Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 1 (1919)

Artikel: Sur une nouvelle interprétation de la stéréométrie riemannienne
Autor: Cailler, C.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742157

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR UNE NOUVELLE INTERPRÉTATION

DE LA

STÉRÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE

PAR

C. CAILLER

(Avec 11 fig.).

---

§ 1. — Dans un article paru l'an dernier à cette place[1] j'ai démontré comment la Stéréométrie riemannienne se confond substantiellement avec la Cinématique des figures solides sphériques mobiles sur leur propre sphère, ou encore — ce qui revient au même — avec la Géométrie des flèches sur la sphère.

La correspondance dont il s'agit exprime naturellement une réalité indépendante de toute considération d'ordre méthodologique. Mais un fait est d'autant mieux connu qu'on sait le contempler sous des aspects plus divers.

C'est ce qui m'engage à revenir sur le sujet. Je vais l'exposer une fois encore, sous une forme synthétique, bien différente de celle que j'avais adoptée naguère. Le nouveau mode d'exposition, tout abstrait qu'il est, me paraît réaliser un progrès marqué au point de vue de la simplicité. On entre dans le sujet de plein pied, et pour me suivre il suffira de connaître les premiers éléments de la Géométrie de la sphère.

Développer tous les détails de la théorie, équivaudrait à

[1] Sur une interprétation de la Géométrie de Riemann à 3 dimensions, etc. *Archives*. Septembre 1918, pp. 119-150.

refaire la Géométrie de Riemann dans sa totalité : je ne pouvais y songer. Les pages qui suivent ne contiennent ainsi que les traits qui m'ont paru les plus caractéristiques ; le lecteur comblera aisément, me semble-t-il, les lacunes plus ou moins voulues que j'ai laissées sur mon chemin.

I. — Nomenclature. Préliminaires.

§ 2. — Suivant l'usage, j'appelle *figures congruentes,* ou *superposables,* des figures qu'un *mouvement* ou *déplacement* ordinaire peut appliquer l'une sur l'autre en faisant coïncider tous leurs points deux à deux.

Les diverses figures F, F′, ... G, G′, ... dont il sera question plus bas feront toujours partie de la surface d'une sphère fixe ; le rayon de cette sphère est indéterminé et l'on peut, si on veut, le prendre pour unité.

On sait que si deux semblables figures sphériques, F et F′, sont congruentes, le mouvement qui transporte la première sur la seconde peut toujours se remplacer par une rotation dont l'axe passe au centre de la sphère. Cet axe recoupe la sphère en deux points, diamétralement opposés, qui sont les *centres,* ou *pôles,* de la rotation ; il suffit d'en considérer un seul. Dans le cas que nous envisageons, les trois locutions, *mouvement, déplacement, rotation* (autour d'un axe ou d'un centre) sont synonymes, et se remplacent mutuellement.

Deux arcs homologues $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$, égaux entre eux[1] étant choisis à volonté, la correspondance des deux figures congruentes est complètement déterminée : l'homologue c', d'un point c, appartenant à la première, s'obtiendra en construisant le triangle $c'a'b'$ égal au triangle cab, ce qui n'est possible que d'une manière. Le point c' est toujours du même côté de l'arc $a'b'$ que son correspondant l'est de l'arc ab ; tous deux sont à gauche, ou tous deux à droite.

[1] Les points homologues sont désignés ici par les mêmes lettres accentuées.

L'arc $\overline{ab}$ qui unit les deux points est inférieur à deux angles droits. Dans les figures, nous traçons les arcs de grand cercle comme des droites.

Il suit de là qu'une figure donnée possède ∞^3 figures congruentes. La chose est évidente par ailleurs ; car le centre de la rotation qui amène les deux figures l'une sur l'autre peut recevoir ∞^2 positions sur la sphère, tandis que l'amplitude de cette même rotation est susceptible de ∞^1 valeurs.

Si cette amplitude est égale à 180°, les deux figures sphériques, congruentes entre elles, sont symétriques par rapport à un point de la sphère, et la réciproque est vraie. Nous disons dans ce cas que les figures sont *conjuguées,* ou, pour employer un terme plus expressif, qu'elles sont *opposites.* Une figure possède évidemment ∞^2 figures conjuguées (ou opposites)[1].

§ 3. — La figure G, formée de tous les points diamétralement opposés à ceux qui constituent une figure F, est l'*antipode* de cette dernière : la définition est évidemment symétrique relativement aux deux figures antipodes. Il est clair que deux figures antipodes ne sont pas superposables, bien que les dimensions des parties homologues soient égales entre elles.

Il est clair aussi que les grands cercles homologues dans les deux figures antipodes sont toujours confondus et les points homologues toujours distincts.

Deux figures F et G sont dites *contraires* l'une de l'autre quand la première est superposable à l'antipode de la seconde ; ici encore il y a réciprocité, et si F est contraire à G, G sera aussi contraire à F.

Un *retournement* est l'opération par laquelle une figure F se transforme en l'une de ses contraires. Un retournement particulier est défini complètement au moyen de deux segments égaux $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$ choisis à volonté dans les deux figures contraires. Le correspondant c', d'un point c appartenant à F, s'obtiendra en construisant le triangle $a'b'c'$, *symétrique* du triangle abc ; si c est à gauche de $\overline{ab}$, son homologue c' sera à droite de $\overline{a'b'}$.

Il suit de là que le nombre des retournements possibles ou, si on veut, que le nombre des contraires d'une figure donnée, monte à ∞^3.

[1] Le symbole quaternion d'un mouvement est $p.\,\bar{p}$. Si le mouvement équivaut à une symétrie relative à un centre le quaternion p dégénère en un simple vecteur.

§ 4. — Deux figures contraires F et G sont susceptibles de trois dispositions possibles.

1° F et G peuvent d'abord être *antipodes*; nous savons que dans ce cas, qui à beaucoup d'égards doit être regardé comme singulier, tous les points homologues sont différents et tous les grands cercles homologues identiques.

2° F et G peuvent être symétriques par rapport à un certain arc de grand cercle, ou *équateur* E. Nous dirons dans ce cas que F et G sont des figures *réflexes*.

Il est clair que, pour les figures réflexes, l'équateur est le seul grand cercle invariant. Non seulement il se correspond à lui-même dans le passage de F à G, mais en outre tous ses points restent immobiles, c'est-à-dire qu'ils sont à eux-mêmes leurs propres homologues.

3° Toutes les figures réflexes d'une figure F ne forment qu'une bisérie ∞^2; deux figures *contraires* quelconques, F et G, ne sont donc pas réflexes en général.

Prenons au hasard deux figures contraires : on démontre aisément qu'il existe encore un *équateur* E doué des propriétés suivantes.

Considéré dans sa totalité, l'équateur est invariant, il est son propre correspondant. Seulement ses différents points ne sont pas immobiles. Le retournement qui transforme F en G peut s'effectuer en deux temps. Une *réflexion* sur E changera d'abord F en une de ses réflexes G′. Un glissement convenable le long de E amènera ensuite G′ en G. Sans que le résultat soit changé les deux opérations composantes peuvent d'ailleurs s'exécuter dans l'ordre inverse ; elles sont permutables.

On constate immédiatement d'après cela que, dans le cas général d'un retournement quelconque, tous les points sans exception sont différents de leurs homologues. Quant aux grands cercles, seul parmi eux, l'équateur possède la propriété d'invariance.

Si donc on sait de deux figures contraires qu'elles ont un point commun, on peut affirmer sans autre que ces figures sont réflexes ; cette remarque est essentielle.

Par exemple, soient F, F′ deux figures congruentes, a leur

point homologue commun, ou le centre de la rotation qui amène F sur F′. Prenons la réflexe G′ de la seconde figure par rapport à un grand cercle quelconque passant en a. Les deux figures F et G′ sont contraires, mais comme en outre elles possèdent un homologue commun, à savoir le point a, elles sont réflexes l'une de l'autre relativement à un certain méridien issu de a.

Prenons encore deux figures réflexes F et G, puis faisons les tourner toutes deux, indépendamment l'une de l'autre, autour d'un point quelconque a appartenant à leur équateur. Pendant leur mouvement elles engendrent chacune une *couronne*; si on prend à volonté une figure F′ dans la première de ces couronnes et une figure G′ dans la seconde, F′ et G′ seront toujours réflexes; car ces figures sont contraires et possèdent un homologue commun, le point a.

Soient F′ une figure quelconque et G′ son antipode; déplaçons F′ de 180° le long d'un certain équateur E, la transformant ainsi en une figure opposite F″. Le mouvement (F′, F″) et le retournement (F′, G′) changent tous les deux un point a de l'équateur en un point qui lui est diamétralement opposé a'. Ainsi donc, les figures contraires F″ et G′ sont réflexes relativement au grand cercle E.

Autrement dit les diverses figures F″, qui sont conjuguées de la figure F′, sont en même temps les figures réflexes de la figure G′, elle-même antipode de F′. La réciproque est également vraie.

Considérons en dernier lieu deux figures congruentes F et F′; supposons qu'il existe deux points homologues, a dans F et a' dans F′, qui soient antipodes l'un de l'autre. Je dis que ces figures sont opposites.

En effet F′ a le point a' commun avec l'antipode G de la figure F; de la sorte F′ est réflexe de G, il est donc, en vertu de la propriété précédente, opposite de F.

Il est clair que dans le cas en question, il y a dans F, outre le point a, uue série d'autres points jouissant de la propriété d'être diamétralement opposés à leurs homologues; ces points forment l'équateur commun à F′ et G.

Il importe en terminant ces préliminaires de remarquer les

propriétés suivantes qui sont presque évidentes et interviennent à chaque instant.

Deux figures *congruentes, opposites, contraires, réflexes, antipodes,* conservent leur relation particulière quand l'on soumet l'une et l'autre au même mouvement ou au même retournement.

La composition de deux mouvements, ou celle de deux retournements, redonne un mouvement.

Au contraire la composition d'un mouvement avec un retournement engendre un retournement.

L'analyse à laquelle il a été procédé plus haut nous a montré que tout retournement se décompose en un glissement et une réflexion le long du même équateur : c'est un cas particulier de la dernière propriété mentionnée à l'instant.

II. — Les trois objets de la Géométrie sphérique.

§ 5. Dans la Sphérique ordinaire, l'élément primitif est le point, et avec lui son élément polaire, l'arc de grand cercle ou géodésique de la Sphère. Tous deux, sans disparaître absolument, vont passer à l'arrière-plan : de nouveaux objets sont destinés à un rôle beaucoup plus essentiel et vont servir de matériaux pour la construction d'une Géométrie sphérique à trois dimensions.

Afin d'éviter de surcharger notre terminologie de néologismes plus ou moins mal formés, nous ne désignerons pas les nouveaux éléments par des noms communs mais simplement par les initiales p, ϖ et δ. Qu'il suffise de noter dès maintenant qu'un p correspond au *point*, un ϖ au *plan*, une δ à la *droite* de l'espace riemannien à trois dimensions[1] ; cette assimilation se justifiera d'autant mieux que nous étudierons plus à fond les propriétés mutuelles des trois éléments fondamentaux p, ϖ et δ.

La Sphérique à trois dimensions que nous allons développer a beau imiter la Stéréométrie riemanienne et en fournir une

[1] En cas de besoin on peut employer les termes *pseudopoint*, *pseudoplan* et *pseudodroite* au lieu de p, ϖ, ou δ. Les locutions *point, plan* et *droite riemanniens* s'offrent aussi d'elles-mêmes.

représentation adéquate, elle n'en est pas moins dépourvue de tout caractère transcendant; elle appartient tout entière à la Géométrie euclidienne ordinaire.

Les éléments fondamentaux p, ϖ et δ possèdent plusieurs définitions différentes, selon qu'on les considère comme des êtres indépendants et indécomposables, ou que, au contraire, on fait de chacun d'eux un ensemble d'éléments appartenant à l'une ou l'autre des deux autres catégories.

Sous ce dernier aspect, ce sont des *couronnes* ou des *couronoïdes;* mais, dans ce chapitre, nous n'avons à faire qu'aux définitions autonomes des p, ϖ et δ, qui les constituent chacun en une espèce distincte.

1° Un p est l'équivalent d'un mouvement de la sphère; c'est donc l'opération qui fait correspondre deux figures congruentes F et F′, qui associe, d'une manière déterminée, un point a' à un point a arbitrairement choisi sur la sphère, de telle sorte que la figure formée par les a' soit superposable à la figure formée par les a correspondants. Quand les figures superposables F et F′ sont données, p l'est aussi; nous écrivons, pour indiquer ceci, $p = (\mathrm{F}, \mathrm{F}')$.

L'ensemble de tous les p forme une trisérie, car il y a ∞^3 déplacements possibles. On peut dire encore que la multiplicité des p est à 3 dimensions. Cette multiplicité est d'ailleurs continue. Car si on prend deux de ses éléments

$$p' = (\mathrm{F}, \mathrm{F}') \quad \text{et} \quad p'' = (\mathrm{F}, \mathrm{F}''),$$

il est clair qu'on peut intercaler entre F′ et F″ une série continue de figures $\mathrm{F}^{(n)}$ toutes superposables à F. Chacune des opérations $p^{(n)} = (\mathrm{F}, \mathrm{F}^{(n)})$ diffère infiniment peu de la précédente et de la suivante : et l'on vient de réunir les deux éléments donnés par une courbe continue d'éléments p.

2° L'élément analogue au plan de l'espace riemannien sera dénoté par le symbole ϖ.

Un ϖ désigne l'opération bien définie qui fait correspondre à une figure F de la sphère l'une de ses contraires G; c'est donc l'équivalent d'un retournement. Une figure F admet ∞^3 figures contraires G, il existe donc une trisérie d'éléments $\varpi = (\mathrm{F}, \mathrm{G})$,

tous distincts les uns des autres. Parmi ceux-ci on peut remarquer, à cause de son caractère singulier, le ϖ qui associe à la figure F son antipode G.

Il est d'ailleurs évident que l'espace qui est continu quand on le considère comme lieu des p est encore continu quand on le considère comme lieu des ϖ.

3° Le troisième objet de notre Géométrie s'appellera une δ; c'est lui qui fait pendant à la droite de la Géométrie ordinaire.

Une δ, c'est un couple de 2 points pris sur la sphère, comme m et m' (fig. 1). Le premier de ces points fait fonction d'*origine,* le second d'*extrémité* de la δ. L'ordre de ces points est donc un élément fondamental dans la définition d'une δ particulière, et la $\delta = (m, m')$ est complètement différente de $\delta' = (m', m)$[1]. Il est clair par là que la sphère contient ∞^4 objets δ, différents entre eux, c'est-à-dire autant qu'il y a de droites dans l'espace ordinaire.

Deux δ telles que (m, m') et (n, n') dont les extrémités correspondantes sont antipodes l'une de l'autre (fig. 1) sont regardées comme une seule et même δ, décrite tantôt dans un certain *sens,* tantôt dans le *sens opposé.*

III. — Eléments polaires. Eléments conjugués. Eléments conjoints.

§ 6. — Nous savons qu'un p fait correspondre à une figure F, choisie à volonté, une nouvelle figure F′ congruente de la première, et que, de même, un ϖ déterminé associe à la même F une troisième figure G′ contraire à F.

1° Cela posé, si F′ et G′, qui sont contraires, sont en outre antipodes l'une de l'autre, nous dirons que p est le *pôle* de ϖ, lequel à son tour est le *pôle* de p; dans ces conditions, p et ϖ sont des éléments *polaires* (ou *antipodes*).

De la sorte, tout p possède un pôle ϖ, et tout ϖ un pôle p, l'un et l'autre parfaitement déterminés.

[1] La relation entre δ et δ' n'est pas invariante par mouvement. Voir p. 400. Une δ dont les deux extrémités coïncident n'a pas non plus un caractère invariant; ce cas particulier ne mérite donc pas d'attirer l'attention.

2° Soient deux p déterminés, comme $p' = (F, F')$ et $p'' = (F, F'')$. Lorsque les figures F′ et F″, qui sont toujours superposables, sont opposites (conjuguées), c'est-à-dire ponctuellement symétriques, nous dirons que p' et p'' sont *conjugués* entre eux.

Il est clair que la figure F′ admet ∞^2 conjuguées F″. D'autre part F peut prendre ∞^3 positions, d'où au total ∞^5 systèmes p', p'' d'éléments p conjugués entre eux. Ce nombre se réduit à ∞^2 quand l'un des éléments du couple est donné.

Prenons de même deux ϖ particuliers, $\varpi' = (F, G')$ et $\varpi'' = (F, G'')$; ils seront *conjugués* si les figures congruentes G′ et G″ le sont elles-mêmes. Il y a ainsi ∞^5 systèmes (ϖ', ϖ'') de ϖ conjugués entre eux parmi lesquels ∞^2 éléments ϖ'' conjugués à un certain ϖ' donné a priori.

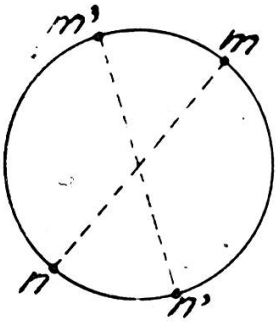

Fig. 1.

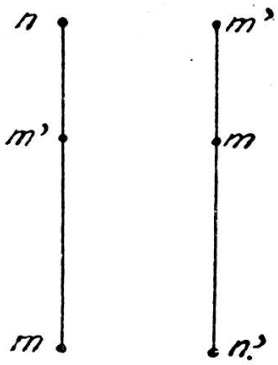

Fig. 2.

Dans la figure
$\overline{mn} = 180°$ et $\overline{m'n'} = 180°$.

La notion de conjugaison s'étend aussi aux objets δ, voici comment.

Deux δ comme (m, m') et (n, m'), ou (m, m') et (m, n') (fig. 2) qui possèdent une extrémité commune tandis que les deux autres extrémités sont diamétralement opposées, s'appellent δ *conjuguées* entre elles.

Cette notion est donc indépendante du sens de description des δ ainsi associées; et toute δ possède une et une seule conjuguée.

3° La notion générale de *conjonction* correspond à celle de *rencontre,* ou d'*intersection* dans la Géométrie ordinaire. De même que cette dernière elle présente un assez grand nombre de cas particuliers.

Soient comme ci-dessus $p = (F, F')$ et $\varpi = (F, G')$ deux éléments p et ϖ bien déterminés.

Lorsque les figures F′ et G′, qui sont contraires, deviennent réflexes, les deux éléments p et ϖ se trouvent dans la situation de *conjonction*. On dira encore, à propos des éléments conjoints, que ϖ contient p, passe par p, que p est situé dans ϖ, ou toute autre locution équivalente.

Une figure F′ admet autant de figures réflexes qu'on peut tirer d'équateurs sur la sphère, c'est-à-dire ∞^2. C'est le nombre des ϖ qui sont conjoints à un p donné, ou des p qui sont conjoints à un ϖ donné; quant au système total des éléments conjoints (p, ϖ), il monte évidemment au chiffre de ∞^5.

§ 7. — La notion de conjonction appliquée aux éléments δ présente une assez grande variété; en effet deux δ peuvent être conjointes entre elles, et une δ peut aussi être conjointe avec un p ou avec un ϖ. Nous devons examiner ces divers cas.

Tout d'abord, deux δ particulières telles que $\delta_1 = (c_1, c_1')$ et $\delta_2 = (c_2, c_2')$ sont dites *conjointes* (se coupent, se rencontrent, concourent, etc....), si on a l'égalité (fig. 3)

$$\overline{c_1 c_2} = \overline{c_1' c_2'}.$$

On remarquera que si on intervertit le sens d'une des δ, ou de chacune, ces δ ne cesseront pas de se rencontrer.

En effet, si le renversement a converti la $\delta_1 = (c_1, c_1')$ en (γ, γ'), nous avons

$$\overline{\gamma c_2} = 180^\circ - \overline{c_1 c_2}, \qquad \overline{\gamma' c_2'} = 180^\circ - \overline{c_1' c_2'},$$

si donc la condition de rencontre $\overline{c_1 c_2} = \overline{c_1' c_2'}$ est satisfaite avant le renversement, elle l'est aussi après, car on a encore $\overline{\gamma c_2} = \overline{\gamma' c_2'}$.

Un cas particulier de la rencontre de deux δ mérite d'être signalé dès maintenant.

Supposons $\overline{c_1 c_2} = \overline{c_1' c_2'} = 90^\circ$; en employant les mêmes notations que tout à l'heure, nous avons donc aussi $\overline{\gamma c_2} = \overline{\gamma' c_2'} = 90^\circ$.

La δ_2 qui est conjuguée à $\delta_1 = (c_1, c_1')$ est (γ, c_1') ou (c_1, γ') suivant le sens de sa description; dans le cas qui nous occupe, δ_2

rencontre non seulemement δ_1, mais encore la conjuguée de cette dernière. Et il y a réciprocité.

Deux pareilles δ dont chacune rencontre l'autre ainsi que la conjuguée de celle-ci s'appellent *perpendiculaires*. La condition de perpendicularité est donc que les extrémités correspondantes des deux δ se trouvent à la distance d'un quadrant; elle est, comme il est facile de s'assurer, non seulement suffisante, mais aussi nécessaire.

Nous dirons souvent que deux points a et a' *se correspondent selon un certain* p, *ou un certain* ϖ, pour exprimer que a' est l'homologue de a après qu'on a effectué, soit l'opération p, soit l'opération ϖ.

Lorsque l'extrémité c' d'une $\delta = (c, c')$ correspond ainsi à l'origine c de la même δ, selon p, ou selon ϖ, δ est dit *conjoint avec l'élément* p, *ou avec l'élément* ϖ (appartient à p ou ϖ, les contient, y est contenu, etc...).

Il est clair que les opérations p et ϖ transforment deux points diamétralement opposés en deux nouveaux points qui sont encore diamétralement opposés. Donc si p ou ϖ contiennent une certaine δ, ils contiendront aussi la même δ décrite dans le sens contraire du sens primitif.

Voici encore quelques remarques évidentes.

Toutes les δ qui passent par un certain p sont concourantes deux à deux, il en va de même pour les δ qui font partie d'un certain ϖ déterminé. Car, dans l'un et l'autre cas, les origines et les extrémités de deux de ces δ sont équidistantes.

Etant donné un certain p il existe ∞^2 objets δ qui appartiennent à ce p. Car si $\delta = (a, a')$ doit faire partie de p, l'origine a a peut être été choisie à volonté sur la sphère; il faut et il suffit que l'extrémité a' corresponde à a selon p.

De même un ϖ donné renferme une bisérie d'objets δ qui appartiennent à ce ϖ.

Réciproquement, étant données deux δ concourantes, il existe un et un seul p qui les contient chacune, et de même, il existe un et un seul ϖ passant par l'une et l'autre[1].

[1] Il est clair que deux δ non-concourantes n'appartiennent jamais au même p, ni au même ϖ.

En effet, si $\delta' = (a, a')$ et $\delta'' = (b, b')$, la condition de rencontre de ces δ est

$$\overline{ab} = \overline{a'b'}.$$

Et alors, il y a un mouvement p et un retournement ϖ, tous deux bien définis, qui appliquent l'un sur l'autre les couples homologues (a, b) et (a', b').

Nous remettons au chapitre IV la suite des propriétés concernant la conjonction des figures; elles sont presque aussi immédiates que les précédentes.

IV. — Intersections et sujets connexes.

§ 8. — *Théorème.* Une δ déterminée $\delta = (a, a')$ contient ∞^1 éléments p distincts, et aussi ∞^1 éléments ϖ distincts.

En effet pour définir $p = (F, F')$, il faut connaître, dans F', les points a' et b' qui correspondent à deux autres points a et b, choisis dans F à volonté. Obliger p à être conjoint avec δ, c'est se donner un seul des deux couples, à savoir (a, a'). La figure F étant tracée comme on veut, la figure F' pourra tourner d'un angle quelconque autour du point a', homologue à a, tout en restant congruente à F.

A chacune de ces ∞^1 positions correspond un p placé sur δ. Supposons que F' se déplace d'une manière continue autour de a', le p correspondant variera lui aussi d'une manière continue; au bout d'un tour entier effectué par la figure F' le p primitif sera revenu à sa position initiale en progressant toujours dans le même sens. Ainsi, dans la Géométrie riemannienne, quand un point décrit une droite sans jamais revenir en arrière, il finit par se retrouver à son point de départ.

Les mêmes propriétés persistent pour les ϖ passant par la δ donnée; il suffit, pour la démonstration, de substituer à la figure F' une figure G' contraire de F.

Théorème. Deux éléments p et ϖ, conduits selon la même $\delta = (a, a')$ sont toujours dans la situation de conjonction.

En effet, selon l'opérateur p une figure F se transformera en une figure congruente F'; selon ϖ, F se changera en une figure contraire G'. Mais p et ϖ contenant tous les deux la $\delta = (a, a')$,

l'homologue de a est a', tant par rapport à l'opérateur p qu'à l'opérateur ϖ. Et ainsi les deux figures contraires F′ et G′ ayant un point homologue commun, à savoir a', seront réflexes; c'est justement la condition pour la rencontre de p et ϖ.

Théorème. Deux p distincts étant donnés, comme p' et p'', il existe une δ, et une seule, appartenant à l'un et l'autre p. C'est la δ *joignant* p' à p''.

En effet, $p' = (F, F')$ et $p'' = (F, F'')$ transforment la figure F en deux nouvelles figures F′ et F″ congruentes à F, par suite superposables. Il existe donc entre F′ et F″ deux points homologues communs, a' et $-a'$, lesquels sont diamétralement

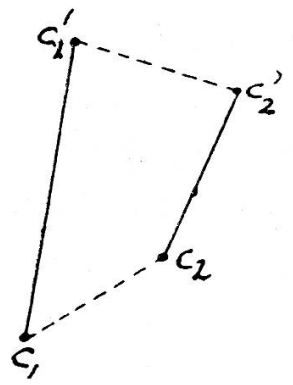

Fig. 3.

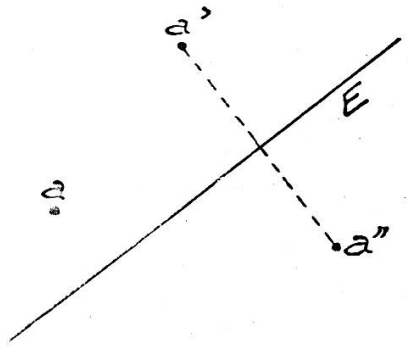

Fig. 4.

opposés. Soit a l'homologue de a' dans la figure F, la δ cherchée, commune à p' et p'', est $\delta = (a, a')$. Il n'y en a pas d'autre[1].

Théorème. Deux éléments ϖ, différents entre eux, tels que $\varpi' = (F, G')$ et $\varpi'' = (F, G'')$ possèdent toujours une et une seule δ commune. C'est l'*intersection* de ϖ' et ϖ''.

La preuve est exactement la même que celle du théorème précédent; elle s'en déduit en substituant aux figures F′ et F″ les figures G′ et G″, contraires à F, et congruentes l'une par rapport à l'autre.

§ 9. — *Le faisceau de* δ. Un p et un ϖ quelconques ne possèdent habituellement aucune δ commune. Mais s'il existe une

[1] La $\delta = (-a, -a')$ n'est pas une nouvelle solution; elle redonne la même pseudodroite décrite en sens contraire.

δ qui soit en conjonction tant avec un certain p donné qu'avec un certain ϖ également donné, il existera alors une infinité de δ conjointes à p et à ϖ simultanément. La monosérie que forment ces δ est un *faisceau*.

Faisons comme toujours $p = (F, F')$ et $\varpi = (F, G')$. Si $\delta = (a, a')$ est une pseudodroite commune à p et ϖ, les transformées F' et G', obtenues respectivement selon p et selon ϖ, auront le point homologue commun a'. Les figures F' et G' sont donc réflexes et possèdent une série de points communs[1]. Ceux-ci sont disposés selon un certain arc de grand cercle E', dont le correspondant, dans F, est un autre grand cercle E.

L'ensemble des δ communes à p et ϖ, $\delta = (b, b')$, s'obtiendra en associant les divers points b du cercle E à leurs correspondants sur le cercle E' et la correspondance est telle qu'on ait toujours $\overline{ab} = \overline{a'b'}$. Il est clair que ces deux arcs sont homologues aussi bien selon le mouvement p que selon le retournement ϖ : c'est en ceci que consiste essentiellement la propriété du faisceau.

Théorème. Par trois p déterminés, à savoir $p_1 = (F, F_1)$, $p_2 = (F, F_2)$, $p_3 = (F, F_3)$, passe un ϖ, et un seul, $\varpi = (F, G)$. De même trois ϖ déterminés, à savoir $\varpi_1 = (F, G_1)$, $\varpi_2 = (F, G_2)$, $\varpi_3 = (F, G_3)$, se rencontrent en un p et un seul p.

Le raisonnement est tout pareil pour les deux parties du théorème, et il suffit de prouver la première. C'est l'analogue de la propriété d'après laquelle trois plans se coupent en un point, ou de la propriété corrélative d'après laquelle trois points déterminent un plan et un seul.

Il suffit évidemment pour la démonstration d'établir l'existence d'une figure G, contraire de F, qui soit réflexe des figures F_1, F_2, F_3.

Marquons en a'_3 le centre commun aux figures F_1 et F_2, en a'_1 le centre commun à F_2 et F_3, enfin en a'_2 le centre commun à F_3 et F_1.

Tirons, par exemple, l'arc $a'_3 a'_1$ et soit G la symétrique de la figure F_2 par rapport à cet arc. G est donc réflexe de F_2; mais il

[1] Si F' et G' sont contraires sans être réflexes, p et ϖ n'ont évidemment aucune δ commune.

l'est aussi de F_1 comme ayant le point a'_3 commun avec cette figure. Enfin G est encore réflexe de F_3, puisque le point a'_1 est un homologue commun à l'une et l'autre figure.

La figure G est donc réflexe des trois figures F_1, F_2, F_3. C'est évidemment la seule qui possède cette propriété, à moins que les trois points a'_1, a'_2, a'_3 ne coïncident[1]. Cette circonstance a lieu quand les trois figures F_1, F_2, F_3 font partie d'une même couronne, ou les trois p_1, p_2, p_3 d'une même δ.

Problème. Trouver un ϖ passant par une δ donnée et par un p donné (ou, corrélativement, un p situé sur une δ et dans un ϖ donnés).

Cette question n'est qu'une variante de la précédente. Résolvons-la d'une manière indépendante.

Soient $\delta = (a, a')$ et $p = (F, F')$. Marquons en a'', dans F', l'homologue du point a considéré comme faisant partie de F, et soit E l'arc de grand cercle qui coupe $a'a''$ perpendiculairement en son milieu (fig. 4). Prenons la réflexe G de la figure F' par rapport à l'équateur E : je dis que $\varpi = (F, G)$.

En effet a' est dans G l'homologue du point a'' considéré comme appartenant à F'. Ainsi a' correspond à a selon ϖ, autrement dit ϖ contient la δ donnée, $\delta = (a, a')$. D'autre part G et F' sont réflexes, le $\varpi = (F, G)$ est donc conjoint avec $p = (F, F')$.

La solution est évidemment indéterminée, d'ordre ∞^1, quand δ contient p. Dans ce cas a' coïncide avec a'', l'équateur E est un quelconque des cercles issus du point a'.

Ce qui précède n'est en somme que le décalque de la Géométrie projective ordinaire ; toutes les relations projectives connues entre les points, les plans et les droites se retrouvent telles quelles entre les p, les ϖ et les δ de la Géométrie sphérique.

Et en résumé, nous savons :

1° Construire la δ commune à deux éléments p' et p''.

2° » l'ensemble de tous les p et de tous les ϖ, appartenant à la δ de jonction entre p' et p''.

[1] Deux des trois points ne peuvent coïncider sans que le troisième coïncide également.

3° Construire l'intersection de deux éléments ϖ' et ϖ''.
4° » l'ensemble de tous les p et de tous les ϖ appartenant à l'intersection de ϖ' et ϖ''.
5° » l'élément ϖ passant par trois p donnés.
6° » l'élément p commun à trois ϖ donnés.
7° » l'intersection d'une δ avec un ϖ donné.
8° » le ϖ qui passe par une δ et un p donnés.

V. — Dualité.

§ 10. — Remarquons en premier lieu que des δ qui sont conjuguées, ne sont jamais conjointes. Car si l'on a $\delta' = (m, m')$ et $\delta'' = (m, m'')$, la condition de conjugaison est $\overline{m'm''} = 180°$, celle de rencontre est au contraire $\overline{m'm''} = 0$.

Théorème. Deux p, tels que p' et p'' respectivement choisis à volonté sur deux δ conjuguées sont aussi conjugués entre eux. Et de même, deux ϖ, tels que ϖ' et ϖ'', menés respectivement par deux δ conjuguées sont aussi conjugués.

La démonstration étant toute semblable pour les deux parties du théorème, ne considérons que la première.

Soient $\delta' = (m, m')$ et $\delta'' = (m, m'')$ les deux δ conjuguées; m' et m'' sont donc antipodes. Posons $p' = (F, F')$ et $p'' = (F, F'')$.

Puisque p' appartient à δ' et p'' à δ'', les points m' et m'' sont les correspondants respectifs du même point m. Et ainsi les figures congruentes F′ et F″ possèdent un couple de points homologues qui sont diamétralement opposés. Dans ces conditions F′ et F″ sont opposites, et les éléments p' et p'' sont conjugués.

Voici, si on veut, une nouvelle démonstration du même fait.

Soient d le pôle de l'arc $m'mm''$, d' l'homologue de d selon p'. Puisque p' est conjoint à $\delta' = (m, m')$, on aura (fig. 5)

$$\overline{m'd'} = \overline{md} = \overline{m'd} = 90° .$$

D'où résulte que l'arc dd' rencontrera $m'm''$ à angle droit au milieu entre m' et m''.

Exactement pour le même motif, l'arc dd' contiendra l'homologue d'', selon p'', du point d.

Dès lors si on considère les figures $m'd'$ et $m''d''$ qui correspondent à md, respectivement selon p' et selon p'', on voit qu'il suffit de faire basculer l'une d'elles, autour du milieu de l'arc $d'd''$, d'un angle égal à deux droits, pour l'appliquer sur l'autre. Ce qu'il fallait démontrer.

Théorème. Si un p appartient à une δ, son pôle ϖ appartient à la δ conjuguée à la première. Et de même, si un ϖ passe par

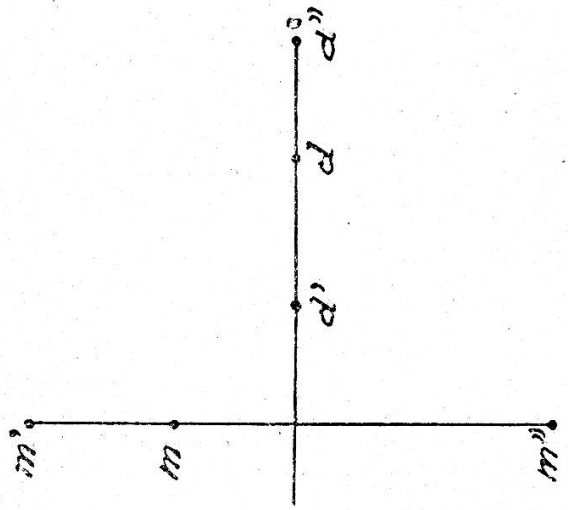

Fig. 5.

une certaine δ, la conjuguée de celle-ci contient le pôle p de ce ϖ.

Car, considérons trois figures, F, F', et G', la seconde congruente à F, la troisième antipode de F'. Soient a, a', a'' trois points homologues de ces figures. Alors l'élément $p = (\mathrm{F}, \mathrm{F}')$ contient la $\delta' = (a, a')$, et l'élément polaire $\varpi = (\mathrm{F}, \mathrm{G}')$ contient la $\delta'' = (a, a'')$, laquelle est effectivement conjuguée à δ', puisque a' et a'' sont antipodes. La réciproque se démontre de la même manière.

Voici des corollaires qui se déduisent immédiatement de là.

1° Si par un p on fait passer toutes les δ possibles, les conjuguées δ' de ces δ appartiennent à un seul et même ϖ, qui est le pôle de p.

2° Si dans un ϖ on mène toutes les δ possibles, leurs conjuguées font partie d'un seul et même p, lequel est le pôle de ϖ.

3° Si on construit les pôles ϖ' et ϖ'' de deux éléments p' et p'', la δ qui unit ϖ' et ϖ'' est conjuguée de celle qui joint p' à p''.

4° Si un p se meut le long d'une certaine δ, son pôle ϖ décrira la δ conjuguée. La propriété corrélative a lieu, en échangeant les lettres p et ϖ.

VI. — Couronnes et Couronoïdes.

§ 11. — Dans tout ce qui précède, nous n'avons guère utilisé que les définitions *indépendantes* des trois objets p, ϖ et δ. Mais il est clair que les propriétés de conjonction et de dualité permettent de considérer chacun comme un ensemble d'éléments appartenant à l'une ou l'autre des deux espèces différentes.

C'est ainsi qu'un p est la réunion de ∞^2 éléments ϖ, ou de ∞^2 éléments δ, que, corrélativement, un ϖ est la réunion de ∞^2 éléments p, ou de ∞^2 éléments δ, et qu'enfin une δ est l'assemblage suivant une certaine loi de ∞^1 éléments p, ou de ∞^1 éléments ϖ. Quelques observations suffisent pour donner une idée claire de ces ensembles qui sont les *couronoïdes* et les *couronnes*. Commençons par le dernier cas.

Considérons deux figures F′ et G′, réflexes l'une de l'autre, dont l'une soit congruente, et l'autre contraire, à une figure F; soient a' un point homologue commun à F′ et G′, et a son homologue dans F. Nous savons[1] qu'en faisant tourner d'angles quelconques les figures F′ et G′ autour du point a', elles restent réflexes dans toutes leurs positions.

On engendre ainsi deux couronnes[2] dont tous les éléments sont réflexes deux à deux, et qui, par suite, peuvent prendre le nom de *couronnes réflexes*.

Pour construire les deux couronnes réflexes, il suffit de connaître, ou bien deux positions de la figure F′, ou bien deux positions de la figure G′ ; dans les deux cas le point a' est défini.

[1] Voir page 373.

[2] Au sens ordinaire du mot.

Considérons la $\delta = (a, a')$, il est clair qu'elle appartient à tous les $p = (F, F')$ et à tous les $\varpi = (F, G')$.

On peut donc se figurer la δ, d'une manière analogue à la droite ordinaire, sous l'aspect d'un ensemble d'éléments p, ou d'éléments ϖ; et cet ensemble est *linéaire* dans ce sens que deux éléments p, tels que p' et p'', ou deux éléments ϖ, tels que ϖ' et ϖ'', définiront la δ, soit dans sa totalité, soit dans chacun des éléments, p ou ϖ, qui la composent : ces derniers sont évidemment tous conjoints deux à deux.

Passons à l'élément ϖ considéré comme une bisérie, ou *couronoïde,* d'éléments p. La définition des couronoïdes peut être présentée de différentes manières, équivalentes au fond, quoique distinctes dans la forme.

Soient F la figure initiale, Φ une figure fixe congruente à F, et G l'antipode de Φ.

1° Prenons toutes les figures F′ opposites de Φ, elles forment une bisérie.

2° La même bisérie de figure F′ s'obtient encore en prenant les réflexes de la figure G.

3° Dans l'ensemble F′, prenons une figure quelconque, telle que F″. Les figures G et F″ sont donc réflexes et présentent un équateur commun sur lequel nous choisirons à volonté un point O. Faisons tourner F″, d'un angle quelconque, autour de O. La figure finale obtenue de la sorte possède avec G un homologue commun, à savoir O; elle est donc réflexe de G. Et ainsi, quand on fait varier le point O sur l'équateur et qu'on change l'angle de la rotation, on engendre une bisérie de figures F′ qui est encore la même que celle définie sous les numéros 1 et 2.

Les ∞^2 éléments $p = (F, F')$ forment le couronoïde. Ils sont tous conjoints avec l'élément $\varpi = (F, G)$, lequel est invariable.

D'autre part tous les p qui appartiennent au couronoïde sont opposites (ou conjugués) à un certain p fixe, à savoir (F, Φ); c'est lui qui est le *pôle* du couronoïde[2].

Les propriétés du couronoïde sont à peu près évidentes d'après

[1] Inutile de traiter le cas corrélatif d'un couronoïde d'éléments ϖ.

[2] Noter que (F, Φ) est aussi le *pôle* de $\varpi = (F, G)$. Voir p. 376.

ce qui précède. Sans revenir sur les démonstrations, je me borne à les énumérer encore une fois :

L'intersection de deux couronoïdes est toujours une couronne.

» de trois » est un p[1].

Par deux p donnés passent une infinité de couronoïdes qui contiennent tous une seule et même couronne.

Par trois p donnés passent un et un seul couronoïde[1].

VII. — Notions métriques.

§ 12. — Soit F_1 et F_2 deux figures congruentes. Par définition leur *distance* est la *moitié* de l'angle de la rotation qui amène l'une sur l'autre; c'est une quantité θ admettant π comme module de périodicité[2]. Par définition encore, la quantité θ est la *distance* de deux p, tels que les suivants $p_1 = (F, F_1)$, $p_2 = (F, F_2)$, ou de deux ϖ comme $\varpi_1 = (G, F_1)$ et $\varpi_2 = (G, F_2)$.

De la sorte la distance de deux éléments, tous deux p, ou tous deux ϖ, est toujours la même que celle de leurs pôles.

Soient deux éléments de types contraires, comme $p' = (F, F')$ et $\varpi' = (F, G')$. Leur *distance* est définie comme égale au complément de celle qui sépare l'un des éléments du pôle de l'autre : l'alternative qui s'ouvre ici n'affecte en rien le résultat, comme on voit aisément.

Passons à la distance de deux δ. Dans l'espace ordinaire, la disposition relative de deux points dépend d'un seul nombre, qui est justement la distance de ces points : au contraire, la disposition relative de deux droites dépend de deux nombres, qui sont l'angle de ces droites et la longueur de la perpendiculaire commune. Si on continue d'appeler *distance des droites* les éléments numériques qui déterminent la figure formée par ces droites dans l'espace, la *distance* sera un nombre complexe; elle équivaut à deux nombres ordinaires. Nous devons attendre

[1] On ne parle ici que des cas généraux.

[2] Pour abréger, je laisse ici de côté les distinctions, faciles à établir, relatives au signe de la quantité θ.

des phénomènes analogues lorsque des δ viennent se substituer à des droites.

Soient deux δ particulières $\delta_1 = (a_1, a_1')$ et $\delta_2 = (a_2, a_2')$; leur *distance* dépend des écarts de leurs deux extrémités, ou des longueurs $\overline{a_1 a_2}$ et $\overline{a_1' a_2'}$.

Au lieu de prendre ces nombres même pour définition de la distance, nous emploierons de préférence les deux combinaisons suivantes :

$$\frac{1}{2}(\overline{a_1 a_2} + \overline{a_1' a_2'}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(\overline{a_1 a_2} - \overline{a_1' a_2'}),$$

parce que, ainsi que nous verrons bientôt[1], elles expriment les grandeurs des deux perpendiculaires communes à nos δ_1 et δ_2.

Dans le cas où δ_1 et δ_2 se rencontrent, le second des deux nombres précédents est nul; la disposition relative des deux δ ne dépend plus que du premier, lequel devient égal à $\overline{a_1 a_2} = \overline{a_1' a_2'}$. C'est cette quantité qui s'appelle l'*angle* des deux δ concourantes.

Il est clair, d'après ces définitions, que la distance de deux δ dépend de leur sens de description; par exemple, l'*angle* de deux δ concourantes se change en son supplémentaire si on intervertit le sens de l'une d'elles.

§ 13. — Sans nous y arrêter longuement, rappelons en passant la formule fondamentale de la Trigonométrie non-euclidienne.

Soient F_3 une figure donnée, O_1, O_2, O_3 les sommets d'un triangle; faisons tourner F_3 autour de O_1, d'un angle égal à $2\theta_1$, ou autour de O_2 d'un angle égal à $2\theta_2$, nous obtenons deux figures congruentes, entre elles et à la précédente, F_2 et F_1. Elles ont en commun le point O_3, et l'angle de rotation qui amène l'une sur l'autre est $2\theta_3$.

Les trois sommets O_1, O_2, O_3 sont homologues communs, respectivement dans les figures F_2 et F_3, F_3 et F_1 et F_1 et F_2. Mettons en présence de ces figures congruentes, une nouvelle figure F qui leur soit superposable, et soient ω_1, ω_2, ω_3 les homologues, au sein de F, des points O_1, O_2, O_3. On a évidemment $\overline{\omega_1 \omega_2} = \overline{O_1 O_2}$, etc.

[1] Voir pp. 399 et 400.

Considérons le triangle dont les trois côtés sont les δ suivantes :

$$\delta_1 = (\omega_1, O_1) \; ; \qquad \delta_2 = (\omega_2, O_2) \; ; \qquad \delta_3 = (\omega_3, O_3) \; ;$$

les sommets de ce triangle sont évidemment

$$p_1 = (F, F_1) \; , \qquad p_2 = (F, F_2) \; , \qquad p_3 = (F, F_3) \; .$$

Si donc on appelle a_1, a_2, a_3, les grandeurs, et α_1, α_2, α_3 les angles du dit triangle, la loi susmentionnée de la composition des rotations nous donne la formule de la Trigonométrie

$$\cos a_1 = \cos a_2 \cos a_3 + \sin a_2 \sin a_3 \cos \alpha_1 \; .$$

Les conséquences en sont suffisamment connues pour qu'il n'y ait plus lieu d'insister sur les relations métriques dans la suite de nos développements.

VIII. — Parallélisme.

§ 14. — Si deux δ ont une extrémité commune nous les dirons *parallèles* entre elles, la même locution est encore valable lorsque les deux δ ont leurs origines ou leurs extrémités diamétralement opposées. Il suffit pour ramener ce cas au précédent de changer le sens de description de l'une des deux δ données ; aussi l'excluons-nous de nos énoncés.

Il y a deux genres de parallélisme, selon que les extrémités communes se trouvent au premier ou au second bout des deux δ données. Les deux figures (6) et (7) illustrent l'alternative qui se rencontre ici.

Dans (6), $\delta_1 = (a_1, a_1')$ et $\delta_2 = (a_2, a_2')$ sont parallèles au premier bout, tandis qu'elles le sont au second dans la figure (7).

Il résulte immédiatement de la définition que deux δ parallèles ne sont jamais conjointes ni à un même p, ni à un même ϖ; que deux δ parallèles à une troisième par le même bout, sont parallèles entre elles; que, deux δ quelconques étant données, telles que δ_1 et δ_2, il existe un autre élément δ parallèle à δ_1 à l'un des bouts et à δ_2 à l'autre; enfin que, si deux

δ sont parallèles, leurs conjuguées le sont aussi et au même bout[1].

Théorème. Par un p donné, on peut toujours mener une parallèle, au premier bout par exemple, à une δ donnée et l'on n'en peut mener qu'une seule.

En effet, si $\delta' = (a, a')$, et que a'' soit homologue du point a selon p, la solution unique cherchée est $\delta'' = (a, a'')$. Solution toute pareille si le parallélisme doit être de la seconde espèce.

Théorème. Dans un ϖ, on peut toujours mener une parallèle, et une seule parallèle, à une δ donnée ; le sens de ce parallélisme est d'ailleurs choisi à volonté.

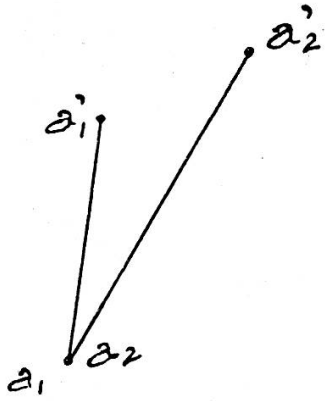

Fig. 6.

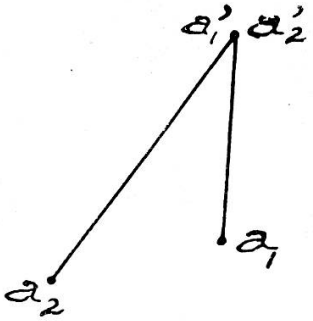

Fig. 7.

En définissant a'' comme l'homologue de a selon ϖ, la solution est identique à la précédente, c'est $\delta'' = (a, a'')$. Dans ce cas le parallélisme a lieu au premier bout.

§ 15. — *Le parallélogramme.* — Considérons six points c_1, c'_1, c'_2 et d', d_1, d_2, tels que les égalités suivantes aient lieu (fig. 8).

$$\overline{cd_1} = \overline{cd_2} = \overline{c'_1 d'} = \overline{c'_2 d'} \; ;$$

puis tirons les quatre δ suivantes :

$$\gamma_1 = (c\,,\ c'_1) \qquad \gamma_2 = (c\,,\ c'_2)\ ,$$
$$\delta_1 = (d_1,\ d') \qquad \delta_2 = (d_2,\ d')\ .$$

[1] Remarquer que deux δ conjuguées entre elles sont aussi *parallèles*. Ce parallélisme est d'ailleurs de nature singulière, ayant lieu au deux bouts à la fois, bien que les δ soient distinctes.

Parmi ces quatre δ, les deux premières sont parallèles au premier bout, les deux autres le sont au second bout. De plus, chacune des deux γ de la première ligne rencontre les deux δ qui figurent à la seconde ligne.

Et ainsi les quatre côtés γ_1, γ_2, δ_1, δ_2 manifestent la propriété du parallélogramme euclidien ordinaire. Ce qui suit va faire ressortir mieux encore la parenté des deux notions[1].

Les deux supports opposés du parallélogramme, comme $\gamma_1 = (c, c_1')$ et $\gamma_2 = (c, c_2')$ étant donnés, les deux autres supports dépendent de trois paramètres, comme on voit immédiatement.

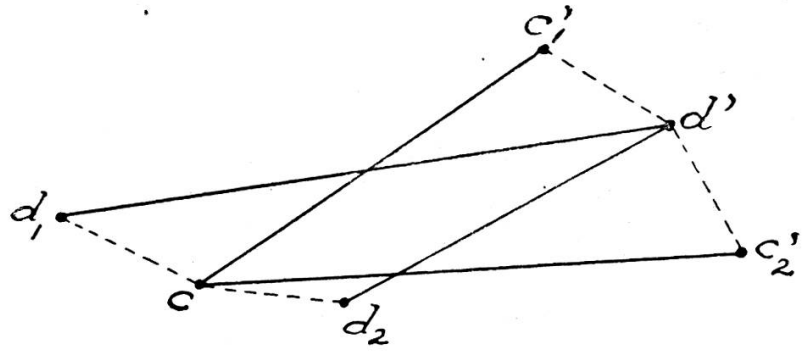

Fig. 8.

C'est l'analogue de la propriété suivant laquelle il existe ∞^3 parallélogrammes euclidiens dont les côtés opposés tombent sur deux parallèles données.

Si, en second lieu, on définit le parallélogramme au moyen de deux supports concourants tels que γ_1 et δ_1, les éléments de la construction (fig. 8) dépendent de deux paramètres. Il y a donc, ici encore, ∞^2 parallélogrammes dont les côtés tombent sur deux δ concourantes.

Si enfin on prend, à volonté, les trois supports du parallélogramme

$$\gamma_1 = (c, c_1') \; ; \; \delta_1 = (d_1, d') \; ; \; \delta_2 = (d_2, d') \, ,$$

parmi les six points de la figure (8), un seul reste indétermine à savoir c_2'. Et comme il faut que $\overline{c_2' d'} = \overline{c d_1}$, on voit qu'avec les

[1] Ne pas oublier toutefois les différences fondamentales que voici : D'abord les côtés opposés du parallélogramme riemannien n'appartiennent jamais au même ϖ ; en second lieu, le parallélisme est d'espèce contraire pour les deux couples de côtés opposés.

trois δ données, dont deux sont parallèles entre elles et concourantes avec la troisième, on peut construire une monosérie composée de ∞^1 parallélogrammes.

Plaçons-nous dans cette dernière hypothèse. Les supports γ_1, δ_1 et δ_2 étant donnés, faisons varier le quatrième côté $\gamma_2 = (c, c_2')$, en déplaçant c_2' sur le cercle de centre d' et de rayon égal à $c_1'd'$. Dans chacune de ses positions, γ_2 rencontre δ_1 et δ_2; elle détermine par sa rencontre avec ces deux éléments δ, deux éléments p, à savoir p_1 et p_2, et deux éléments ϖ, à savoir ϖ_1 et ϖ_2. Je dis que la distance entre p_1 et p_2 est la même qu'entre ϖ_1 et ϖ_2, et que cette distance demeure constante quand γ_2 varie.

En effet les opérateurs p_1 et ϖ_1 transforment tous les deux le couple de points cd_1 dans un nouveau couple $c_2'd'$; les opérateurs p_2 et ϖ_2 transforment l'un et l'autre le couple cd_2 dans le même couple $c_2'd'$ que ci-dessus.

Les distances qui séparent respectivement p_1 de p_2 et ϖ_1 de ϖ_2, sont donc bien égales entre elles, chacune à la quantité $\sphericalangle \frac{1}{2} d_1cd_2$. Celle-ci, conformément à l'énoncé, ne varie pas quand γ_2 se déplace; car elle ne dépend pas de la position du point c_2'.

Réciproquement, étant données deux δ parallèles entre elles, telles que γ_1 et γ_2, prenons sur la première deux éléments p, comme p_1 et q_1, et sur la seconde deux éléments p_2 et q_2, de telle sorte que la distance qui sépare les p dans chaque paire soit la même; dans ces conditions, les δ de jonction $\overline{p_1p_2}$ et $\overline{q_1q_2}$ sont parallèles[1].

Employons en effet la notation

$$p = \{ \alpha, \beta ; \alpha', \beta' \}$$

pour exprimer le fait que l'opérateur p change le couple de points α, β en un nouveau couple α', β'; et soit (d_1, d') la δ commune aux éléments p_1 et p_2. Nous aurons, d'après les conditions de l'énoncé,

$$p_1 = \{ c, d_1 ; c_1', d' \}. \qquad p_2 = \{ c, d_1 ; c_2', d' \}.$$

[1] On suppose q_2 placé par rapport à p_2 dans le même sens que q_1 l'est par rapport à p_1. Il va de soi que les parallélismes des deux paires de côtés opposés sont d'espèce contraire.

D'autre part, si d_2 et e_2 ont pour transformés le point d', respectivement selon q_1 et q_2

$$q_1 = \{ c, d_2 ; c'_1, d' \}, \qquad q_2 = \{ c, e_2 ; c'_2, d' \}.$$

On conclut de là

$$\overline{c'_1 d'} = \overline{cd_1} = \overline{cd_2} = \overline{c'_2 d'} = \overline{ce_2},$$

et l'égalité des distances $\overline{p_1 p_2}$, et $\overline{q_1 q_2}$ fournit de son côté l'égalité

$$\sphericalangle\, d_1 c d_2 = \sphericalangle\, d_1 c e_2 .$$

Et ainsi le point e_2 coïncide avec le point d_2 ; les conditions de la figure (8) sont toutes réalisées, et les deux δ de jonction de $p_1 p_2$, et de $q_1 q_2$, à savoir $(\overline{d_1, d'})$ et $(\overline{d_2, d'})$ sont parallèles à leur seconde extrémité. C. q. f. d.

A ces propriétés, ajoutons enfin celle des angles du parallélogramme. Dans tout parallélogramme les angles correspondants que forme un des supports avec les deux autres sont égaux.

Ceci est immédiat, car les quantités égales $\overline{cd_1}$ et $\overline{cd_2}$ par exemple, mesurent les angles formés par le côté γ, respectivement avec les côtés δ_1 et δ_2.

§ 16. — *Quadrique de Clifford.* — On sait que par trois droites données passe toujours une quadrique possédant deux systèmes de génératrices rectilignes. Le premier système comprend en particulier les trois droites données, le second est formé de toutes les sécantes communes au premier; il y a d'ailleurs réciprocité entre les deux systèmes.

Lorsque les trois droites données sont parallèles en leur première extrémité, il en est de même de toutes les génératrices du premier système. Celles du second système sont alors parallèles entre elles au second bout, et le lieu des intersections mutuelles des droites appartenant respectivement aux deux systèmes est la surface connue sous le nom de *quadrique de Clifford ;* elle est divisée par les génératrices rectilignes en une infinité de parallélogrammes non-euclidiens.

Ces phénomènes caractéristiques de la Géométrie rieman-

nienne trouvent une interprétation claire dans la Géométrie des δ sur la surface sphérique.

Considérons deux cercles de rayons égaux (fig. 9), ayant pour centres respectifs les points a et b'; soient a' un point quelconque du cercle b' et b un point quelconque du cercle a.

Il est clair que toutes les δ telles que $\delta = (a, a')$ sont parallèles entre elles au premier bout; elles forment une monosérie. De même une seconde monosérie de δ parallèles au second bout est constituée par l'ensemble $\delta' = (b, b')$.

Toutes les δ de la première monosérie rencontrent toutes les δ appartenant à la seconde, car $\overline{ab} = \overline{a'b'}$, ce qui est justement la condition de rencontre. En tant que lieu *ponctuel,* la qua-

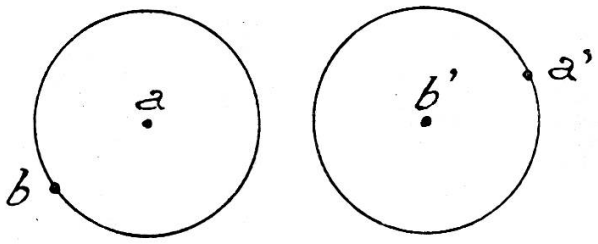

Fig. 9.

drique est formée par les ∞^2 intersections des δ avec les δ'; en tant que lieu *tangentiel,* elle est constituée par les ∞^2 éléments ϖ conjoints simultanément à une δ et à une δ'.

Il est clair que la quadrique est complètement déterminée par trois δ appartenant au premier système, par exemple $\delta_1 = (a, a_1')$, $\delta_2 = (a, a_2')$, $\delta_3 = (a, a_3')$. Le cercle b' est en effet complètement défini par trois de ses points a_1', a_2', a_3'.

La quadrique présente deux *axes* qui sont $\Delta' = (a, b')$ et $\Delta'' = (a, b'')$, le point b'' étant diamétralement opposé à b'. Ces axes sont ainsi conjugués entre eux, et les génératrices de l'un et de l'autre système leur sont parallèles, à l'un ou à l'autre bout. De plus, la distance qui sépare chaque génératrice de l'un des axes est constante, et reste la même pour les deux systèmes de génératrices. On conclut facilement de là que les p qui constituent la surface, au point de vue ponctuel, sont équidistants des axes. La quadrique de Clifford reçoit ainsi une définition qui la rapproche du cylindre ordinaire.

IX. — Perpendicularité.

§ 17. — Si deux éléments δ comme $\delta_1 = (a_1, a_1')$ et $\delta_2 = (a_2, a_2')$ vérifient la condition

$$\overline{a_1 a_2} + \overline{a_1' a_2'} = 180^\circ \ .$$

chacune rencontre la conjuguée de l'autre, et réciproquement chaque fois que δ_1 rencontrera la conjuguée de δ_2, l'égalité ci-dessus a lieu. Car en désignant[1] par a_2'' l'antipode de a_2', cette égalité se réduit à celle de rencontre $a_1 a_2 = a_1' a_2''$.

Deux δ entre lesquelles existe la relation précédente se nomment *orthogonales*. Lorsque δ_2, non seulement est orthogonale, mais de plus concourante avec δ_1, nous aurons

$$\overline{a_1 a_2} = \overline{a_1' a_2'} = 90^\circ \ .$$

C'est le cas de la *perpendicularité* déjà définie au § 7.

Et l'on voit par là que l'ensemble des sécantes communes à une δ et à sa conjuguée est identique avec l'ensemble des perpendiculaires élevées sur cette δ. On peut se figurer cet ensemble de la manière suivante.

Soit $\delta = (a, a')$. Tirons les arcs de grands cercles E et E′ ayant a et a' pour pôles respectifs et prenons deux points, b et b', respectivement sur E et sur E′. Les ∞^2 éléments $\delta = (b, b')$ sont les perpendiculaires cherchées ; elles forment une bisérie qu'on appelle *recticongruence*.

Problème. Par un p, ou un ϖ, choisis à volonté, abaisser une $\Delta = (c, c')$, qui soit perpendiculaire à une autre δ donnée $\delta = (a, a')$. Comme toujours nous ne traitons que le premier cas.

Il faut que $\overline{ca} = \overline{c'a'} = 90^\circ$. Le point c doit se trouver sur un arc de grand cercle E ayant a comme pôle, et le point c' sur un second arc E′ de pôle a'. D'autre part c' est associé à c selon

[1] Des δ conjuguées cumulent les caractères de l'orthogonalité et du parallélisme.

p ; il doit donc appartenir à la transformée Γ' du premier de ces cercles selon p. Et ainsi c' se trouve à l'intersection des cercles E' et Γ', c au point correspondant du cercle E [1].

On pourrait aussi obtenir la perpendiculaire comme suit. Par le p donné menons deux éléments ϖ contenant, le premier la δ donnée, le second sa conjuguée ; la perpendiculaire est à leur intersection.

§ 18. — Une $\delta = (a, a')$ est dite *perpendiculaire* à un certain ϖ, quand la conjuguée de cette δ appartient à ϖ, et réciproquement, dans ces mêmes circonstances, l'objet ϖ est dit *perpendiculaire à l'élément* δ [2]. Voyons ce qui en est (fig. 10).

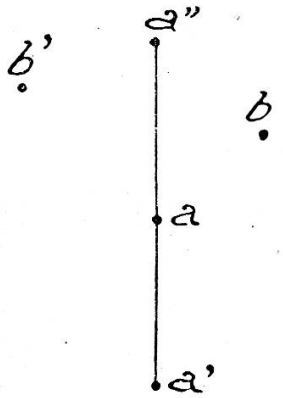

Fig. 10.

Soient a'' l'antipode de a', et (b, b') une δ faisant partie de ϖ. La condition de conjonction entre la conjuguée de $\delta = (a, a')$, qui est (a, a''), et le ϖ donné se lit $\overline{ab} = \overline{a''b'}$, ou encore

$$\overline{ab} + \overline{a'b'} = 180^\circ .$$

Donc : *Toute perpendiculaire* $\delta = (a, a')$ *à un* ϖ *est orthogonale aux* $\delta' = (b, b')$ *contenues dans ce* ϖ.

En particulier si $\delta = (a, a')$ rencontre la $\delta' = (b, b')$, il faut que

$$\overline{ab} = \overline{a'b'} ;$$

[1] La solution $(-c, -c')$, également possible, redonne la même perpendiculaire décrite en sens inverse.

[2] On peut imiter cette notion, en substituant corrélativement un p à un ϖ.

en combinant cette condition avec $\overline{ab} + \overline{a'b'} = 180°$, il vient

$$\overline{ab} = \overline{a'b'} = 90° \ ;$$

par suite : *toute perpendiculaire à un certain* ϖ *est aussi perpendiculaire à toutes les* δ *qui passent par son pied dans le* ϖ.

Une autre définition, équivalente, est la suivante. *Sont perpendiculaires à un élément* ϖ *les* δ *qui passent au pôle* p *de cet élément.*

En effet, si on désigne par b'' l'antipode de b' et qu'on emploie la notation expliquée plus haut (p. 393), on a

$$\varpi = \left\{ a, b \ ; \ a'', b' \right\} \quad \text{d'où} \quad p = \left\{ a, b \ ; \ a', b'' \right\}$$

et ainsi toute $\delta = (a, a')$ perpendiculaire à ϖ, est conjointe avec le pôle p de l'élément ϖ.

Par suite, étant donnés un élément ϖ et un élément p_1 il existe une δ perpendiculaire à ϖ et conjointe avec p_1, et il n'en existe qu'une seule[1]. Pour l'obtenir, il suffit de joindre p_1 au pôle p du ϖ donné.

Le problème inverse consistant à mener par un p un ϖ perpendiculaire à une δ donnée se résout immédiatement; il suffit de joindre p à la conjuguée de la δ.

Théorème. Etant données deux δ, telles que $\delta_1 = (a_1 a_1')$ et $\delta_2 = (a_2 a_2')$, je dis qu'elles possèdent deux perpendiculaires communes, lesquelles sont conjuguées l'une de l'autre.

En effet, pour qu'une $\delta = (\gamma, \gamma')$ soit perpendiculaire à δ_1 et à δ_2, il faut qu'on ait

$$\overline{\gamma a_1} = \overline{\gamma a_2} = 90° \ ,$$

$$\overline{\gamma' a_1'} = \overline{\gamma' a_2'} = 90° \ .$$

Ainsi γ occupe l'un des pôles de l'arc $a_1 a_2$ et γ' un des pôles de l'arc $a_1' a_2'$. Chacun de ces points peut ainsi affecter deux positions antipodes l'une de l'autre. Par suite il existe deux perpendiculaires communes telles que (γ, γ') et $(\gamma, -\gamma')$; elles sont évidemment conjuguées et chacune peut être décrite dans un sens quelconque.

[1] Si du moins p est distinct de p_1. Le problème consistant à mener par une δ un ϖ perpendiculaire à une autre δ est fort simple à traiter.

§ 19. — Lorsque les deux δ sont parallèles, par exemple au premier bout, γ' seul est déterminé; quant à γ il suffit de le placer à 90° de distance des points a_1 et a_2 réunis en un seul. Dans ce cas, il existe une monosérie de perpendiculaires communes qui sont parallèles entre elles au second bout. Cette propriété dérive d'ailleurs directement du fait que, dans le parallélogramme non-euclidien, les angles correspondants sont toujours égaux : si l'un est droit, l'autre le sera nécessairement.

La perpendiculaire commune $\Gamma = (\gamma, \gamma')$, et la première $\delta_1 = (a_1, a_1')$, étant concourantes, déterminent par leur intersection un élément p; nommons-le p_1. Soit de même p_2 l'élément p commun à Γ et à $\delta_2 = (a_2, a_2')$. Quelle distance sépare ces éléments p_1 et p_2 ? La réponse est aisée.

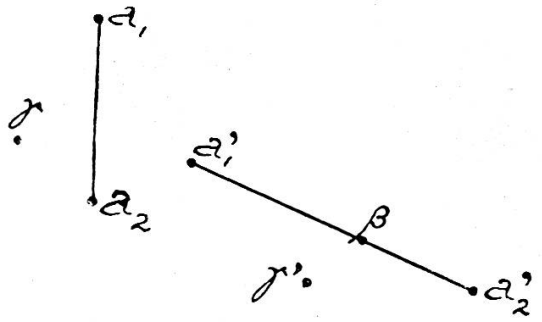

Fig. 11.

En effet, nous avons

$$\overline{\gamma a_1} = \overline{\gamma a_2} = \overline{\gamma' a_1'} = \overline{\gamma' a_2'} = 90^\circ \ ;$$

sur le grand cercle $\overline{a_2' a_1'}$ prenons un point β tel que

$$\overline{a_1' \beta} = \overline{a_1 a_2} \ , \qquad \overline{a_2' \beta} = \overline{a_1' a_2'} - \overline{a_2 a_1} \ .$$

L'opérateur p_1 transporte $\overline{\gamma a_1}$ sur $\overline{\gamma' a_1'}$ et $\overline{\gamma a_2}$ sur $\overline{\gamma' \beta}$. De même l'opérateur p_2 transporte $\overline{\gamma a_2}$ sur $\overline{\gamma' a_2'}$ (fig. 11).

Donc la distance de deux éléments p_1 et p_2, qui occupent les pieds de la perpendiculaire commune sur chaque δ, est égale à l'angle $\sphericalangle \frac{1}{2} \overline{\beta \gamma' a_2'}$, lui-même égal à l'arc

$$\frac{1}{2} \overline{a_2' \beta} \ , \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} (\overline{a_2' a_1'} - \overline{a_2 a_1}) \ ;$$

cette quantité mesure la longueur de la première perpendiculaire commune. La seconde a pour grandeur $\frac{1}{2}(\overline{a'_2 a'_1} + \overline{a_2 a_1})$, ainsi qu'il est aisé de le démontrer.

X. — Le mouvement en géométrie riemannienne.

§ 20. — Pour ne pas allonger démesurément ce mémoire, je ne consacre que quelques mots à cette importante question : mais je ne crois pas pouvoir me dispenser de mettre ici en lumière la propriété la plus caractéristique du mouvement dans l'espace E_3^r, à savoir sa constitution binaire[1]. La Géométrie réglée va nous en livrer le secret de la manière la plus immédiate.

Un *mouvement* dans E_3^r fait correspondre à un p quelconque un nouveau p, à un ϖ quelconque un nouveau ϖ, à une δ quelconque une nouvelle δ, de telle manière que la distance de deux éléments transformés, de même espèce ou d'espèce différente, soit la même que celle des éléments primitifs correspondants[2]. Il résulte facilement de cette notion que le mouvement est une transformation *projective,* par laquelle les relations de conjonction ne sont pas altérées.

Il est donc loisible, dans l'étude des mouvements non euclidiens, de se limiter au cas où les éléments à transformer sont de la catégorie δ.

Supposons donc qu'on imprime un déplacement déterminé, d'ailleurs quelconque, à l'origine a de n'importe quelle $\delta = (a, a')$ et un *autre* déplacement, également bien défini, à l'extrémité a' de cette même δ. Il est clair que la δ se change ainsi en une nouvelle $\delta = (b, b')$, et que la condition d'invariance des distances est satisfaite. Car si $\delta_1 = (a_1, a'_1)$ et $\delta_2 = (a_2, a'_2)$ se

[1] L'opérateur *mouvement* a le type analytique $p(\cdot)q$, avec les *deux facteurs* quaternions non-interchangeables p et q.

[2] Il faut ajouter ici que l'ensemble de tous les mouvements doit former un groupe contenant la transformation identique. A l'instar de ce qui a lieu pour la Planimétrie, l'invariance des distances a lieu, en Géométrie réglée, pour d'autres opérations que les *mouvements,* ce sont les *retournements :* je n'en parle pas ici.

transforment respectivement en $\delta'_1 = (b_1, b'_1)$ et $\delta'_2 = (b_2, b'_2)$, nous aurons

$$\overline{a_1 a_2} = \overline{b_1 b_2} \quad \text{et} \quad \overline{a'_1 a'_2} = \overline{b'_1 b'_2}$$

puisque les a subissent un même déplacement, et les a' un autre déplacement (généralement distinct du premier).

L'opération décrite à l'instant s'appelle un *mouvement* de l'espace E'_3; elle peut se répéter sans changer de nature; et, puisqu'elle possède six degrés de liberté, tous les mouvements forment dans leur ensemble un groupe à six paramètres. Ce groupe est continu.

Théorème. Etant donné un mouvement quelconque, il existe en général deux δ, conjuguées l'une de l'autre, qui ne changent pas de position quand on exécute ce mouvement.

En effet, soient (F, F_1) et (F, F'_1) les déplacements subis respectivement par les deux extrémités d'une δ quelconque, déplacements qui représentent les composantes du mouvement non-euclidien dont il s'agit.

Prenons le point commun a aux figures F et F_1, et son antipode $-a$; prenons de même le point commun a', commun aux figures F et F'_1, ainsi que son antipode $-a'$. Les seules δ qui restent invariantes sont évidemment (a, a'), et $(a, -a')$, ou les opposées de celles-ci; elles sont d'ailleurs conjuguées comme possédant une même origine et deux extrémités qui sont antipodes.

Il existe toujours ∞^2 mouvements laissant en place une δ donnée $\delta = (a, a')$. Car si la figure F est choisie à volonté, F_1 est cette figure même tournée d'un angle quelconque autour de a; de même F'_1 est identique à F après une rotation arbitraire autour du point a'. Ceci suffit à définir les deux composantes du mouvement.

On reconnaît ici les caractères généraux du mouvement hélicoïdal. Il opère un reclassement des p et des ϖ conjoints aux δ invariantes; et il serait facile de voir qu'à mesure que varient les angles de rotation des figures F_1 et F'_1 autour de leurs centres respectifs, chaque p avance d'une quantité déterminée, et chaque ϖ tourne d'un angle constant, le long et autour des δ invariantes.

Dans l'énoncé des propositions précédentes, une réserve est nécessaire. Supposons que la figure F'_1 soit identique avec F; alors la rotation (F, F'_1) est d'angle nul, et son centre a' est indéterminé.

Seul le point a est défini. On voit que dans ce cas toutes les δ dont l'origine est en a, se transforment en elles-mêmes, quelle que puisse être leur extrémité a'. Toutes ces droites invariantes forment une congruence de droites parallèles entre elles au premier bout. Le mouvement dont il s'agit fait avancer un p, conjoint avec l'une de ces δ, le long de cette δ même. Et le glissement est constant pour tous les p de l'espace : ce sont les caractères connus de la *translation euclidienne*[2].

Il existera naturellement une translation, d'une autre espèce, qui laisse invariantes les ∞^2 droites d'une congruence de δ parallèles à leur second bout arbitrairement choisi sur la sphère.

[1] Il est clair que deux δ qui sont de sens contraire se changent par le mouvement en deux nouvelles δ qui sont encore de sens contraire.

[2] Tout ceci se vérifie aisément.