axiome de Pasch de la géométrie élémentaire pose que toute droite qui coupe hors des sommets un côté d'un triangle en coupe deux et seulement deux. Cet axiome permet la démonstration de nombreux théorèmes.

D'autre part, dans le plan, toute la géométrie élémentaire peut être considérée comme une partie de la géométrie projective à condition, entre autres, d'attribuer un rôle privilégié à une droite particulière, la droite impropre. La géométrie projective ignore la notion de triangle de la géométrie élémentaire car cette notion dépend de la droite impropre. Il ne saurait exister d'axiome de Pasch en géométrie projective. Cette proposition doit être un théorème de géométrie projective.

Pour le démontrer, rappelons le lemme suivant. La composition de deux homologies homoaxiales conduit à une homologie dont le centre est aligné sur ceux des homologies données et dont la constante est le produit de celles des deux premières. La première partie de ce lemme est classique. Voici la démonstration de la seconde.

Soient H_1 et H_2 les centres des homologies composantes, A un point quelconque, A' son transformé dans la première homologie, A'' le transformé de A' dans la seconde. Le centre H_3 de l'homologie résultante est l'intersection de $H_1\ H_2$ avec la droite AA''. A partir de l'intersection A_3 de la droite AA'' avec l'axe, projetons A' sur la droite $H_1\ H_2$ en $\bar{A}$ et appelons A_0 l'intersection de l'axe avec $H_1\ H_2$. La constante de la première homologie est égale au birapport $(H_1\ A_0\ H_3\ \bar{A})$ et celle de la seconde à $(\mathrm{H}_2\ A_0\ \bar{A}H_3)$. Explicitons ces expressions; après simplification, leur produit devient égal à $(H_1\ H_2\ H_3\ \bar{A})$. A partir de A', projetons ces quatre points sur la droite AA''. Le dernier birapport est égal à $(AA''\ H_3\ A_3)$. Cette dernière expression est la constante de l'homologie résultante.

Dans le plan projectif, choisissons une droite dite exceptionnelle. Soient trois points non alignés A, B et C. Appelons triangle l'ensemble des trois segments projectifs AB,C BC et A qui n'ont aucun point commun avec la droite exceptionnelle. Un triangle est déterminé univoquement par ses trois sommets. Les sommets et la droite exceptionnelle ne sont jamais incidents.

Appelons A_1, B_1 et C_1 les intersections de la droite exceptionnelle avec les droites BC, CA et AB. Coupons la figure par une sécante s et soient A', B' et C' ses intersections avec les droites précédentes.

Considérons les trois homologies ayant pour axe commun la droite exceptionnelle, pour centres successifs A', B' et C' et qui transforment la première B en C,

la seconde C en A et la troisième A et B. Cet ensemble d'homologies homoaxiales se réduit à une homologie dont le centre appartient à la droite s. B en est un point uni. Or ce point n'appartient ni à l'axe, ni à s. L'homologie résultante est donc une identité. Sa constante est $+ 1$. Les constantes des homologies composantes sont $(A' A_1 BC)$, $(B' B_1 CA)$ et $(C' C_1 AB)$. Leur produit est $+ 1$. C'est là l'expression projective du théorème de Ménélaüs.

Si un point tel que A' est séparé de A_1 par B et C, le birapport correspondant est négatif; il est positif dans le cas contraire. Le signe $+$ du produit des birapports exige que A et A', B et B', C et C' ne soient pas séparés par B et C. Cet A, A et B ou que que deux de ces paires le soient si une l'est.

L'énoncé précédent est celui de l'axiome de Pasch relatif au triangle ABC, la droite impropre du plan euclidien étant choisie comme droite exceptionnelle.

Le corrélatif du théorème de Ménélaüs est le suivant. Dans le plan du triangle ABC, joignons aux sommets deux points M et I; le produit des birapports $A\ (BCHI)$, $B\ (CAMI)$ et $C\ (ABMI)$ des droites issues des sommets et passant par ces points, par M et par I est égal à $+ 1$. Il ne semble pas conduire à des propositions d'usage courant en géométrie élémentaire.

Le théorème projectif de Ménélaüs conduit à celui de Ceva. Appelons A'', B'' et C'' les intersections des côtés BC, CA et AB du triangle avec trois droites concourantes passant par les sommets MA, MB et MC et K l'intersection de MA avec la droite exceptionnelle. Les triangles ABA_1 et ACA_1 sont coupés par les transversales CM et BM. Appliquons-leur le théorème de Ménélaüs. Il vient

$$(ABC'' C_1) \,.\, (BA'' CA_1) \,.\, (A'' AMK) = 1 \text{ et}$$

$$(A'' CBA_1) \,.\, (CAB'' B_1) \,.\, (AA'' MK) = 1 \,.$$

Les troisièmes facteurs sont inverses l'un de l'autre. Les deux birapports qui contiennent A'' et A_1 peuvent être exprimés en fonction de $(BCA'' A_1)$:

$$(BA'' CA_1) = 1 - (BCA'' A_1)$$

$$(A_1 CBA'') = \frac{(BCA'' A_1)}{(BCA'' A_1) - 1} \,.$$

La substitution de ces expressions dans le produit des deux premières équations conduit à l'expression projective du théorème de Ceva:

$$(ABC'' C_1)\,(BCA'' A_1)\,(CAB'' B_1) = -1 \,.$$

Le produit des birapports des sommets d'un triangle, des intersections des côtés avec une droite et avec trois droites concourantes et passant par les sommets opposés est égal à -1.

Le théorème corrélatif est le suivant. Si on joint chaque sommet d'un triangle à un point fixe et aux intersections du côté opposé avec une droite fixe, le produit des birapports des trois quaternes de droites ainsi construites est — 1.

Dans le plan euclidien, le théorème projectif de Ceva conduit au suivant analogue à l'axiome de Pasch: un point du plan d'un triangle n'appartenant à aucun côté est intérieur au triangle ou intérieur à un angle du triangle et aux suppléments des deux autres. Cette proposition est facile à démontrer en se basant sur les axiomes linéaires de l'ordre euclidien. Au contraire, l'axiome de Pasch est indépendant de ces axiomes.

L'étude projective de la proposition de Pasch que nous venons de faire exige le recours a la continuité alors que les propositions euclidiennes sur l'ordre peuvent être établies sans emploi de la continuité.

D'autre part, la continuité dont nous avons fait usage est exprimée par un axiome approprié de géométrie projective. Celui-ci permet de démontrer l'axiome d'Archimède, généralement admis comme tel en géométrie élémentaire. Ce dernier axiome donne-t-il une base suffisante pour établir la proposition de Pasch ? Nous ne savons pas. En tous cas, la dite proposition est un théorème si l'on admet l'ordre projectif (qui implique l'ordre euclidien) et l'axiome projectif de continuité. Cette relation explique peut-être l'insuccès de toute construction d'une géométrie « continue » et « non paschienne ».

M. MENKÈS. — Réactions d'allergie dans la tuberculose humaine.

M. MENKÈS. — Réactions cutanées de type immédiat provoquées, dans la tuberculose humaine, par le polysaccharide III extrait des mycobactéries.

Un article sur ces sujets paraîtra dans le fasc. 3, vol. 18, 1965 des *Archives des Sciences.*

Ersen COGULU. — Remarques sur les schistes à glaucophane et lawsonite de la région de Mihaliççik (Turquie).

Résumé.

En association avec les ultrabasites, des roches du faciès schistes à glaucophane, des schistes verts, des amphibolites et des éclogites sont des principaux constituants du massif de Mihaliççik. Les amphibolites et les éclogites sont des inclusions tectoniques apportées par la montée des serpentines ; tandis que les roches du faciès schistes à